CÁLCULO

Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Sexta edición

Volumen 1

ROLAND E. LARSON

ROBERT P. HOSTETLER

The Pennsylvania State University
The Behrend College

BRUCE H. EDWARDS

University of Florida

Con la colaboración de

DAVID E. HEYD

The Pennsylvania State University
The Behrend College

Traducción

LORENZO ABELLANAS RAPÚN
Catedrático de Métodos Matemáticos de la Física
Universidad Complutense de Madrid

Consultores

JOSÉ LUIS PÉREZ LÓPEZ
Profesor Titular del Departamento de Matemáticas

ORLANDO LEAL SÁNCHEZ
Docente jubilado

Politécnico Jaime Isaza Cadavid
Medellín, Colombia

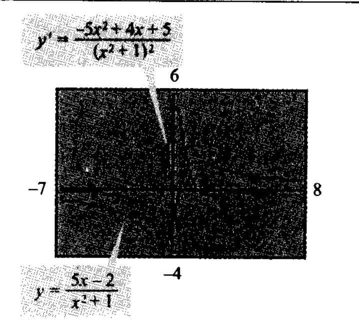


MADRID • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MÉXICO
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
PARÍS • SAN FRANCISCO • SIDNEY • SINGAPUR • ST. LOUIS • TOKIO • TORONTO

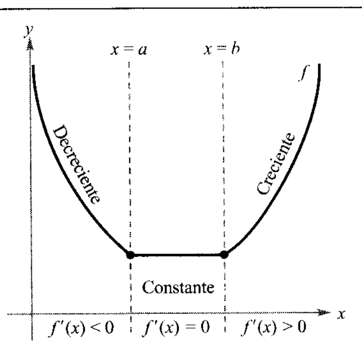
Contenido

d
Tiempo de luz solar (en minutos)
850
800
750
700
650
t
40 120 200 280 360
Día (0 ↔ Diciembre 21)

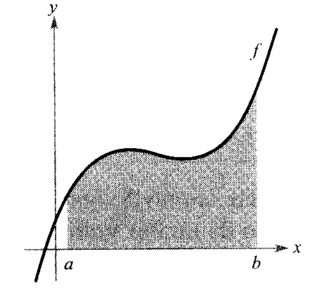
y
$\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$
x
a c b



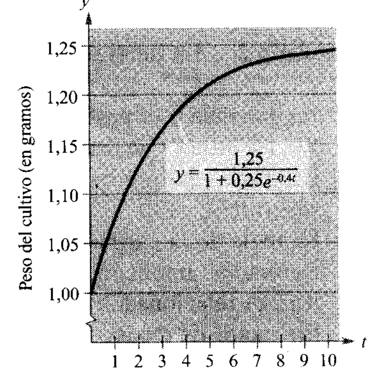
Capítulo 3. Aplicaciones de la derivada 178



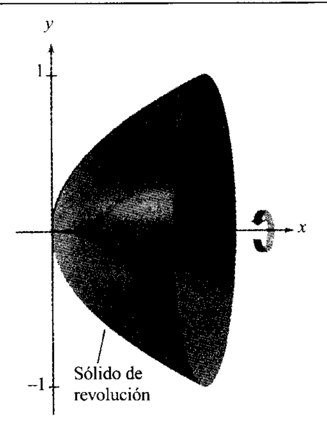
Capítulo 4. Integración 278



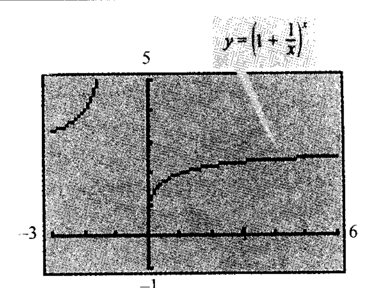
Capítulo 5. Funciones logarítmicas, exponenciales y otras funciones trascendentes 356



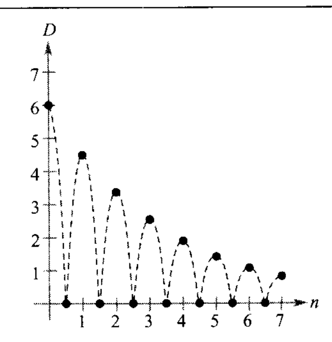
Capítulo 6. Aplicaciones de la integral 462



Capítulo 7. Métodos de integración, regla de L'Hôpital e integrales impropias 538



Capítulo 8. Series 620



Índice de aplicaciones

INGENIERÍA Y FÍSICA

ECONOMÍA Y COMERCIO

CIENCIAS SOCIALES Y DEL COMPORTAMIENTO

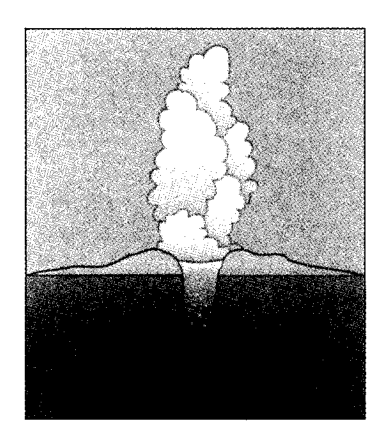
CIENCIAS DE LA VIDA

GENERAL

Capítulo P

MOTIVACIÓN DEL CAPÍTULO

Las erupciones del Old Faithful



Para que exista un géiser, deben reunirse tres condiciones: un suministro de agua, una fuente de calor intensa y unos conductos de salida.

El agua calentada por fenómenos volcánicos entra en el sistema de conducción de un géiser a grandes profundidades, hirviendo y calentando el agua más fría que fluye desde la superficie. Eventualmente, el hervor produce la presión suficiente para expulsar violentamente hacia el exterior grandes volúmenes de agua. Una vez que finaliza la erupción, el proceso se inicia de nuevo.

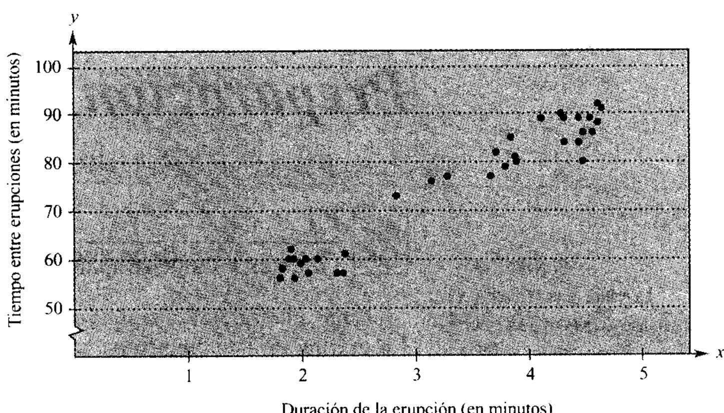
El Parque Nacional de Yellowstone, situado en la esquina noroeste de Wyoming y zonas próximas de Montana e Idaho, contiene casi la mitad de todos los géiseres conocidos de la Tierra. Un reducido número de estos espectáculos hidrotérmicos son tan regulares que pueden ser anticipados con precisión. Entre los más de 400 géiseres del Parque Nacional de Yellowstone, sólo se han efectuado predicciones para siete, uno de los cuales es el Old Faithful.

El géiser fue bautizado como Old Faithful en 1870. En 1938, el geólogo Harry M. Woodward descubrió que existía una correlación entre la duración de cada erupción del Old Faithful y el intervalo de tiempo transcurrido hasta la siguiente.

Se han observado y registrado más de 137.000 erupciones del Old Faithful. Sus duraciones han oscilado entre los 1,5 y los 5,5 minutos, mientras que los intervalos han variado entre los 30 y los 120 minutos. Desde las observaciones de Woodward, los intervalos han tendido a crecer. Se especula que los mayores terremotos en la región han alejado del géiser la circulación de agua caliente, con el resultado de un mayor *tiempo de rellenado*.

La tabla siguiente muestra 35 erupciones en forma de pares ordenados (x, y), donde x representa la duración e y el intervalo, ambos en minutos. *(Fuente: Parque Nacional de Yellowstone.)*

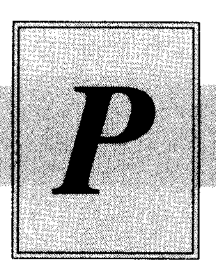
(1,80, 56),	(1,82, 58),	(1,88, 60),	(1,90, 62),	(1,92, 60),
(1,93, 56),	(1,98, 59),	(2,03, 60),	(2,05, 57),	(2,13, 60),
(2,30, 57),	(2,35, 57),	(2,37, 61),	(2,82, 73),	(3,13, 76),
(3,27, 77),	(3,65, 77),	(3,70, 82),	(3,78, 79),	(3,83, 85),
(3,87, 81),	(3,88, 80),	(4,10, 89),	(4,27, 90),	(4,30, 84),
(4,30, 89),	(4,43, 84),	(4,43, 89),	(4,47, 80),	(4,47, 86),
(4,53, 89),	(4,55, 86),	(4,60, 88),	(4,60, 92),	(4,63, 91),



CUESTIONES

Harry M. Woodward fue el primero en describir una relación entre la duración de las erupciones del Old Faithful y los intervalos transcurridos entre ellas.

1. Describir la relación entre la duración de las erupciones del Old Faithful y el intervalo transcurrido entre ellas. ¿Existe correlación entre ambas magnitudes?
2. Suponiendo que se observa una erupción que dura 2 minutos y 40 segundos, ¿cuándo estima que se producirá la próxima?
3. Escriba un modelo (una ecuación en las variables x e y) que pueda utilizarse para predecir el intervalo de tiempo hasta la siguiente erupción. Explique cómo obtuvo el modelo. ¿Utilizó una calculadora o lo obtuvo mediante cálculos a mano?



Preparación para el Cálculo



P.1 Gráficas y modelos matemáticos

CONTENIDO ▪
La gráfica de una ecuación ▪
Intersecciones con los ejes ▪
Simetrías de una gráfica ▪
Puntos de intersección ▪
Modelos matemáticos ▪

La gráfica de una ecuación

En 1637, el matemático francés René Descartes revolucionó las Matemáticas al unir sus dos ramas principales: Algebra y Geometría. Con ayuda del plano coordenado de Descartes, los conceptos geométricos pudieron formularse analíticamente y los conceptos algebraicos visualizarse gráficamente.

Sus posibilidades de éxito en el Cálculo aumentarán siguiendo el mismo acercamiento. Es decir, viendo el Cálculo desde múltiples perspectivas —*gráfica*, *analítica* y *numérica*— incrementará su comprensión de los conceptos fundamentales.

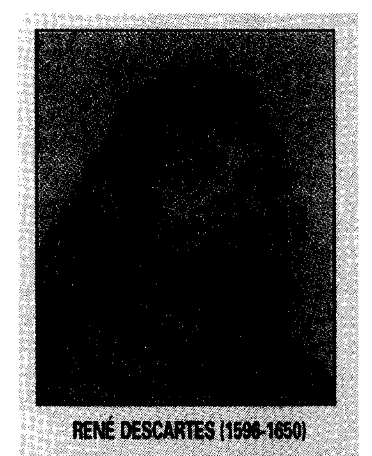
Consideremos la ecuación $3x + y = 7$. El punto (2, 1) es un **punto solución** de la ecuación puesto que esta última se satisface (es cierta) cuando se sustituye x por 2 e y por 1. Esta ecuación tiene muchas otras soluciones, como (1, 4) o (0, 7). Para hallar sistemáticamente otras soluciones, despejamos y de la ecuación inicial.

$$y = 7 - 3x \qquad \text{Procedimiento analítico}$$

Después, elaboramos una **tabla de valores** sustituyendo varios valores de x.

x	0	1	2	3	4
y	7	4	1	−2	−5

Procedimiento numérico



RENÉ DESCARTES (1596-1650)

Descartes hizo numerosas contribuciones a la Filosofía, la Ciencia y las Matemáticas. La idea de representar los puntos del plano por pares de números reales y las curvas en el plano por ecuaciones la describió en su libro *La Géométrie*, publicado en 1637.

A partir de la tabla, puede verse que (0, 7), (1, 4), (2, 1), (3, −2) y (4, −5) son soluciones de la ecuación inicial

$$3x + y = 7 \qquad \text{Ecuación inicial}$$

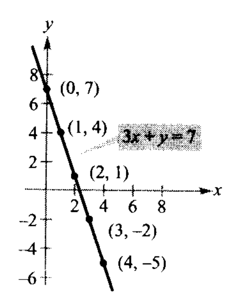


FIGURA P.1
Gráfica de $3x + y = 7$.

Como muchas ecuaciones, ésta tiene infinitas soluciones. El conjunto de todos los puntos solución constituye la **gráfica** de la ecuación, como ilustra la Figura P.1.

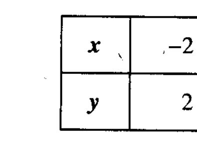
Nota. Aunque nos refiramos al dibujo de la Figura P.1 como la gráfica de $3x + y = 7$, en realidad sólo representa una porción de ésta. La gráfica completa se extendería fuera de los límites de la página.

En este curso estudiará un gran número de ayudas para la representación gráfica. La más simple consiste en dibujar puntos hasta que la forma esencial de la gráfica se haga evidente.

EJEMPLO 1 Dibujo de una gráfica mediante trazado de puntos

Dibujar la gráfica de $y = x^2 - 2$.

Solución: Primero construimos una tabla de valores. Después, trazamos los puntos dados en la tabla.



x	−2	−1	0	1	2	3
y	2	−1	−2	−1	2	7

FIGURA P.2
La parábola $y = x^2 - 2$.

Finalmente, unimos los puntos con una *curva suave*, como se muestra en la Figura P.2. Esta gráfica es una **parábola**. Se trata de una de las cónicas estudiadas en el Capítulo 9. □

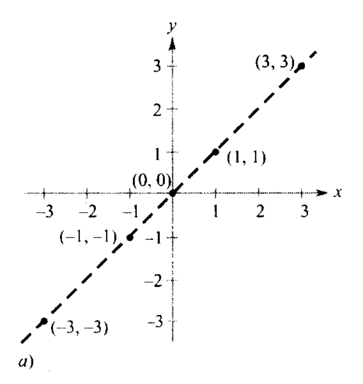
Uno de los inconvenientes de la representación mediante trazado de puntos es que conseguir una idea fiable de la forma de una gráfica puede exigir marcar un gran número de puntos. Con sólo unos pocos, se podría desfigurar drásticamente la gráfica. Por ejemplo, supongamos que para dibujar la gráfica de

$$y = \frac{1}{30}x(39 - 10x^2 + x^4)$$

se han marcado únicamente los cinco puntos:

$$(-3, -3),\ (-1, -1),\ (0, 0),\ (1, 1)\ \text{y}\ (3, 3)$$

como ilustra la Figura P.3*a*. A partir de estos puntos, se podría concluir que la gráfica es una recta. Sin embargo, esto no es correcto. Trazando varios puntos más puede verse que la gráfica es más complicada (véase Figura P.3*b*).



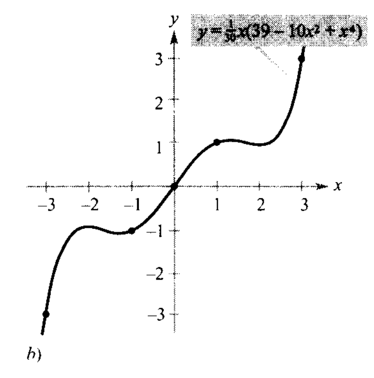


FIGURA P.3
Si se marcan pocos puntos, puede obtenerse una gráfica falseada.

EXPLORACIÓN

Comparación de los métodos gráfico y analítico Utilice una calculadora gráfica para representar cada una de las siguientes gráficas. En cada caso, encuentre una ventana de representación que muestre las principales características de la gráfica.

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$

b) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 25$

c) $y = -x^3 - 3x^2 + 20x + 5$

d) $y = 3x^3 - 40x^2 + 50x - 45$

e) $y = -(x + 12)^3$

f) $y = (x - 2)(x - 4)(x - 6)$

Acometer este problema usando métodos puramente gráficos conllevaría una estrategia simple de «intuición, comprobación y revisión». ¿Qué tipo de aspectos piensa que podría involucrar un planteamiento analítico? Por ejemplo, ¿tiene simetrías la gráfica? ¿Tiene inflexiones? Si es así, ¿dónde están?

A medida que avance en los Capítulos 1, 2 y 3 de este texto, estudiará muchas herramientas analíticas nuevas que le ayudarán a analizar gráficas de ecuaciones como éstas.

La tecnología moderna ha simplificado notablemente el dibujo de gráficas. No obstante, incluso recurriendo a ella, es posible desfigurar una gráfica. Por ejemplo, cada una de las pantallas de calculadora gráfica de la Figura P.4 muestra una porción de la gráfica de

$$y = x^3 - x^2 - 25$$

La pantalla de la izquierda puede inducir a pensar que la gráfica es una recta. En la de la derecha, sin embargo, se ve que no es el caso. Así pues, cuando se dibuja una gráfica tanto a mano como mediante una calculadora, debe tenerse en cuenta que las diferentes *ventanas de representación* pueden dar lugar a imágenes muy distintas de la gráfica. Al elegir una ventana, la clave está en mostrar una imagen de la gráfica que se adecue al contexto del problema.

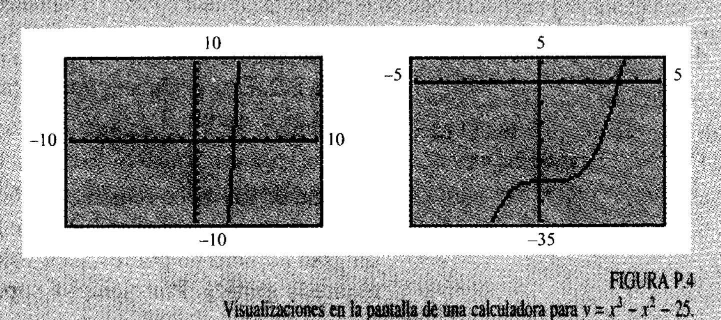


FIGURA P.4
Visualizaciones en la pantalla de una calculadora para $y = x^3 - x^2 - 25$.

N. del T.: A lo largo del libro se hace referencia en miles de ocasiones a cálculos numéricos, cálculos simbólicos y gráficas efectuadas con ayuda bien sea de calculadoras simples, calculadoras gráficas, calculadoras programables u ordenadores con paquetes de cálculo como Maple, Mathematica, Derive, Mathcad, etc. En el texto, se indicará con el símbolo

Puesto que cada lector tendrá sus propias preferencias, perfectamente respetables, o dispone de unos medios de cálculo determinados que no va a modificar por el mero influjo de un texto particular, de ahora en adelante nos referiremos a todas esas variantes de cálculo electrónico utilizando sencillamente el término «calculadora».

En cada momento, el contexto dejará claro cuál o cuáles de esas herramientas son más apropiadas. Y el sentido común permitirá, en cada momento, interpretar correctamente el significado del término «calculadora».

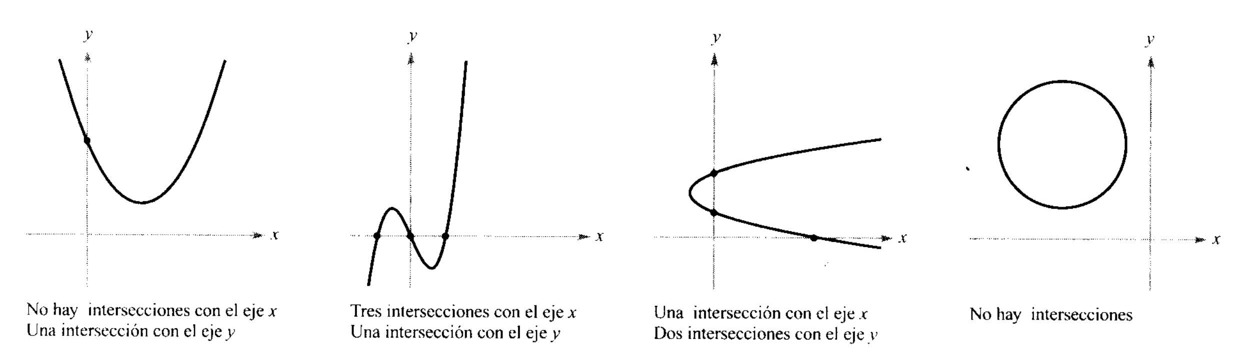
Obviamente, un ordenador cubre todas las necesidades y, de hecho, en buen número de situaciones es el instrumento más aconsejable.

Intersecciones con los ejes

Dos tipos de puntos solución especialmente útiles son aquellos cuya coordenada x o y se anula. Tales puntos se denominan **intersecciones con los ejes** porque son los puntos en los que la gráfica corta (se intersecta con) el eje x o el eje y. Un punto del tipo $(a, 0)$ es una ***x*-intersección** de la gráfica de una ecuación si es un punto solución de ésta. Para determinar las x-intersecciones de una gráfica, igualamos y a cero y resolvemos la ecuación en x resultante. Análogamente, un punto del tipo $(0, b)$ es una ***y*-intersección** de la gráfica de una ecuación si es un punto solución de la misma. Para hallar las y-intersecciones de una gráfica, igualamos x a cero y resolvemos la ecuación en y resultante.

Nota. En algunos textos se denomina x-intersección a la coordenada x del punto $(a, 0)$ en lugar de al propio punto. Salvo que sea necesario distinguirlos, usaremos el término *intersección* para denominar tanto al punto como a la coordenada correspondiente.

Es posible que una gráfica carezca de intersecciones con los ejes, o que presente varias de ellas. Por ejemplo, consideremos las cuatro gráficas de la Figura P.5.



No hay intersecciones con el eje x
Una intersección con el eje y

Tres intersecciones con el eje x
Una intersección con el eje y

Una intersección con el eje x
Dos intersecciones con el eje y

No hay intersecciones

FIGURA P.5

EJEMPLO 2 Determinación de las intersecciones con los ejes x e y

Encontrar las intersecciones con los ejes de la gráfica de $y = x^3 - 4x$.

Solución: Para determinar las x-intersecciones, igualamos y a cero y despejamos x

$$x^3 - 4x = 0 \qquad \text{Hacer igual a 0}$$

$$x(x - 2)(x + 2) = 0 \qquad \text{Factorizar}$$

$$x = 0, 2 \text{ o } -2 \qquad \text{Despejar } x$$

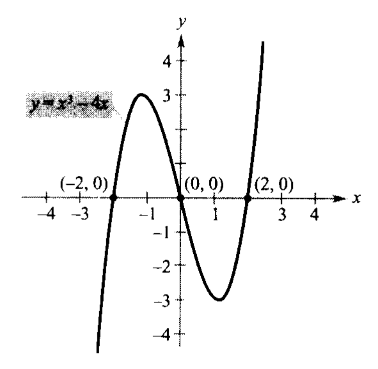


FIGURA P.6
Intersecciones de una gráfica.

Puesto que esta ecuación admite tres soluciones, se puede concluir que la gráfica tiene tres x-intersecciones:

$$(0, 0),\ (2, 0)\ \text{y}\ (-2, 0) \qquad x\text{-intersecciones}$$

Para hallar las y-intersecciones, igualamos x a cero. Resulta entonces $y=0$. Por tanto, la y-intersección es

$$(0, 0) \qquad y\text{-intersección}$$

(Véase Figura P.6.) □

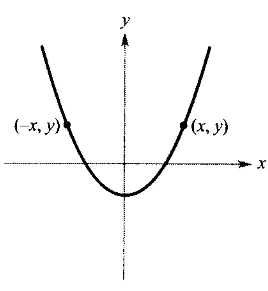
> En el Ejemplo 2 se ha utilizado un procedimiento analítico para determinar las intersecciones con los ejes. Cuando no es posible tal enfoque analítico, se puede recurrir a métodos gráficos, buscando los puntos en los que la gráfica toca los ejes. Inténtelo empleando una calculadora gráfica para hallar las intersecciones de forma aproximada.

Simetrías de una gráfica

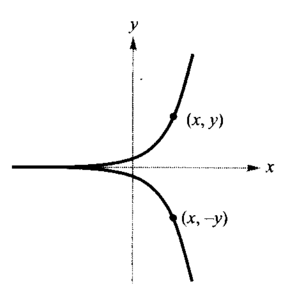
Los tres tipos siguientes de simetrías pueden servir de ayuda para dibujar la gráfica de una ecuación (véase Figura P.7).

1. Una gráfica es **simétrica respecto al eje *y*** si, para cada punto (x, y) de la gráfica, el punto $(-x, y)$ también pertenece a la gráfica. Esto significa que la porción de la gráfica situada a la izquierda del eje y es la imagen especular de la situada a la derecha de dicho eje.
2. Una gráfica es **simétrica respecto al eje *x*** si, para cada punto (x, y) de la gráfica, el punto $(x, -y)$ también pertenece a la gráfica. Esto quiere decir que la porción de la gráfica situada por encima del eje x es la imagen especular de la situada por debajo del mismo.
3. Una gráfica es **simétrica respecto al origen** si, para cada punto (x, y) de la gráfica, el punto $(-x, -y)$ también pertenece a la gráfica. Esto significa que la gráfica permanece inalterada si se efectúa una rotación de 180° alrededor del origen.

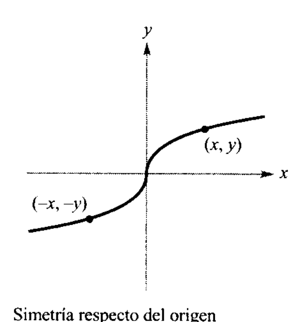
Es muy útil saber si una gráfica tiene simetrías antes de intentar dibujarla, ya que esto ayuda a determinar una ventana de representación apropiada.



Simetría respecto del eje y



Simetría respecto del eje x



Simetría respecto del origen

FIGURA P.7

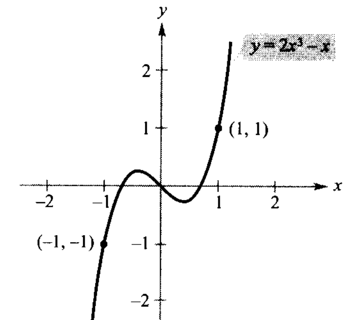
CRITERIOS DE SIMETRÍA

1. La gráfica de una ecuación en x e y es simétrica respecto al eje y si al sustituir x por $-x$ en la ecuación se obtiene una ecuación equivalente.
2. La gráfica de una ecuación en x e y es simétrica respecto al eje x si al sustituir y por $-y$ en la ecuación resulta una ecuación equivalente.
3. La gráfica de una ecuación en x e y es simétrica respecto al origen si sustituir x por $-x$ e y por $-y$ en la ecuación produce una ecuación equivalente.

La gráfica de un polinomio es simétrica respecto al eje y si cada término tiene exponente par (o es constante). Por ejemplo, la gráfica de

$$y = 2x^4 - x^2 + 2 \qquad \text{Simetría respecto al eje } y$$

es simétrica respecto al eje y. Análogamente, la gráfica de un polinomio es simétrica respecto al origen si cada término tiene exponente impar, como se ilustra en el Ejemplo 3.



Simetría respecto del origen

FIGURA P.8

EJEMPLO 3 Comprobación de la simetría respecto al origen

Comprobar que la gráfica de $y = 2x^3 - x$ es simétrica respecto al origen.

Solución:

$y = 2x^3 - x$	Ecuación original
$-y = 2(-x)^3 - (-x)$	Sustituir x por $-x$ e y por $-y$
$-y = -2x^3 + x$	Simplificar
$y = 2x^3 - x$	Ecuación equivalente

Como la sustitución produce una ecuación equivalente, se sigue que la gráfica de $y = 2x^3 - x$ es simétrica respecto al origen, como se muestra en la Figura P.8. □

EJEMPLO 4 Uso de las simetrías para representar una gráfica

Dibujar la gráfica de $x - y^2 = 1$.

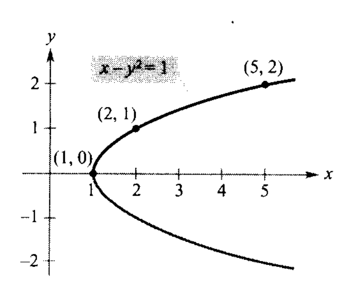


FIGURA P.9
Marcar en primer lugar los puntos situados por encima del eje x. A continuación, completar la gráfica usando su simetría.

Solución: La gráfica es simétrica respecto al eje x porque al sustituir y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente.

$x - y^2 = 1$	Ecuación original
$x - (-y)^2 = 1$	Sustituir y por $-y$
$x - y^2 = 1$	Ecuación equivalente

Esto significa que la porción de la gráfica situada bajo el eje x es imagen especular de la porción situada sobre dicho eje. Para dibujar la gráfica, representamos primero la porción sobre el eje x. Posteriormente, reflejamos el dibujo en el eje x y obtenemos la gráfica completa (Figura P.9). □

Las calculadoras gráficas están diseñadas de manera que representan con mayor facilidad las ecuaciones que expresan y como función de x (véase la definición de **función** en la Sección P.3). Para representar otros tipos de ecuaciones, es necesario dividir la gráfica en dos o más partes *o bien* recurrir a un modo gráfico diferente. Por ejemplo, para dibujar la gráfica de la ecuación del Ejemplo 4, se puede descomponer ésta en dos partes:

$y_1 = \sqrt{x-1}$	Parte superior de la gráfica
$y_2 = -\sqrt{x-1}$	Parte inferior de la gráfica

Puntos de intersección

Se llama **punto de intersección** de las gráficas de dos ecuaciones a todo punto que satisfaga ambas ecuaciones. Los puntos de intersección de dos gráficas se determinan resolviendo sus ecuaciones simultáneamente.

EJEMPLO 5 Determinación de los puntos de intersección

Hallar los puntos de intersección de las gráficas de $x^2 - y = 3$ y $x - y = 1$.

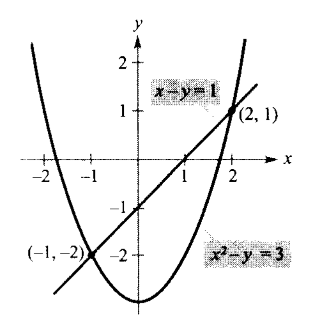
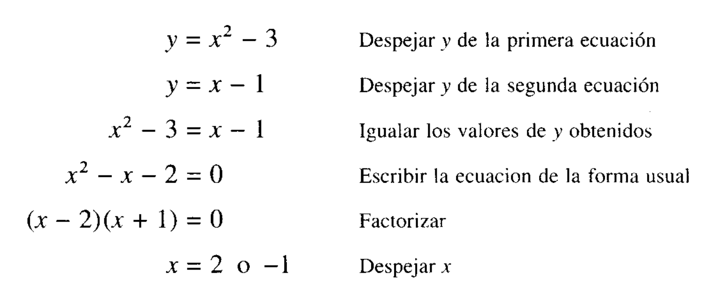


FIGURA P.10
Dos puntos de intersección.

Solución: Sirve de ayuda comenzar por representar las gráficas de ambas ecuaciones en el *mismo* sistema de coordenadas rectangulares (véase Figura P.10). Hecho esto, se ve que las gráficas poseen dos puntos de intersección. Para determinarlos, se puede proceder como sigue.



$y = x^2 - 3$	Despejar y de la primera ecuación
$y = x - 1$	Despejar y de la segunda ecuación
$x^2 - 3 = x - 1$	Igualar los valores de y obtenidos
$x^2 - x - 2 = 0$	Escribir la ecuacion de la forma usual
$(x - 2)(x + 1) = 0$	Factorizar
$x = 2$ o -1	Despejar x

Los correspondientes valores de y se obtienen sustituyendo $x = 2$ y $x = -1$ en cualquiera de las ecuaciones originales. Resultan así los dos puntos de intersección:

$$(2, 1) \quad \text{y} \quad (-1, -2) \qquad \text{Puntos de intersección}$$

Puede verificar estos puntos sustituyendo en *ambas* ecuaciones originales o utilizando la función *trace* de una calculadora gráfica. □

Modelos matemáticos

En las aplicaciones de las Matemáticas a la vida real se usan frecuentemente ecuaciones como modelos matemáticos. Al desarrollar un modelo matemático para representar datos reales, uno debe esforzarse en alcanzar dos objetivos a menudo contradictorios: precisión y sencillez. Es decir, el modelo debe ser suficientemente sencillo para ser manejable, pero también suficientemente preciso para producir resultados significativos. En la Sección P.4 se tratan estos objetivos más exhaustivamente.

EJEMPLO 6 El aumento de dióxido de carbono atmosférico

Entre 1960 y 1990, el observatorio de Mauna Loa, Hawai, registró la concentración de dióxido de carbono y (en partes por millón) en la atmósfera terrestre.

La Figura P.11 recoge los registros correspondientes al mes de enero de cada año. En la Figura P.11*a* se ha ajustado un modelo lineal a los datos

$$y = 313{,}6 + 1{,}24t \qquad \text{Modelo lineal}$$

donde $t = 0$ corresponde a 1960. En la Figura P.11*b* se ha ajustado un modelo cuadrático a los datos

$$y = 316{,}2 + 0{,}70t + 0{,}018t^2 \qquad \text{Modelo cuadrático}$$

¿Qué modelo representa mejor los datos? En el número de julio de 1990 del *Scientific American* se utilizaron estos datos para predecir el nivel de dióxido de carbono en la atmósfera terrestre en el año 2035. La predicción fue de 470 partes por millón. ¿Con cuál de los dos modelos pudo efectuarse esta predicción?

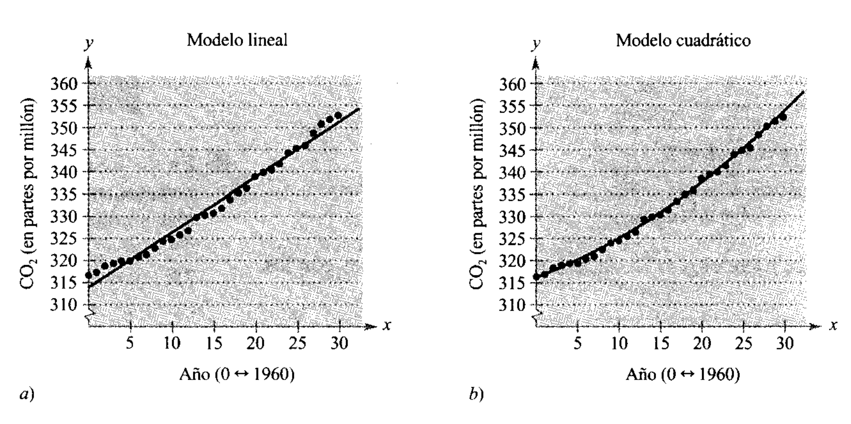


FIGURA P.11
Gráficas de modelos lineal y cuadrático.

Solución: Para responder a la primera pregunta, es necesario precisar qué significa «mejor». De acuerdo con una definición estadística que involucra los cuadrados de las diferencias entre los valores reales de y y los valores de y dados por el modelo, el modelo cuadrático es mejor, puesto que sus valores son más próximos a los valores reales. El autor del artículo del *Scientific American* compartía esta opinión. Haciendo $t = 75$ (para el año 2035) en el modelo lineal, la predicción sería

$$y = 313{,}6 + 1{,}24(75) = 406{,}6 \qquad \text{Modelo lineal}$$

Utilizando el modelo cuadrático, la predicción para el año 2035 sería

$$y = 316{,}2 + 0{,}70(75) + 0{,}018(75)^2 = 469{,}95 \qquad \text{Modelo cuadrático}$$

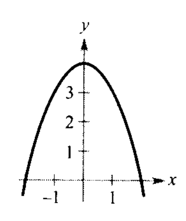
□

Nota. Los modelos del Ejemplo 6 se han elaborado usando un método denominado ajuste por mínimos cuadrados (véase la Sección 12.9). El modelo lineal tiene una correlación dada por $r^2 = 0{,}984$ y el modelo cuadrático por $r^2 = 0{,}997$. Cuanto más próximo es r^2 a 1, «mejor» es el modelo.

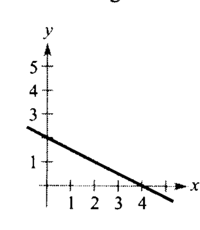
Ejercicios de la Sección P.1

En los Ejercicios 1-4, asociar a cada ecuación su gráfica.

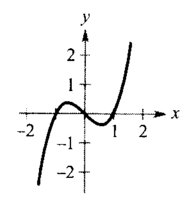
a)



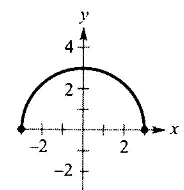
b)



c)



d)



1. $y = -\frac{1}{2}x + 2$ **2.** $y = \sqrt{9 - x^2}$

3. $y = 4 - x^2$ **4.** $y = x^3 - x$

En los Ejercicios 5-10, determinar las intersecciones con los ejes.

5. $y = x^2 + x - 2$ **6.** $y^2 = x^3 - 4x$

7. $y = x^2\sqrt{9 - x^2}$ **8.** $y = \dfrac{x^2 + 3x}{(3x + 1)^2}$

9. $x^2y - x^2 + 4y = 0$ **10.** $y = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$

En los Ejercicios 11-18, hallar las simetrías respecto a cada uno de los ejes y respecto al origen.

11. $y = x^2 - 2$ **12.** $xy - \sqrt{4 - x^2} = 0$

13. $y^2 = x^3 - 4x$ **14.** $xy^2 = -10$

15. $y = x^3 + x$ **16.** $xy = 1$

17. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ **18.** $y = x^3 + x - 3$

En los Ejercicios 19-30, dibujar la gráfica de la ecuación. Hallar las intersecciones con los ejes y determinar las simetrías.

19. $y = -3x + 2$ **20.** $y = -\frac{1}{2}x + 2$

21. $y = \frac{1}{2}x - 4$ **22.** $y = x^2 + 3$

23. $y = 1 - x^2$ **24.** $y = 2x^2 + x$

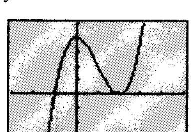
25. $y = x^2 + 2$ **26.** $y = \sqrt{9 - x^2}$

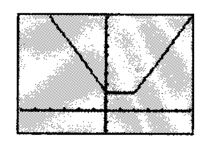
27. $y = (x + 2)^2$ **28.** $x = y^2 - 4$

29. $y = \dfrac{1}{x}$ **30.** $y = 2x^4$

En los Ejercicios 31 y 32, describir la ventana de la calculadora gráfica que presenta la figura mostrada.

31. $y = x^3 - 3x^2 + 4$ **32.** $y = |x| + |x - 10|$





En los Ejercicios 33-36, utilizar la calculadora gráfica para representar la ecuación. Encontrar las intersecciones con los ejes y comprobar las simetrías.

33. $y = -2x^2 + x + 1$ **34.** $y = x\sqrt{25 - x^2}$

35. $y = \dfrac{5}{x^2 + 1} - 1$ **36.** $x^2 + 4y^2 = 4$

En los Ejercicios 37 y 38, representar la ecuación en la calculadora. Desplazar el cursor a lo largo de la curva para calcular el valor aproximado de la coordenada desconocida del punto solución dado, con una precisión de dos cifras decimales. (*Ayuda:* Puede necesitar la función *zoom* para obtener la precisión requerida.)

37. $y = \sqrt{5 - x}$ *a)* $(2, y)$ *b)* $(x, 3)$

38. $y = x^5 - 5x$ *a)* $(-0{,}5, y)$ *b)* $(x, -4)$

En los Ejercicios 39-42, escribir una ecuación cuya gráfica posea la propiedad indicada. (Puede haber más de una respuesta correcta.)

39. La gráfica tiene intersecciones con los ejes en $x = -2$, $x = 4$ y $x = 6$.

40. La gráfica tiene intersecciones con los ejes en $x = -\frac{5}{2}$, $x = 2$ y $x = \frac{3}{2}$.

41. La gráfica es simétrica respecto al origen.

42. La gráfica es simétrica respecto al eje x.

El símbolo indica un ejercicio en el que se explica cómo usar tecnología gráfica o un sistema de álgebra computacional. La solución de otros ejercicios puede facilitarse mediante el uso de tecnología apropiada.

En los Ejercicios 43-50, encontrar los puntos de intersección de las gráficas de las dos ecuaciones, y comprobar los resultados analíticamente.

43. $x + y = 2$
$2x - y = 1$

44. $2x - 3y = 13$
$5x + 3y = 1$

45. $x + y = 7$
$3x - 2y = 11$

46. $x^2 + y^2 = 25$
$2x + y = 10$

47. $x^2 + y^2 = 5$
$x - y = 1$

48. $x^2 + y = 4$
$2x - y = 1$

49. $y = x^3$
$y = x$

50. $x = 3 - y^2$
$y = x - 1$

En los Ejercicios 51 y 52, emplear la calculadora gráfica para representar las ecuaciones y encontrar las intersecciones de las gráficas.

51. $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$
$y = -x^2 + 3x - 1$

52. $y = x^4 - 2x^2 + 1$
$y = 1 - x^2$

53. ***Punto de equilibrio*** Calcular las ventas necesarias para alcanzar el equilibrio ($R = C$) si el coste de producción C de x unidades es

$$C = 5{,}5\sqrt{x} + 10.000 \qquad \text{Ecuación del coste}$$

y los ingresos R por la venta de x unidades son

$$R = 3{,}29x \qquad \text{Ecuación de los ingresos}$$

54. ***Para pensar*** Cada una de las tablas dadas abajo recoge puntos solución de una de las siguientes ecuaciones.

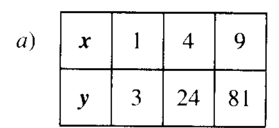
i) $y = kx + 5$

ii) $y = x^2 + k$

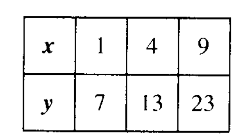
iii) $y = kx^{3/2}$

iv) $xy = k$

Asociar a cada ecuación su tabla y determinar el valor de k.

a)


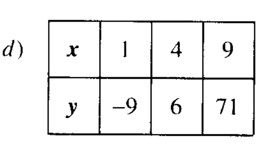
x	1	4	9
y	3	24	81

b)


x	1	4	9
y	7	13	23

c)

x	1	4	9
y	36	9	4

d)


x	1	4	9
y	−9	6	71

55. ***Un modelo matemático*** La tabla muestra el Índice de Precios al Consumo (1982-84 = 100) en una selección de varios años. *(Fuente: Bureau of Labor Statistics.)*

Año	1970	1975	1980	1985	1990	1995
IPC	38,8	53,8	82,4	107,6	130,7	148,2

a) Encontrar, con ayuda de una calculadora programada para el cálculo de regresiones, un modelo matemático de la forma

$$y = at^2 + bt + c$$

que ajuste los datos. En este modelo, y representa el IPC y t representa el año, tomando el origen $t=0$ en 1970.

b) Utilizar una calculadora para representar el modelo y comparar éste con los datos.

c) Aplicar el modelo para predecir el IPC del año 2000.

56. ***Un modelo matemático*** La siguiente tabla muestra el número medio de acres por granja en los Estados Unidos en una selección de varios años. *(Fuente: U.S. Department of Agriculture.)*

Año	1950	1960	1970	1980	1990	1994
Acres	213	297	374	426	461	478

a) Encontrar, usando regresión en la calculadora, un modelo matemático de la forma

$$y = at^2 + bt + c$$

que ajuste los datos. En este modelo, y representa extensión media en acres y t el año, tomando el origen $t = 0$ en 1950.

b) Utilizar una calculadora para representar el modelo y comparar éste con los datos.

c) Aplicar el modelo para predecir el número medio de acres por granja en los Estados Unidos en el año 2000.

57. ***Hilo de cobre*** La resistencia en ohmios de 1.000 pies de hilo de cobre a 77 °F admite el modelo matemático

$$y = \frac{10.770}{x^2} - 0{,}37, \quad 5 \leqslant x \leqslant 100$$

donde x es el diámetro en milésimas de pulgada. Representar el modelo en la calculadora. Si se duplica el diámetro del hilo, ¿en qué factor aproximado varía la resistencia?

58. *a*) Demostrar que si una gráfica es simétrica respecto al eje x y respecto al eje y, entonces es simétrica respecto al origen. Dar un ejemplo que muestre que el recíproco no es cierto.

b) Probar que si una gráfica es simétrica respecto a un eje y respecto al origen, entonces es simétrica respecto al otro eje.

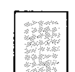
¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 59-62, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que lo es.

59. Si $(1, -2)$ es un punto de una gráfica simétrica respecto al eje x, entonces $(-1, -2)$ es también un punto de la gráfica.

60. Si $(1, -2)$ es un punto de una gráfica simétrica respecto al eje y, entonces $(-1, -2)$ es también un punto de la gráfica.

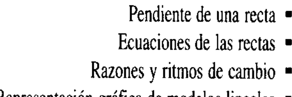
61. Si $b^2 - 4ac > 0$ y $a \neq 0$, la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ tiene dos x-intersecciones.

62. Si $b^2 - 4ac = 0$ y $a \neq 0$, la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ tiene sólo una x-intersección.



P.2 Modelos lineales y ritmos de cambio

CONTENIDO ▪



Pendiente de una recta ▪
Ecuaciones de las rectas ▪
Razones y ritmos de cambio ▪
Representación gráfica de modelos lineales ▪
Rectas paralelas y perpendiculares ▪

Pendiente de una recta

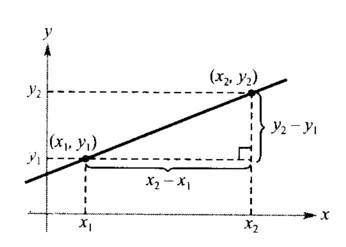
La **pendiente** de una recta no vertical mide el número de unidades que la recta asciende (o desciende) verticalmente por cada unidad de desplazamiento horizontal de izquierda a derecha. Consideremos los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de la recta de la Figura P.12. Al desplazarnos de izquierda a derecha por la recta, se produce una variación vertical de

$$\Delta y = y_2 - y_1 \qquad \text{Cambio en } y$$

unidades por cada variación horizontal de

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \text{Cambio en } x$$

unidades. (Δ es la letra griega *delta* mayúscula y Δx se lee «delta de x».)



$\Delta y = y_2 - y_1$ = cambio en y
$\Delta x = x_2 - x_1$ = cambio en x

FIGURA P.12

DEFINICIÓN DE LA PENDIENTE DE UNA RECTA

La **pendiente** m de una recta no vertical que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

SÍMBOLO DE LA PENDIENTE

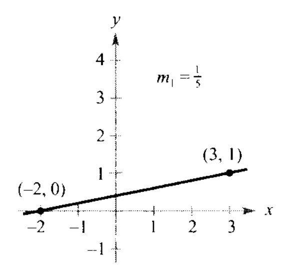
El uso de la letra m para denotar la pendiente de una recta procede del verbo francés *monter*, que significa escalar, subir, ascender.

Nota. Al aplicar la fórmula de la pendiente, obsérvese que

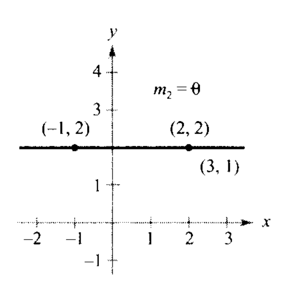
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Por tanto, no importa el orden en que se reste, siempre que se sea coherente y las dos coordenadas restadas provengan del mismo punto.

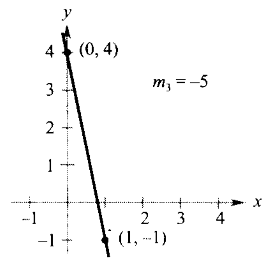
La Figura P.13 muestra cuatro rectas con pendientes: una positiva, otra nula, otra negativa y otra *indefinida*. En general, cuanto mayor sea el valor absoluto de la pendiente de una recta, mayor es su inclinación. Por ejemplo, en la Figura P.13, la recta de pendiente −5 está más inclinada que la de pendiente $\frac{1}{5}$.



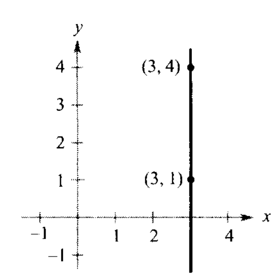
Si m es positivo, la recta sube de izquierda a derecha



Si m es cero, la recta es horizontal



Si m es negativo, la recta baja de izquierda a derecha



Si m no está definido, la recta es vertical

FIGURA P.13

Ecuaciones de las rectas

EXPLORACIÓN

Estudio de pendientes de rectas Utilice una calculadora para dibujar cada una de las siguientes ecuaciones lineales. ¿Qué punto es común a las siete rectas? ¿Qué número determina la pendiente de la recta en cada ecuación?

a) $y - 4 = -2(x + 1)$
b) $y - 4 = -1(x + 1)$
c) $y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 1)$
d) $y - 4 = 0(x + 1)$
e) $y - 4 = \frac{1}{2}(x + 1)$
f) $y - 4 = 1(x + 1)$
g) $y - 4 = 2(x + 1)$

Para calcular la pendiente de una recta pueden utilizarse dos *cualesquiera* de sus puntos. Esto puede verificarse con ayuda de los triángulos semejantes de la Figura P.14. (Recuérdese que los cocientes de los lados correspondientes de dos triángulos semejantes son todos iguales.)

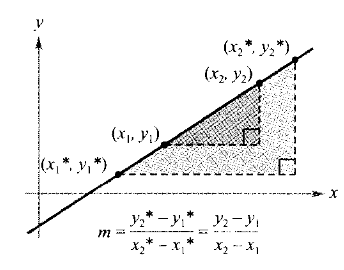


FIGURA P.14
Cualquier par de puntos de una recta determina su pendiente.

Se puede escribir una ecuación de una recta dada si se conocen su pendiente y las coordenadas de uno de sus puntos. Supongamos que la pendiente es m y el punto es (x_1, y_1). Si (x, y) denota cualquier otro punto de la recta, entonces

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Esta ecuación, que involucra las dos variables x e y, se puede escribir de la forma $y - y_1 = m(x - x_1)$, conocida como **ecuación punto-pendiente de una recta**.

ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE DE UNA RECTA **Una ecuación de la recta de pendiente m que pasa por el punto (x_1, y_1) viene dada por**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EJEMPLO 1 Determinación de una ecuación para una recta

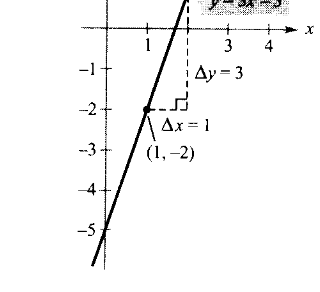


FIGURA P.15
La recta de pendiente 3 que pasa por el punto (1, −2).

Hallar una ecuación para la recta de pendiente 3 que pasa por el punto (1, −2).

Solución:

$y - y_1 = m(x - x_1)$	Forma punto-pendiente
$y - (-2) = 3(x - 1)$	Sustituir y_1 por −2, x_1 por 1 y m por 3
$y + 2 = 3x - 3$	Simplificar
$y = 3x - 5$	Despejar y

(Véase Figura P.15.) □

Nota. Recuérdese que la pendiente puede usarse sólo para describir una recta no vertical. Así pues, las rectas verticales no pueden expresarse mediante ecuaciones punto-pendiente. Por ejemplo, la ecuación de la recta vertical que pasa por el punto (1, −2) es $x = 1$.

Razones y ritmos de cambio

La pendiente de una recta puede interpretarse bien como una *razón* o *proporción* o bien como una *tasa* o *ritmo* de variación. Si los ejes x e y tienen la misma unidad de medida, la pendiente no tiene dimensión y es una **razón** o **proporción**. Si los ejes x e y tienen distintas unidades de medida, la pendiente es una **tasa** o **ritmo de cambio**. Al estudiar Cálculo, encontrará aplicaciones relativas a ambas interpretaciones de la pendiente.

EJEMPLO 2 Crecimiento de poblaciones y diseño técnico

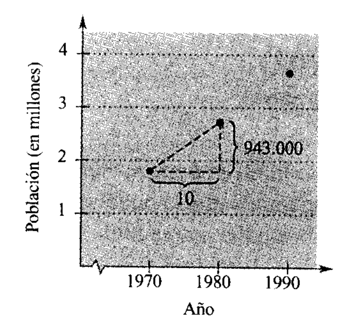
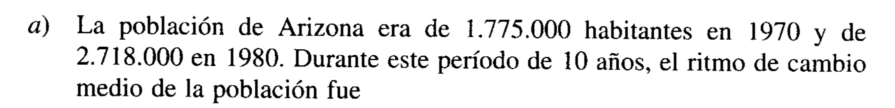


FIGURA P.16
Población de Arizona en el censo.



a) La población de Arizona era de 1.775.000 habitantes en 1970 y de 2.718.000 en 1980. Durante este período de 10 años, el ritmo de cambio medio de la población fue

$$\text{Ritmo de cambio} = \frac{\text{cambio en población}}{\text{cambio en años}} = \frac{2.718.000 - 1.775.000}{1980 - 1970} = 94.300 \text{ personas por año}$$

Si la población de Arizona hubiese continuado creciendo a este ritmo en los siguientes 10 años, en 1990 habría sido de 3.661.000. Sin embargo, en el censo de 1990 se determinó una población de 3.665.000, de modo que el ritmo de cambio de la población entre 1980 y 1990 fue ligeramente superior que en la década precedente (véase Figura P.16).

b) En un torneo de saltos de esquí acuático, la rampa se eleva hasta una altura de 6 pies sobre una balsa de 21 pies de largo, como se ilustra en la Figura P.17. La pendiente de la rampa de esquí es el cociente entre su altura (avance vertical) y la longitud de su base (avance horizontal).

$$\text{Pendiente de la rampa} = \frac{\text{avance vertical}}{\text{avance horizontal}} = \frac{6 \text{ pies}}{21 \text{ pies}} = \frac{2}{7}$$

Obsérvese que, en este caso, la pendiente es una proporción y se expresa sin unidades.

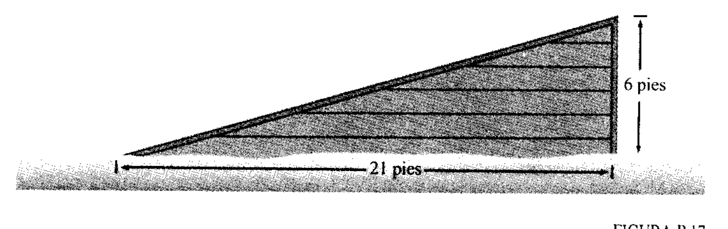


FIGURA P.17
Dimensiones de una rampa de esquí acuático. □

Nota. El ritmo de cambio calculado en el Ejemplo 2*a* es un **ritmo de cambio medio**. Un ritmo de cambio medio siempre se calcula sobre un intervalo, en este caso [1970, 1980]. En el Capítulo 2 estudiará otro tipo de ritmo de cambio, el *ritmo de cambio instantáneo*.

Representación gráfica de modelos lineales

Muchos de los problemas de geometría analítica pueden clasificarse en dos categorías básicas: 1) Dada una gráfica, ¿cuál es su ecuación?, y 2) Dada una ecuación, ¿cuál es su gráfica? La ecuación punto pendiente de una recta puede emplearse para resolver ciertos problemas de la primera categoría. No obstante, esta forma no resulta especialmente útil para resolver problemas de la segunda categoría. La forma que mejor se adapta al trazado de la gráfica de una recta es la ecuación **pendiente-intersección** de una recta.

ECUACIÓN PENDIENTE-INTERSECCIÓN DE UNA RECTA

La gráfica de la ecuación lineal

$$y = mx + b$$

es una recta que tiene pendiente m y una y-intersección en $(0, b)$.

EJEMPLO 3 *Trazado de rectas en el plano*

Dibujar la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $y = 2x + 1$ *b*) $y = 2$ *c*) $3y + x - 6 = 0$

Solución:

a) Puesto que $b = 1$, la y-intersección es $(0, 1)$. Como la pendiente es $m = 2$, sabemos que la recta asciende dos unidades por cada unidad de desplazamiento hacia la derecha, como se muestra en la Figura P.18*a*.

b) Dado que $b = 2$, la y-intersección es $(0, 2)$. Como la pendiente es $m = 0$, sabemos es horizontal, como se ilustra en la Figura P.18*b*.

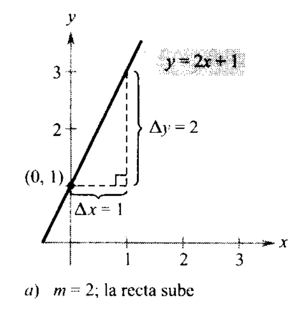
c) Comencemos por escribir la ecuación en forma punto-intersección.

$$3y + x - 6 = 0 \qquad \text{Ecuación original}$$

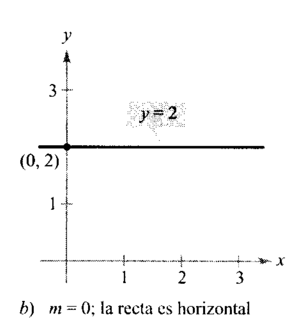
$$3y = -x + 6 \qquad \text{Aislar el término en } y \text{ a la izquierda}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 2 \qquad \text{Forma pendiente-intersección}$$

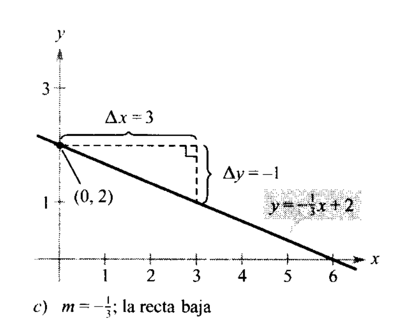
De esta forma, puede verse que la y-intersección es $(0, 2)$ y la pendiente $m = -\frac{1}{3}\cdot$ Esto quiere decir que la recta desciende una unidad por cada tres unidades de desplazamiento hacia la derecha, como se muestra en la Figura P.18*c*.



a) $m = 2$; la recta sube



b) $m = 0$; la recta es horizontal



c) $m = -\frac{1}{3}$; la recta baja

FIGURA P.18

□

Dado que la pendiente de una recta vertical no está definida, su ecuación no puede llevarse a forma pendiente-intersección. Sin embargo, la ecuación de *cualquier* recta puede escribirse en la **forma general**

$$Ax + By + C = 0 \qquad \text{Forma general de la ecuación de una recta}$$

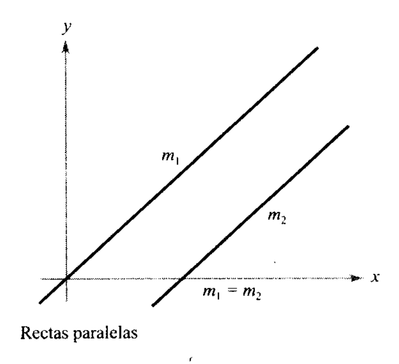
donde A y B no son *ambos* nulos. Por ejemplo, la recta vertical dada por $x = a$ puede representarse por la ecuación general $x - a = 0$.

Resumen de ecuaciones de las rectas

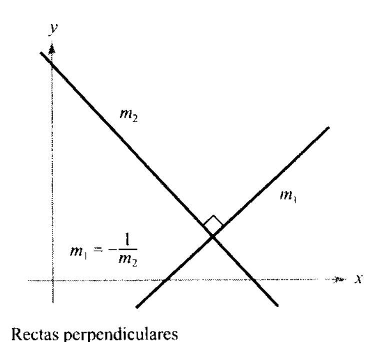
1. **Forma general:** $Ax + By + C = 0$
2. **Recta vertical:** $x = a$
3. **Recta horizontal:** $y = b$
4. **Forma punto-pendiente:** $y - y_1 = m(x - x_1)$
5. **Forma pendiente-intersección:** $y = mx + b$

Rectas paralelas y perpendiculares

La pendiente de una recta es una herramienta adecuada para determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares (véase Figura P.19). Concretamente, dos rectas no verticales con la misma pendiente son paralelas, y dos rectas no verticales cuyas pendientes son una opuesta de la inversa de la otra son perpendiculares.



Rectas paralelas



Rectas perpendiculares

FIGURA P.19

ADVERTENCIA
En Matemáticas, la expresión «si y sólo si» es una manera de establecer dos implicaciones en una misma afirmación. Por ejemplo, la primera afirmación de la derecha equivale a las dos implicaciones siguientes:

a) Si dos rectas no verticales distintas son paralelas, entonces sus pendientes son iguales.
b) Si dos rectas no verticales distintas tienen pendientes iguales, entonces son paralelas.

RECTAS PARALELAS Y RECTAS PERPENDICULARES

1. **Dos rectas no verticales distintas son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales, es decir, si y sólo si $m_1 = m_2$.**
2. **Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son una opuesta de la inversa de la otra, es decir, si y sólo si**

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

EJEMPLO 4 Rectas paralelas y perpendiculares

Hallar las ecuaciones generales de las rectas que pasan por el punto $(2, -1)$ y son

a) paralela a la recta $2x - 3y = 5$ *b*) perpendicular a la recta $2x - 3y = 5$

como se muestra en la Figura P.20.

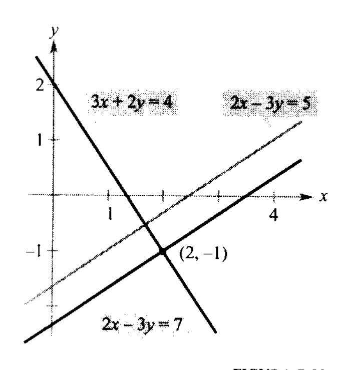


FIGURA P.20
Rectas paralela y perpendicular a $2x - 3y = 5$.

Solución: Escribiendo la ecuación lineal $2x - 3y = 5$ en forma punto-pendiente, $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$, vemos que la recta dada tiene pendiente $m = \frac{2}{3}$.

a) La recta por $(2, -1)$ paralela a la dada tiene también pendiente $\frac{2}{3}$.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{Forma punto-pendiente}$$
$$y - (-1) = \frac{2}{3}(x - 2) \qquad \text{Sustituir}$$
$$3(y + 1) = 2(x - 2) \qquad \text{Simplificar}$$
$$2x - 3y - 7 = 0 \qquad \text{Forma general}$$

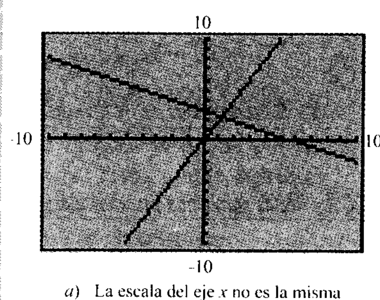
Obsérvese la similitud con la ecuación original.

b) Calculando el opuesto del inverso de la pendiente de la recta dada, se puede determinar que la pendiente de cada recta perpendicular a la inicial es $-\frac{3}{2}$. Por tanto, la recta por el punto $(2, -1)$ perpendicular a la dada tiene la siguiente ecuación.

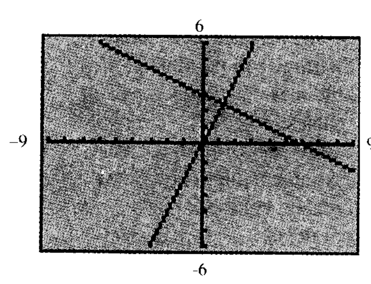
$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{Forma punto-pendiente}$$
$$y - (-1) = -\frac{3}{2}(x - 2) \qquad \text{Sustituir}$$
$$2(y + 1) = -3(x - 2) \qquad \text{Simplificar}$$
$$3x + 2y - 4 = 0 \qquad \text{Forma general}$$

□

La pendiente aparente de una recta sufre distorsión si se utilizan diferentes escalas en los ejes x e y. Por ejemplo, las dos pantallas de calculadora gráfica de las Figuras P.21*a* y P.21*b* muestran las rectas dadas por $y = 2x$ e $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Puesto que las pendientes de estas rectas son una opuesta de la inversa de la otra, las rectas son perpendiculares. Sin embargo, en la Figura P.21*a* no aparentan serlo, debido a que la escala del eje x no coincide con la del eje y.



a) La escala del eje x no es la misma que la del eje y



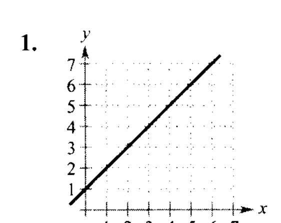
a) La escala del eje x es la misma que la del eje y

FIGURA P.21

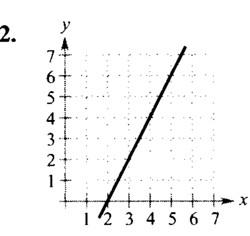
Ejercicios de la Sección P.2

En los Ejercicios 1-6, estimar la pendiente de la recta a partir de su gráfica.

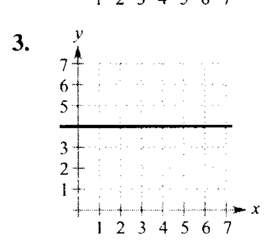
1.



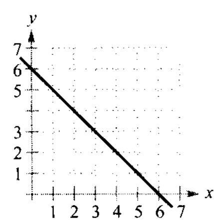
2.



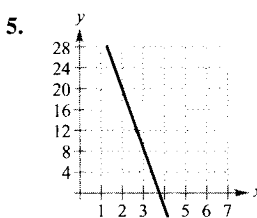
3.



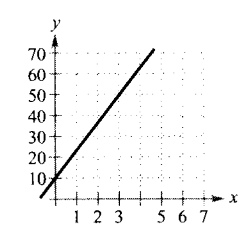
4.



5.



6.



En los Ejercicios 7 y 8 dibujar las rectas que pasan por el punto dado con la pendiente indicada. Hacer los dibujos en un mismo sistema de coordenadas.

	Punto	*Pendientes*			
7.	(2, 3)	*a*) 0	*b*) 1	*c*) −2	*d*) Indefinido
8.	(−4, 1)	*a*) 3	*b*) −3	*c*) $\frac{1}{3}$	*d*) 0

En los Ejercicios 9-12, dibujar el par de puntos y calcular la pendiente de la recta que pasa por ellos.

9. (3, −4), (5, 2) **10.** (2, 1), (2, 5)

11. (1, 2), (−2, 4) **12.** $(\frac{7}{8}, \frac{3}{4}), (\frac{5}{4}, -\frac{1}{4})$

En los Ejercicios 13-16, utilizar el punto de la recta y la pendiente para determinar otros tres puntos por los que pase la recta. (Hay más de una respuesta correcta.)

	Punto	*Pendiente*		*Punto*	*Pendiente*
13.	(2, 1)	$m = 0$	**14.**	(−3, 4)	m indefinido
15.	(1, 7)	$m = -3$	**16.**	(−2, −2)	$m = 2$

17. ***Un modelo matemático*** La siguiente tabla proporciona los dividendos por acción ordinaria de General Mills durante los años 1987 a 1994. El tiempo en años se representa por t, correspondiendo $t = 0$ a 1990, y los dividendos se representan por y. *(Fuente: General Mills 1994 Annual Report.)*

t	−3	−2	−1	0
y	$1,25	$1,63	$2,53	$2,32

t	1	2	3	4
y	$2,87	$2,99	$3,10	$2,95

a) Representar a mano los datos y unir mediante segmentos los puntos adyacentes.

b) Usar la pendiente para determinar los años en los que los dividendos decrecieron y crecieron más rápidamente.

18. ***Diseño de una cinta transportadora*** Se quiere construir una cinta transportadora que ascienda 1 metro por cada tres de avance horizontal.

a) Calcular la pendiente de la cinta transportadora.

b) Supongamos que la cinta se instala entre dos pisos de una fábrica. Hallar su longitud sabiendo que la distancia vertical entre pisos es de 10 pies.

19. ***Redacción*** Explicar en unas líneas si es o no posible utilizar dos puntos cualesquiera de una recta para determinar su pendiente.

20. ***Ritmo de cambio*** Cada uno de los siguientes datos es la pendiente de una recta que representa los ingresos diarios y, en términos del tiempo en días x. Utilizar la pendiente para interpretar la variación en los ingresos correspondiente a un incremento de tiempo de 1 día.

a) $m = 400$ *b*) $m = 100$ *c*) $m = 0$

En los Ejercicios 21-24, hallar la pendiente y la y-intersección (si es posible) de la recta.

21. $x - 5y = 20$ **22.** $6x - 5y = 15$

23. $x = 4$ **24.** $y = -1$

En los Ejercicios 25-30, encontrar una ecuación de la recta que pasa por los dos puntos y dibujar la recta.

25. (2, 1), (0, −3) **26.** (−3, −4), (1, 4)

27. (0, 0), (−1, 3) **28.** (−3, 6), (1, 2)

29. (1, −2), (3, −2) **30.** $(\frac{7}{8}, \frac{3}{4}), (\frac{5}{4}, -\frac{1}{4})$

En los Ejercicios 31-36, encontrar una ecuación de la recta que pasa por el punto dado y tiene la pendiente indicada. Dibujar la recta.

	Punto	*Pendiente*		*Punto*	*Pendiente*
31.	(0, 3)	$m = \frac{3}{4}$	**32.**	(−1, 2)	m indefinido
33.	(0, 0)	$m = \frac{2}{3}$	**34.**	(−2, 4)	$m = -\frac{3}{5}$
35.	(0, 2)	$m = 4$	**36.**	(0, 4)	$m = 0$

37. Determinar una ecuación de la recta vertical con x-intersección en 3.

38. Probar que la recta de intersecciones con los ejes $(a, 0)$ y $(0, b)$ admite la siguiente ecuación.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad a \neq 0, b \neq 0$$

En los Ejercicios 39-42, usar el resultado del Ejercicio 38 para escribir una ecuación de la recta.

39. x-intersección: (2, 0)
y-intersección: (0, 3)

40. x-intersección: $(-\frac{2}{3}, 0)$
y-intersección: (0, −2)

41. Punto de la recta: (1, 2)
x-intersección: $(a, 0)$
y-intersección: $(0, a)$
$(a \neq 0)$

42. Punto de la recta: (−3, 4)
x-intersección: $(a, 0)$
y-intersección: $(0, a)$
$(a \neq 0)$

En los Ejercicios 43-48, escribir una ecuación de la recta que pasa por el punto y es *a*) paralela a la recta dada y *b*) perpendicular a la recta dada.

	Punto	*Pendiente*
43.	(2, 1)	$4x - 2y = 3$
44.	(−3, 2)	$x + y = 7$
45.	$(\frac{7}{8}, \frac{3}{4})$	$5x + 3y = 0$
46.	(−6, 4)	$3x + 4y = 7$
47.	(2, 5)	$x = 4$
48.	(−1, 0)	$y = -3$

En los Ejercicios 49-54, esbozar una gráfica de la ecuación.

49. $y = -3$ **50.** $x = 4$

51. $2x - y - 3 = 0$ **52.** $x + 2y + 6 = 0$

53. $y = -2x + 1$ **54.** $y - 1 = 3(x + 4)$

Redacción En los Ejercicios 55 y 56, representar en la calculadora la ecuación en cada una de las ventanas indicadas. Describir la diferencia entre ambas imágenes.

55. $y = 0{,}5x - 3$

Xmin = −5	Xmin = −2
Xmax = 10	Xmax = 10
Xscl = 1	Xscl = 1
Ymin = −1	Ymin = −4
Ymax = 10	Ymax = 1
Yscl = 1	Yscl = 1

56. $y = -8x + 5$

Xmin = −2	Xmin = −5
Xmax = 2	Xmax = 10
Xscl = 1	Xscl = 1
Ymin = −5	Ymin = −80
Ymax = 5	Ymax = 80
Yscl = 1	Yscl = 20

Ritmo de cambio En los Ejercicios 57-60, se dan el valor en dólares de un producto en 1998 y el ritmo al que se espera que varíe su valor durante los próximos 5 años. Utilizar esta información para escribir una ecuación lineal que proporcione el valor en dólares V del producto en términos del año t. (Represéntese 1998 por $t = 8$.)

	Valor 1998	*Ritmo*
57.	\$2.540	\$125 crecimiento anual
58.	\$156	\$4,50 crecimiento anual
59.	\$20.400	\$2.000 decrecimiento anual
60.	\$245.000	\$5.600 decrecimiento anual

En los Ejercicios 61 y 62, usar la calculadora para representar las parábolas y hallar sus puntos de intersección. Encontrar una ecuación de la recta que pasa por los puntos de intersección y dibujar su gráfica en la misma ventana de representación.

61. $y = x^2$
$y = 4x - x^2$

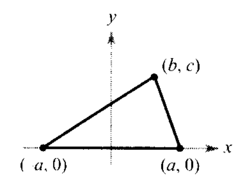
62. $y = x^2 - 4x + 3$
$y = -x^2 + 2x + 3$

En los Ejercicios 63 y 64, determinar si los puntos son colineales. (Se dice que tres puntos son *colineales* si pertenecen a una misma recta.)

63. (−2, 1), (−1, 0), (2, −2)

64. (0, 4), (7, −6), (−5, 11)

Los Ejercicios 65-68 se refieren al triángulo de la figura.



65. Hallar el punto de intersección de las mediatrices de los lados.

66. Hallar el punto de intersección de las medianas.

67. Hallar el punto de intersección de las alturas.

68. Probar que los puntos de intersección de los Ejercicios 65, 66 y 67 son colineales.

69. ***Conversión de temperaturas*** Hallar la ecuación lineal que expresa la relación entre la temperatura en grados Celsius C y la temperatura en grados Fahrenheit F. Usar el hecho de que el agua se congela a 0 °C (32 °F) y hierve a 100 °C (212 °F) para escribir 72 °F en grados Celsius.

70. ***Gastos reembolsados*** Una compañía reembolsa a sus representantes de ventas $150 diarios por alojamiento y comidas más 30¢ por milla recorrida. Escribir una relación lineal que exprese el coste diario C para la compañía en términos de x, el número de millas recorridas.

71. ***Elección profesional*** Un empleado dispone de dos opciones a puestos en una gran corporación. En un puesto le pagan $12,50 por hora *más* un suplemento de $0,75 por unidad producida. En el otro, $9,20 por hora *más* un suplemento de $1,30.

a) Encontrar relaciones lineales que expresen los salarios por hora W en términos de x, el número de unidades producidas por hora, para cada una de las opciones.

b) Representar con una calculadora gráfica las ecuaciones lineales y hallar el punto de intersección.

c) Interpretar el significado del punto de intersección de las gráficas del apartado *b*). ¿Cómo usaría esta información para seleccionar la opción correcta si su objetivo fuera obtener el mayor sueldo por hora?

72. ***Depreciación lineal*** Un pequeño negocio adquiere un equipo por $875. Transcurridos 5 años el equipo estará obsoleto, carente de valor.

a) Escribir una relación lineal que proporcione el valor y del equipo en términos del tiempo x, $0 \leqslant x \leqslant 5$.

b) Representar la ecuación con una calculadora gráfica.

c) Usar la función *trace* para estimar (con una precisión de dos cifras decimales) el valor del equipo cuando $x = 2$.

d) Usar la función *trace* para estimar (con una precisión de dos cifras decimales) el momento en que el valor del equipo es $200.

73. ***Alquiler de apartamentos*** Una agencia inmobiliaria maneja un complejo de 50 apartamentos. Cuando el alquiler es de $580 mensuales, los 50 apartamentos están ocupados. Sin embargo, cuando el alquiler es de $625, el número medio de apartamentos ocupados desciende a 47. Supongamos que la relación entre el alquiler mensual y la demanda x es lineal. (*Nota:* Aquí usamos el término *demanda* para referirnos al número de apartamentos ocupados.)

a) Escribir una ecuación lineal que proporcione la demanda x en términos del alquiler p.

b) *Extrapolación lineal* Con ayuda de una calculadora, representar la ecuación de la demanda y usar la función *trace* para predecir el número de apartamentos ocupados si se sube el alquiler a $655.

c) *Interpolación lineal* Predecir el número de apartamentos ocupados si se baja el alquiler a $595. Verificar el resultado gráficamente.

74. ***Un modelo matemático*** Un profesor reparte cuestionarios de 20 puntos y exámenes de 100 puntos a lo largo de un curso de Matemáticas. Las calificaciones medias de seis estudiantes, dadas como pares ordenados (x, y) donde x es la calificación media en las cuestiones e y la calificación media en los exámenes, son (18, 87), (10, 55), (19, 96), (16, 79), (13, 76) y (15, 82).

a) Empleando una calculadora programada para el cálculo de regresiones, hallar la recta de regresión por mínimos cuadrados para los datos.

b) Usando una calculadora gráfica, representar los puntos y la recta de regresión en una misma ventana.

c) Utilizar la recta de regresión para predecir la calificación media en los exámenes de un estudiante cuya calificación media en las cuestiones es 17.

d) Interpretar el significado de la pendiente de la recta de regresión.

e) Si el profesor añadiera 4 puntos a la calificación media en los exámenes de cada alumno de la clase, describir el cambio de posición de los puntos trazados y la modificación de la ecuación de la recta.

Distancia En los Ejercicios 75-80, calcular la distancia entre el punto y la recta o entre las rectas, utilizando la siguiente fórmula para la distancia entre el punto (x_1, y_1) y la recta $Ax + By + C = 0$.

$$\text{Distancia} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

75. Punto: $(0, 0)$
Recta: $4x + 3y = 10$

76. Punto: $(2, 3)$
Recta: $4x + 3y = 10$

77. Punto: $(-2, 1)$
Recta: $x - y - 2 = 0$

78. Punto: $(6, 2)$
Recta: $x = -1$

79. Punto: $x + y = 1$
Recta: $x + y = 5$

80. Punto: $3x - 4y = 1$
Recta: $3x - 4y = 10$

81. Demostrar que la distancia entre el punto (x_1, y_1) y la recta $Ax + By + C = 0$ es

$$\text{Distancia} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

82. Expresar la distancia d entre el punto $(3, 1)$ y la recta $y = mx + 4$ en términos de m. Emplear una calculadora gráfica para representar la ecuación. ¿Cuándo es 0 la distancia? Explicar geométricamente el resultado.

83. Demostrar que las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente.

84. Demostrar que la figura que se obtiene uniendo los puntos medios de los lados consecutivos de cualquier cuadrilátero es un paralelogramo.

85. Probar que si los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen a la misma recta que (x_1^*, y_1^*) y (x_2^*, y_2^*), entonces

$$\frac{y_2^* - y_1^*}{x_2^* - x_1^*} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

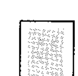
Supóngase que $x_1 \neq x_2$ y $x_1^* \neq x_2^*$.

86. Demostrar que si las pendientes de dos rectas son una opuesta de la inversa de la otra, entonces las rectas son perpendiculares.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 87 y 88, determinar si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar por qué o dar un ejemplo que pruebe su falsedad.

87. Las rectas de ecuaciones $ax + by = c_1$ y $bx - ay = c_2$ son perpendiculares. Supóngase que $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

88. Dos rectas con pendientes positivas pueden ser perpendiculares entre sí.



P.3 Funciones y sus gráficas

CONTENIDO ▪
Funciones y notación de funciones ▪
Dominio y recorrido de una función ▪
Gráfica de una función ▪
Transformaciones de funciones ▪
Clasificaciones y combinaciones de funciones ▪

Funciones y notación de funciones

Una **relación** entre dos conjuntos X e Y es un conjunto de pares ordenados, cada uno de la forma (x, y) donde x es un elemento de X e y, uno de Y. Una **función** de X a Y es una relación entre X e Y con la propiedad de que si dos pares ordenados tienen el mismo valor de x, entonces también tienen el mismo valor de y. La variable x se denomina **variable independiente**, mientras que la variable y se denomina **variable dependiente**.

Muchas situaciones de la vida real pueden describirse mediante funciones. Por ejemplo, el área A de un círculo es una función de su radio r.

$$A = \pi r^2 \qquad A \text{ es una función de } r$$

En este caso, r es la variable independiente y A, la variable dependiente.

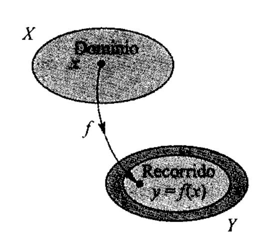


FIGURA P.22
Una función real de una variable real.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN REAL DE UNA VARIABLE REAL

Sean X e Y dos conjuntos de números reales. Una **función real f de una variable real x** de X a Y es una correspondencia que asigna a cada número x de X exactamente un número y de Y.

El conjunto X se llama **dominio** de f. El número y se denomina la **imagen** de x por f y se denota por $f(x)$. El **recorrido** de f se define como el subconjunto de Y formado por todas las imágenes de los números de X (véase Figura P.22).

Las funciones pueden especificarse de muchas formas. No obstante, en este texto nos concentraremos fundamentalmente en funciones dadas por ecuaciones que involucran las variables dependiente e independiente. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + 2y = 1 \qquad \text{Ecuación en forma implícita}$$

define y, la variable dependiente, como función de x, la variable independiente. Para **evaluar** esta función (esto es, para hallar el valor de y correspondiente a un valor de x dado) resulta conveniente despejar y.

$$y = \frac{1}{2}(1 - x^2) \qquad \text{Ecuación en forma explícita}$$

Denotando por f la función, se puede escribir esta ecuación como

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2) \qquad \text{Notación de funciones}$$

NOTACIÓN DE FUNCIONES

Gottfried Wilhelm Leibniz fue el primero que utilizó la palabra función, en 1694, para denotar cualquier cantidad relacionada con una curva, como las coordenadas de uno de sus puntos o su pendiente. Cuarenta años más tarde, Leonhard Euler empleó la palabra función para describir cualquier expresión construida con una variable y varias constantes. Fue él quien introdujo la notación $y = f(x)$.

La ecuación original $x^2 + 2y = 1$ define implícitamente y como función de x. Cuando despejamos y, estamos escribiendo la ecuación en forma explícita.

La notación de funciones tiene la ventaja de que permite identificar claramente la variable dependiente como $f(x)$, informándonos al mismo tiempo de que la variable independiente es x y de que la propia función se denota por «f». El símbolo $f(x)$ se lee «f de x». La notación de funciones permite ahorrar palabras. En lugar de preguntar «¿cuál es el valor de y que corresponde a $x = 3$?» se puede preguntar «¿cuánto vale $f(3)$?»

En la ecuación que define una función, el papel de la variable x es simplemente el de un hueco a llenar. Por ejemplo, la función dada por

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

puede describirse como

$$f(\quad) = 2(\quad)^2 - 4(\quad) + 1$$

donde se usan paréntesis en lugar de x. Para evaluar $f(-2)$, basta colocar -2 entre cada par de paréntesis.

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2(-2)^2 - 4(-2) + 1 && \text{Sustituir } x \text{ por } -2 \\ &= 2(4) + 8 + 1 && \text{Simplificar} \\ &= 17 && \text{Simplificar} \end{aligned}$$

Nota. Aunque es frecuente usar f como símbolo conveniente para denotar una función y x para la variable independiente, se pueden utilizar otros símbolos. A modo de ejemplo, las siguientes ecuaciones definen todas la misma función.

$f(x) = x^2 - 4x + 7$ El nombre de la función es f, el de la variable independiente es x

$f(t) = t^2 - 4t + 7$ El nombre de la función es f, el de la variable independiente es t

$g(s) = s^2 - 4s + 7$ El nombre de la función es g, el de la variable independiente es s

EJEMPLO 1 Evaluando una función

Para la función f definida por $f(x) = x^2 + 7$, calcular:

a) $f(3a)$ *b*) $f(b-1)$ *c*) $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \neq 0$

Solución:

a) $f(3a) = (3a)^2 + 7$ Sustituir x por $3a$

$= 9a^2 + 7$ Simplificar

b) $f(b - 1) = (b - 1)^2 + 7$ Sustituir x por $b - 1$

$= b^2 - 2b + 1 + 7$ Desarrollar el binomio

$= b^2 - 2b + 8$ Simplificar

c)
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{[(x+\Delta x)^2+7]-(x^2+7)}{\Delta x}$$
$$= \frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+7-x^2-7}{\Delta x}$$
$$= \frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$= \frac{\cancel{\Delta x}(2x+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$
$$= 2x + \Delta x, \quad \Delta x \neq 0$$

□

Nota. La expresión del Ejemplo 1*c* se llama *cociente de incrementos* y tiene un significado especial en el Cálculo. Hablaremos más sobre él en el Capítulo 2.

Dominio y recorrido de una función

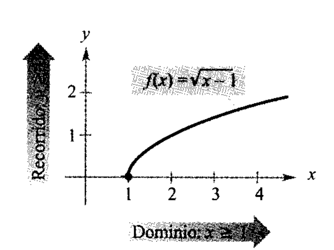
El dominio de una función puede describirse explícitamente, o bien *implícitamente* mediante la ecuación empleada para definir la función. El dominio implícito es el conjunto de todos los números reales para los que está definida la ecuación, mientras que un dominio definido explícitamente es el que se da junto con la función. Por ejemplo, la función dada por

$$f(x) = \frac{1}{x^2-4}, \quad 4 \leqslant x \leqslant 5$$

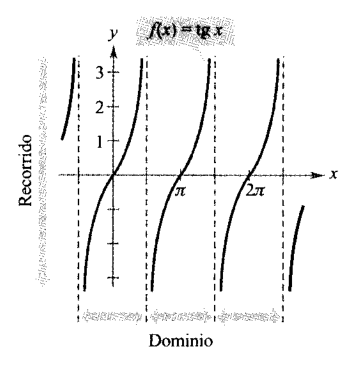
tiene un dominio definido explícitamente como $\{x\colon 4 \leqslant x \leqslant 5\}$. Por otra parte, la función

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

tiene el dominio implícito $\{x\colon x \neq \pm 2\}$.



a) El dominio de f es $[1, \infty)$ y el recorrido $[0, \infty)$



b) El dominio de f lo construyen todos los valores de x tales que $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ y el recorrido es $(-\infty, \infty)$

FIGURA P.23

EJEMPLO 2 Cálculo del dominio y el recorrido de una función

a) El dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{x - 1}$$

es el conjunto de los valores de x tales que $x - 1 \geqslant 0$, es decir el intervalo $[1, \infty)$. Para hallar el recorrido, observemos que $f(x) = \sqrt{x - 1}$ nunca es negativo. Así pues, el recorrido es el intervalo $[0, \infty)$, como se ilustra en la Figura P.23*a*.

b) El dominio de la función tangente, mostrada en la Figura P.23*b*,

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

es el conjunto de los valores de x tales que

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad \text{con } n \text{ entero.} \qquad \text{Dominio de la función tangente}$$

El recorrido de esta función es toda la recta real. Puede consultarse el apéndice para una revisión de las características de ésta y otras funciones trigonométricas. □

EJEMPLO 3 Una función definida por más de una ecuación

Determinar el dominio y el recorrido de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x - 1}, & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$



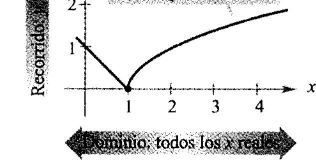


FIGURA P.24
El dominio de f es $(-\infty, \infty)$ y el recorrido es $[0, \infty)$.

Solución: Dado que f está definida para $x < 1$ o $x \geqslant 1$, su dominio es toda la recta real. En la parte del dominio donde $x \geqslant 1$, la función se comporta como en el Ejemplo 2*a*. Para $x < 1$, todos los valores de $1 - x$ son positivos. Por consiguiente, el recorrido de la función es el intervalo $[0, \infty)$. (Véase la Figura P.24.) □

Se dice que una función de X a Y es **inyectiva** si a cada valor de y perteneciente al recorrido le corresponde exactamente un valor de x del dominio. Por ejemplo, la función del Ejemplo 2*a* es inyectiva, mientras que las de los Ejemplos 2*b* y 3 no lo son. Se dice que una función es **suprayectiva** si su recorrido es todo Y.

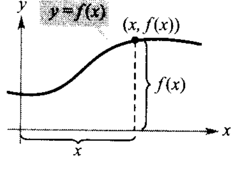


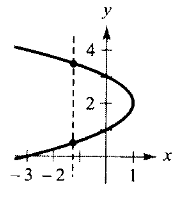
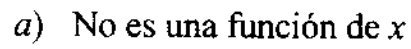
FIGURA P.25
Gráfica de una función.

Gráfica de una función

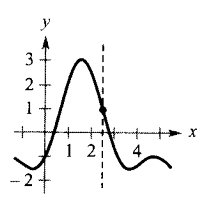
La gráfica de una función está formada por todos los puntos $(x, f(x))$, donde x pertenece al dominio de f. En la Figura P.25, puede observarse que

$$x = \text{distancia dirigida desde el eje } y$$
$$f(x) = \text{distancia dirigida desde el eje } x.$$

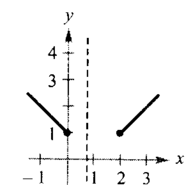
Una recta vertical puede cortar la gráfica de una función de x a lo sumo *una vez*. Esta observación proporciona un criterio visual adecuado (llamado **criterio de la recta vertical**) para funciones de x. Por ejemplo, en la Figura P.26*a*, puede verse que la gráfica no define y como función de x, ya que hay una recta vertical que corta a la gráfica dos veces, mientras que en las Figuras P.26*b* y *c* las gráficas sí definen y como función de x.

a) No es una función de x



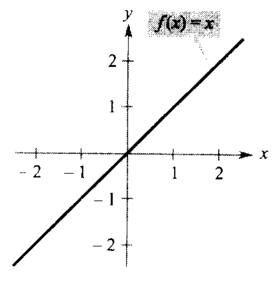
b) Una función de x



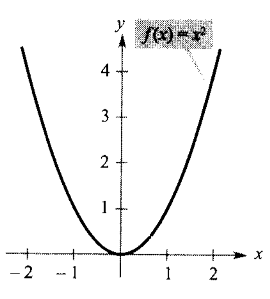
c) Una función de x

FIGURA P.26

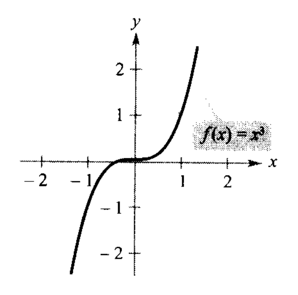
En la Figura P.27 pueden verse las gráficas de ocho funciones básicas, que uno debe conocer bien. (En el apéndice se dan las gráficas de otras cuatro funciones trigonométricas básicas.)



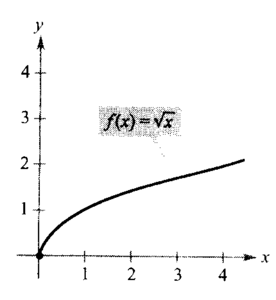
Función identidad



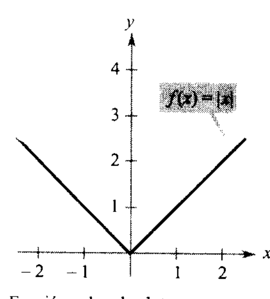
Función cuadrática



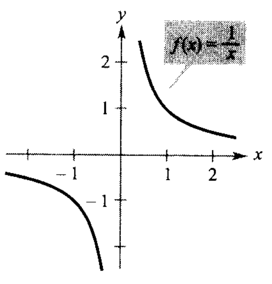
Función cúbica



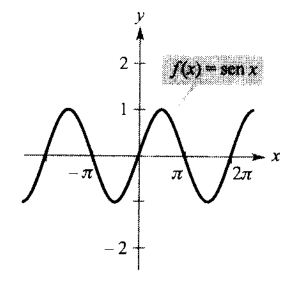
Función raíz cuadrada



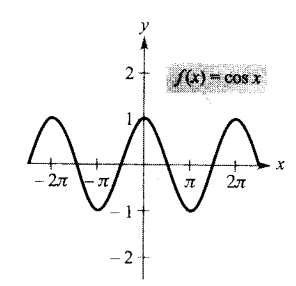
Función valor absoluto



Función racional



Función seno

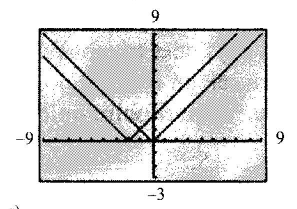


Función coseno

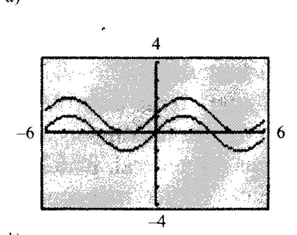
FIGURA P.27
Las gráficas de ocho funciones básicas.

EXPLORACIÓN

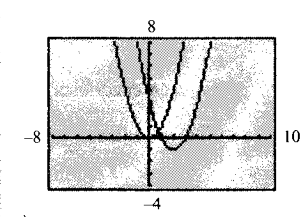
Escritura de ecuaciones de funciones Cada una de las pantallas de calculadora gráfica mostradas abajo exhibe la gráfica de una de las ocho funciones básicas de la página 28. Cada pantalla muestra también una transformación de la gráfica. Describa esta transformación y use su descripción para escribir una ecuación de la transformación.



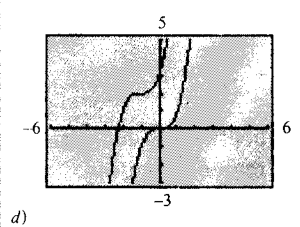
a)



b)



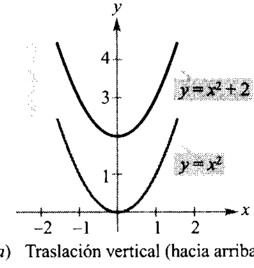
c)



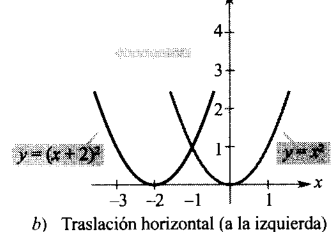
d)

Transformaciones de funciones

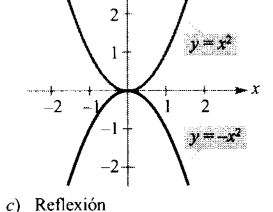
Algunas familias de gráficas tienen esencialmente la misma forma. Por ejemplo, comparemos la gráfica de $y = x^2$ con las de las otras cuatro funciones cuadráticas de la Figura P.28.



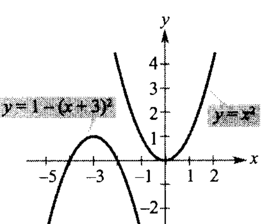
a) Traslación vertical (hacia arriba)




b) Traslación horizontal (a la izquierda)



c) Reflexión



d) Traslación a la izquierda, reflexión y traslación hacia arriba

FIGURA P.28

Cada una de las gráficas de la Figura P.28 es una **transformación** de la gráfica de $y = x^2$. Los tres tipos básicos de transformaciones ilustrados por estas gráficas son las traslaciones verticales, las traslaciones horizontales y las reflexiones. La notación de funciones resulta apta para describir transformaciones de gráficas en el plano. Así, si se considera $f(x) = x^2$ como función original en la Figura P.28, las transformaciones mostradas pueden representarse por las siguientes ecuaciones.

$y = f(x) + 2$	Traslación vertical de 2 unidades hacia arriba
$y = f(x + 2)$	Traslación horizontal de 2 unidades a la izquierda
$y = -f(x)$	Reflexión respecto al eje x
$y = -f(x + 3) + 1$	Traslación de 3 unidades a la izquierda, reflexión respecto al eje x y traslación de 1 unidad hacia arriba

TIPOS BÁSICOS DE TRANSFORMACIONES ($c > 0$)

Gráfica original:	$y = f(x)$
Traslación horizontal de c unidades a la derecha:	$y = f(x - c)$
Traslación horizontal de c unidades a la izquierda:	$y = f(x + c)$
Traslación vertical de c unidades hacia abajo:	$y = f(x) - c$
Traslación vertical de c unidades hacia arriba:	$y = f(x) + c$
Reflexión (respecto al eje x):	$y = -f(x)$
Reflexión (respecto al eje y):	$y = f(-x)$
Reflexión (respecto al origen):	$y = -f(-x)$



LEONHARD EULER (1707-1783)

Además de sus contribuciones esenciales a casi todas las ramas de las Matemáticas, Euler fue uno de los primeros en aplicar el Cálculo a problemas reales de la Física. Sus numerosas publicaciones incluyen materias como construcción de barcos, Acústica, Óptica, Astronomía, Mecánica y Magnetismo.

Clasificaciones y combinaciones de funciones

La noción moderna de función es fruto de los esfuerzos de muchos matemáticos de los siglos XVII y XVIII. Mención especial merece Leonhard Euler, a quien debemos la notación $y = f(x)$. Hacia el final del siglo XVIII, los matemáticos y científicos habían llegado a la conclusión de que un gran número de fenómenos de la vida real podían representarse mediante modelos matemáticos construidos a partir de una colección de funciones denominadas **funciones elementales**. Las funciones elementales se distribuyen en tres categorías.

1. Funciones algebraicas (polinómicas, radicales, racionales).
2. Funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, etc.).
3. Funciones exponenciales y logarítmicas.

En el apéndice puede encontrarse una revisión de las funciones trigonométricas. El resto de las funciones no algebraicas, como las funciones trigonométricas inversas y las exponenciales y logarítmicas, se introducen en el Capítulo 5.

El tipo más común de función algebraica es una **función polinómica**

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

donde el entero positivo n se llama el **grado** de la función polinómica. Los números a_i se denominan **coeficientes**, siendo a_n el **coeficiente dominante** y a_0 el **término constante**. Aunque es práctica común usar notación de subíndices para los coeficientes de las funciones polinómicas en general, para las de grados más bajos se utilizan con frecuencia las siguientes formas más sencillas.

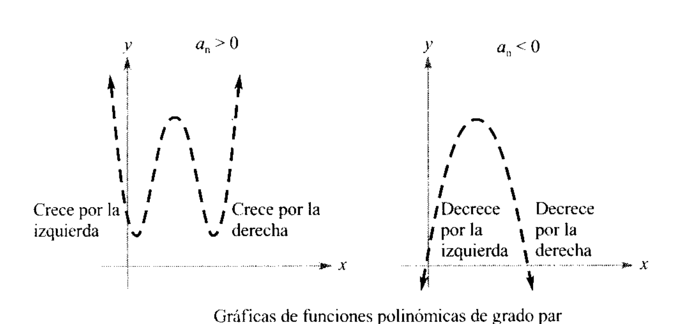
Grado cero:	$f(x) = a$	Función constante
Grado uno:	$f(x) = ax + b$	Función lineal
Grado dos:	$f(x) = ax^2 + bx + c$	Función cuadrática
Grado tres	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Función cúbica

Aunque puede presentar vaivenes, la gráfica de una función polinómica ascenderá o descenderá sin límite al variar x hacia la izquierda o hacia la derecha. Se puede determinar qué ocurre en la gráfica de

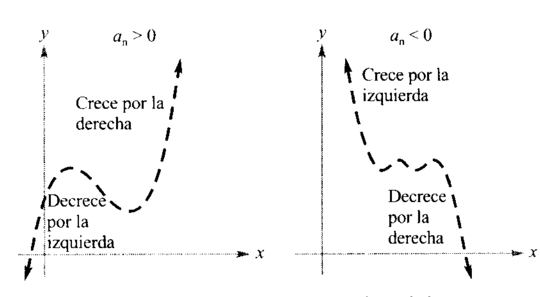
$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

a partir del grado de la función (par o impar) y del coeficiente dominante a_n, como se indica en la Figura P.29. Obsérvese que las regiones punteadas muestran que el **criterio del coeficiente dominante** sólo determina el comportamiento a la derecha y a la izquierda de la gráfica.

PARA MÁS INFORMACIÓN Puede encontrarse más información sobre la historia del concepto de función en el artículo «Evolution of the Function Concept: A Brief Survey» de Israel Kleiner en *The College Mathematics Journal*, septiembre 1989.



Gráficas de funciones polinómicas de grado par



Gráficas de funciones polinómicas de grado impar

FIGURA P.29
Criterio del coeficiente dominante para funciones polinómicas.

Del mismo modo que un número racional puede escribirse como el cociente de dos enteros, una **función racional** puede expresarse como el cociente de dos polinomios. Concretamente, una función f es racional si tiene la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad q(x) \neq 0$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios.

Las funciones polinómicas y las racionales son ejemplos de **funciones algebraicas**. Se llama función algebraica a aquella que puede expresarse mediante un número finito de sumas, diferencias, productos, cocientes y raíces conteniendo potencias x^n. Por ejemplo, $f(x) = \sqrt{x+1}$ es algebraica. Las funciones no algebraicas se denominan **trascendentes**. Por ejemplo, las funciones trigonométricas son trascendentes.

Es posible combinar dos funciones de varias formas para crear nuevas funciones. Por ejemplo, dadas $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = x^2 + 1$, se pueden construir las siguientes funciones.

$$f(x) + g(x) = (2x - 3) + (x^2 + 1) = x^2 + 2x - 2 \quad \text{Suma}$$

$$f(x) - g(x) = (2x - 3) - (x^2 + 1) = -x^2 + 2x - 4 \quad \text{Diferencia}$$

$$f(x)g(x) = (2x - 3)(x^2 + 1) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \quad \text{Producto}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-3}{x^2+1} \quad \text{Cociente}$$

Aún hay otra manera de combinar dos funciones, llamada **composición**. La función resultante recibe el nombre de **función compuesta**.

Dominio de g — $f \circ g$ — x — g — $g(x)$ — f — $f(g(x))$ — Dominio de f

FIGURA P.30
El dominio de la función compuesta $f \circ g$.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN COMPUESTA

Sean f y g dos funciones. La función dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ se llama **función compuesta** de f con g. El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los x del dominio de g tales que $g(x)$ pertenece al dominio de f (véase Figura P.30).

La función composición de f con g no suele ser igual, en general, a la de g con f.

EJEMPLO 4 Composición de funciones

Dadas $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = \cos x$, hallar: *a)* $f \circ g$ y *b)* $g \circ f$.

Solución:

a)

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$	Definición de $f \circ g$
$= 2(g(x)) - 3$	Sustituir $f(x)$
$= 2(\cos x) - 3$	Sustituir $g(x)$
$= 2 \cos x - 3$	Simplificar

b)

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$	Definición de $g \circ f$
$= \cos(f(x))$	Sustituir $g(x)$
$= \cos(2x - 3)$	Sustituir $f(x)$

Nótese que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ □

En la Sección P.1 se definió x-intersección de una gráfica como cualquier punto $(a, 0)$ en el que la gráfica corta al eje x. Si la gráfica representa una función f, el número a se denomina un **cero** de f. En otras palabras, *los ceros de una función f son las soluciones de la ecuación* $f(x) = 0$. Así, por ejemplo, la función $f(x) = x - 4$ tiene un cero en $x = 4$ porque $f(4) = 0$.

También en la Sección P.1 se discutieron diferentes tipos de simetrías. En la terminología de funciones, se dice que una función es **par** si su gráfica es simétrica respecto al eje y, y se dice que es **impar** si su gráfica es simétrica respecto al origen. Los criterios de simetría de la Sección P.1 conducen al siguiente:

CRITERIO PARA FUNCIONES PARES E IMPARES

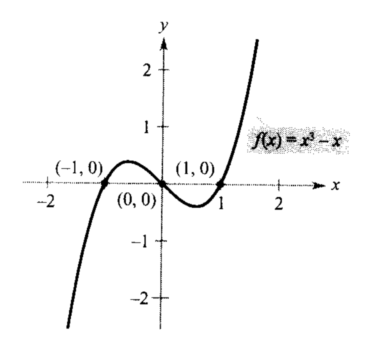
La función $y = f(x)$ es **par** si $f(-x) = f(x)$.
La función $y = f(x)$ es **impar** si $f(-x) = -f(x)$.

Nota. Con la excepción de la función constante $f(x) = 0$, la gráfica de una función de x no puede ser simétrica respecto al eje x, puesto que entonces violaría el criterio de la recta vertical para la gráfica de una función.

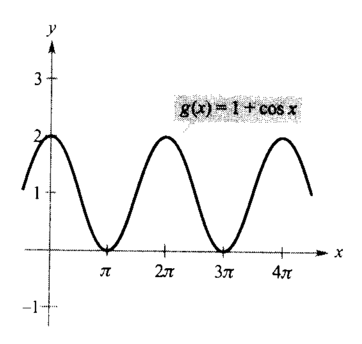
EJEMPLO 5 Funciones pares o impares y ceros de funciones

Determinar si cada una de las siguientes funciones es par, impar o ninguna de ambas cosas. Después, calcular los ceros de la función.

a) $f(x) = x^3 - x$ *b)* $g(x) = 1 + \cos x$



a) Función impar



b) Función par

FIGURA P.31

Solución:

a) La función es impar, ya que

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$$

Los ceros de f se calculan como sigue.

$x^3 - x = 0$	Hacer $f(x) = 0$
$x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1) = 0$	Factorizar
$x = 0, 1, -1$	Ceros de f

Véase Figura P.31*a*.

b) La función es par, pues

$$g(-x) = 1 + \cos(-x) = 1 + \cos x = g(x) \qquad \cos(-x) = \cos(x)$$

Los ceros de f se calculan como sigue.

$1 + \cos x = 0$	Hacer $g(x) = 0$
$\cos x = -1$	Restar 1 en ambos miembros
$x = (2n+1)\pi$, con n entero	Ceros de g

Véase Figura P.31*b*. □

Nota. Cada una de las funciones del Ejemplo 5 es par o impar. Sin embargo, muchas funciones, como $f(x) = x^2 + x + 1$ no son pares ni impares.

Ejercicios de la Sección P.3

En los Ejercicios 1-10, evaluar (si es posible) la función en los valores dados de la variable independiente. Simplificar los resultados.

1. $f(x) = 2x - 3$
a) $f(0)$
b) $f(-3)$
c) $f(b)$
d) $f(x-1)$

2. $f(x) = \sqrt{x+3}$
b) $f(-2)$
b) $f(6)$
c) $f(c)$
d) $f(x+\Delta x)$

3. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 0 \\ 2x+2, & x \geq 0 \end{cases}$
a) $f(-1)$ *b*) $f(0)$ *c*) $f(2)$ *d*) $f(t^2+1)$

4. $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x \leq 1 \\ 2x^2+2, & x > 1 \end{cases}$
a) $f(-2)$ *b*) $f(0)$ *c*) $f(1)$ *d*) $f(s^2+2)$

5. $f(x) = \cos 2x$
a) $f(0)$ *b*) $f(-\pi/4)$ *c*) $f(\pi/3)$

6. $f(x) = \text{sen } 2x$
a) $f(\pi)$ *b*) $f(5\pi/4)$ *c*) $f(2\pi/3)$

7. $f(x) = x^3$
$\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

8. $f(x) = 3x - 1$
$\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$

9. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$
$\dfrac{f(x) - f(2)}{x-2}$

10. $f(x) = x^3 - x$
$\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$

En los Ejercicios 11-18, esbozar la gráfica de la función y hallar su dominio y su recorrido. Puede utilizar una calculadora gráfica para comprobar las gráficas.

11. $f(x)=4-x$

12. $g(x)=\dfrac{4}{x}$

13. $h(x)=\sqrt{x-1}$

14. $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3+2$

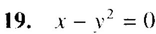
15. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

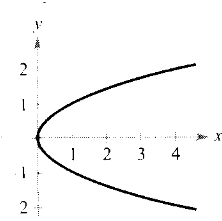
16. $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$

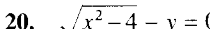
17. $g(t)=2 \text{ sen } \pi t$

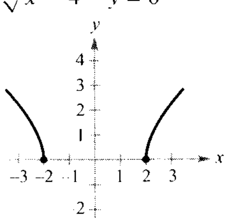
18. $h(\theta)=-5 \cos \dfrac{\theta}{2}$

En los Ejercicios 19 y 20, aplicar el criterio de la recta vertical para determinar si y es una función de x.

19. 
$x - y^2 = 0$



20. 
$\sqrt{x^2-4} - y = 0$



21. ***Para pensar*** Expresar la función

$$f(x) = |x| + |x - 2|$$

sin emplear el símbolo de valor absoluto. (Véase el apéndice para una revisión del concepto de valor absoluto.)

22. ***Redacción*** Representar en la calculadora las funciones polinómicas $p_1(x) = x^3 - x + 1$ y $p_2(x) = x^3 - x$. ¿Cuántos ceros tiene cada función? ¿Existe algún polinomio cúbico que carezca de ceros? Explíquese la razón.

En los Ejercicios 23-26, determinar si y es una función de x.

23. $x^2 + y^2 = 4$

24. $x^2 + y = 4$

25. $y^2 = x^2 - 1$

26. $x^2y - x^2 + 4y = 0$

En los Ejercicios 27 y 28, determinar si la relación dada es una función.

27.

Dominio	Recorrido
Liga nacional	Cubs
	Pirates
	Dodgers
Liga americana	Orioles
	Yankees
	Twins

28.

Dominio (Año)	Recorrido (% de votantes)
1972	50,1
1976	52,6
1980	53,1
1984	53,5
1988	55,2
1992	

Un modelo matemático En los Ejercicios 29-32, asociar a los datos una de las funciones de la siguiente lista.

i) $f(x) = cx$ ii) $g(x) = cx^2$

iii) $h(x) = c\sqrt{|x|}$ iv) $r(x) = c/x$

Encontrar el valor de la constante c en cada caso, de modo que la función se ajuste a los datos de la tabla.

29.

x	−4	−1	0	1	4
y	−32	−2	0	−2	−32

30.

x	−4	−1	0	1	4
y	−1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1

31.

x	−4	−1	0	1	4
y	−8	−32	Indef.	32	8

32.

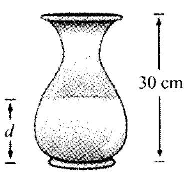
x	−4	−1	0	1	4
y	6	3	0	3	6

33. ***Para pensar*** El agua fluye dentro de una vasija de 30 centímetros de altura a velocidad constante, llenándola en 5 segundos. Usar esta información y la forma de la vasija que muestra la figura para responder a las siguientes cuestiones, donde d es la profundidad del agua en centímetros y t es el tiempo en segundos.

a) Explicar por qué d es una función de t.

b) Determinar el dominio y el recorrido de dicha función.

c) Esbozar una posible gráfica de la función.



34. ***Para pensar*** Un estudiante que viaja 27 millas cada día para asistir a la universidad se da cuenta, tras llevar unos minutos conduciendo, de que ha olvidado un trabajo que debía entregar. Conduciendo más rápido de lo habitual, regresa a casa, recoge el trabajo y parte de nuevo hacia la universidad. Dibujar una posible gráfica de la distancia del estudiante a su casa en función del tiempo.

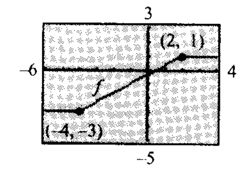
35. Seleccionar la ventana de calculadora gráfica que muestre una gráfica más completa de la función $f(x) = 10x\sqrt{400 - x^2}$.

Xmin = –5	Xmin = –20	Xmin = –25
Xmax = 50	Xmax = 20	Xmax = 25
Xscl = 5	Xscl = 2	Xscl = 5
Ymin = –5.000	Ymin = –500	Ymin = –2.000
Ymax = 5.000	Ymax = 500	Ymax = 2.000
Yscl = 500	Yscl = 50	Yscl = 200

36. Usando la gráfica de f mostrada en la figura, dibujar la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x-4)$ *b)* $f(x+2)$ *c)* $f(x)+4$

d) $f(x)-1$ *e)* $2f(x)$ *f)* $\frac{1}{2}f(x)$



37. Usando la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, representar la de cada una de las siguientes funciones. Describir, en cada caso, la transformación efectuada.

a) $y = \sqrt{x} + 2$ *b)* $y = -\sqrt{x}$ *c)* $y = \sqrt{x-2}$

38. Especificar la sucesión de transformaciones que, efectuadas sobre la gráfica de la función $f(x) = \text{sen } x$, producen la gráfica de h.

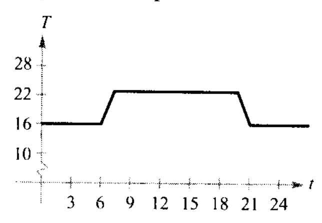
a) $h(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ *b)* $h(x) = -\text{sen }(x-1)$

39. ***Razonamiento gráfico*** Un termostato controlado electrónicamente está programado para hacer descender automáticamente durante la noche la temperatura de una casa (véase la figura). Se da la temperatura T en grados Celsius en función de t, el tiempo en horas de un reloj.

a) Calcular aproximadamente $T(4)$ y $T(15)$.

b) Suponiendo que se reprogramara el termostato para producir una temperatura $H(t) = T(t - 1)$, ¿cómo cambiaría esto la temperatura de la casa? Explicar la respuesta.

c) Suponiendo que se reprogramara el termostato para producir una temperatura $H(t) = T(t) - 1$, ¿cómo cambiaría esto la temperatura de la casa? Explicar la respuesta.



40. Dadas $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 1$, hallar:

a) $f(g(1))$ *b)* $g(f(1))$ *c)* $g(f(0))$

d) $f(g(-4))$ *e)* $f(g(x))$ *f)* $g(f(x))$

En los Ejercicios 41-44, hallar las funciones compuestas $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$. ¿Cuál es el dominio de cada una de ellas? ¿Son iguales las dos funciones compuestas?

41. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

42. $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \cos x$

43. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^2 + 1$

44. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x+2}$

45. ***Ondas*** En un estanque en calma, se deja caer un guijarro produciendo ondas en forma de círculos concéntricos. El radio (en pies) de la onda externa viene dado por $r(t) = 0.6t$, donde t es el tiempo en segundos transcurrido desde que el guijarro toca el agua. El área del círculo viene dada por la función $A(r) = \pi r^2$. Hallar e interpretar la función $(A \circ r)(t)$.

46. ***Aerodinámica de automóviles*** La potencia H, en caballos de vapor, que requiere cierto automóvil para vencer la resistencia del viento viene dada aproximadamente por

$$H(x) = 0{,}002x^2 + 0{,}005x - 0{,}029, \qquad 10 \leq x \leq 100$$

donde x es la velocidad del coche en millas por hora.

a) Representar H con una calculadora gráfica.

b) Escribir de nuevo la función potencia de forma que x represente la velocidad en kilómetros por hora. [Hallar $H(1{,}6x)$.]

En los Ejercicios 47-50, determinar si la función es par, impar o ninguna de ambas cosas. Verificar el resultado con ayuda de una calculadora gráfica.

47. $f(x) = 4 - x^2$

48. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

49. $f(x) = x \cos x$

50. $f(x) = \text{sen}^2\, x$

Para pensar En los Ejercicios 51 y 52, calcular las coordenadas de un segundo punto de la gráfica de una función f, sabiendo que el punto dado pertenece a dicha gráfica y que la función es *a)* par, y *b)* impar.

51. $\left(-\frac{3}{2}, 4\right)$

52. $(4, 9)$

53. Probar que la siguiente función es impar.

$$f(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + \cdots + a_3x^3 + a_1x$$

54. Probar que la siguiente función es par.

$$f(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_0$$

55. Probar que el producto de dos funciones pares (o impares) es una función par.

56. Demostrar que el producto de una función impar y una par es una función impar.

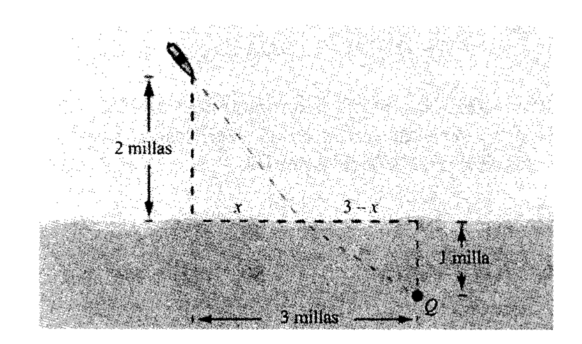
57. Demuestre gráficamente los resultados de los Ejercicios 55 y 56 con una calculadora. Escoja libremente las funciones.

58. ¿Qué puede decirse sobre la suma o diferencia de *a*) dos funciones pares, *b*) dos funciones impares, y *c*) una función impar y una función par? Demuestre gráficamente sus conclusiones.

59. ***Área*** Un rectángulo tiene un perímetro de 100 metros.

a) Esbozar un dibujo que dé una imagen del rectángulo en la cual x represente la longitud de su base.
b) Expresar el área A del rectángulo como función de x.
c) Representar la función área en una calculadora. ¿Qué dominio tiene la función?
d) Usar la gráfica de *c*) para hallar las dimensiones que producen un área máxima.

60. ***Tiempo*** Suponga que se encuentra en un bote a 2 millas del punto más próximo de la costa, y se dispone a ir a un punto Q, situado a 3 millas de recorrido por la costa y 1 milla tierra adentro (véase figura). Si rema a 2 millas por hora y camina a 4 millas por hora, exprese la duración total T del viaje como función de x.

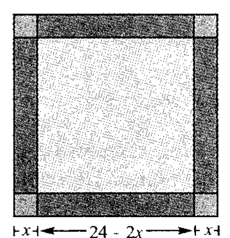


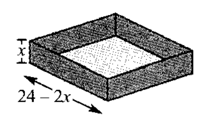
61. ***Volumen*** Se va a construir una caja abierta de volumen máximo con una pieza cuadrada de 24 centímetros de lado, cortando cuadrados iguales de las esquinas y doblando los lados hacia arriba (véase la figura).

a) Elaborar una tabla de seis filas completando la siguiente, que muestra dos filas. Utilizar el resultado para tratar de adivinar el volumen máximo.

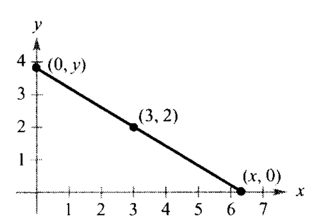
Altura x	**Longitud y anchura**	**Volumen, V**
1	$24 - 2(1)$	$1[24 - 2(1)]^2 = 484$
2	$24 - 2(2)$	$2[24 - 2(2)]^2 = 800$

b) Representar los puntos (x, V) en una calculadora. ¿Es V una función de x?
c) Si lo es, expresar V como función de x y determinar su dominio.
d) Usando una calculadora, representar la función volumen y calcular aproximadamente las dimensiones de la caja que producen el volumen máximo.





62. ***Longitud*** Una recta que pasa por el punto (3, 2) forma con los ejes un triángulo rectángulo en el primer cuadrante (véase figura). Expresar la longitud L de la hipotenusa en función de x.



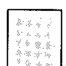
¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 63-66, determinar si la afirmación es cierta o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que pruebe su falsedad.

63. Si $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$.

64. Una recta vertical puede cortar la gráfica de una función a lo sumo una vez.

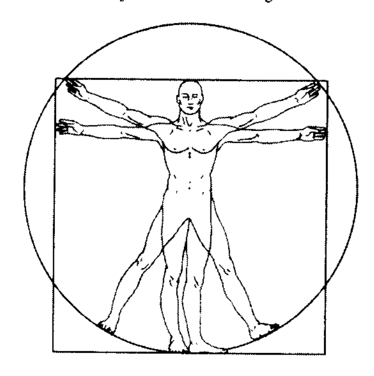
65. Si $f(x) = f(-x)$ para todo x perteneciente al dominio de f, entonces la gráfica de f es simétrica respecto al eje y.

66. Si f es una función, entonces $f(ax) = af(x)$.



P.4 Ajuste de modelos a colecciones de datos

CONTENIDO ▪
Ajuste de un modelo lineal ▪
Ajuste de un modelo cuadrático ▪
Ajuste de un modelo trigonométrico ▪



Dibujo por ordenador basado en la ilustración a tinta del famoso estudio de Leonardo da Vinci sobre las proporciones humanas, titulado *El hombre de Vitruvio.*

Ajuste de un modelo lineal

Una de las premisas básicas de la ciencia es que gran parte de la realidad física puede describirse matemáticamente y que muchos de los fenómenos físicos son predecibles. Esta perspectiva constituyó parte de la revolución científica que tuvo lugar en Europa a finales del siglo XVI. Dos tempranas publicaciones ligadas a esta revolución fueron *On the Revolutions of the Heavenly Spheres*, del astrónomo polaco Nicolás Copérnico, y *On the Structure of the Human Body*, del anatomista belga Andreas Vesalius. Publicados ambos en 1543, rompían con la tradición al sugerir el uso de un método científico en lugar de la confianza ciega en la autoridad.

Una de las características de la ciencia moderna es la recogida de datos y su posterior descripción mediante un modelo matemático. Por ejemplo, los datos del Ejemplo 1 están inspirados en el famoso dibujo de Leonardo da Vinci que indica que la altura de una persona y su envergadura son iguales.

EJEMPLO 1 Ajuste de un modelo lineal

Un grupo de personas recopiló los siguientes datos, que representan sus alturas x y sus envergaduras y (redondeadas a pulgadas)

(60, 61), (65, 65), (68, 67), (72, 73), (61, 62), (63, 63), (70, 71),
(75, 74), (71, 72), (62, 60), (65, 65), (66, 68), (62, 62), (72, 73),
(70, 70), (69, 68), (69, 70), (60, 61), (63, 63), (64, 64), (71, 71),
(68, 67), (69, 70), (70, 72), (65, 65), (64, 63), (71, 70), (67, 67),

Encontrar un modelo lineal que represente estos datos.

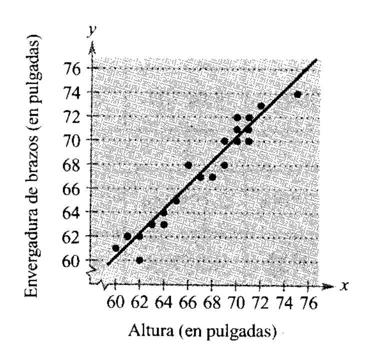


FIGURA P.32
Modelo lineal y datos.

Solución: Existen varias maneras de representar estos datos mediante una ecuación. La más sencilla sería observar que x e y son prácticamente iguales y tomar como modelo $y = x$. Un análisis más cuidadoso sería recurrir a un procedimiento de la Estadística llamado regresión lineal. (Estudiará este procedimiento en la Sección 12.9.) La recta de regresión de mínimos cuadrados para estos datos es

$$y = 1{,}006x - 0{,}225 \qquad \text{Recta de regresión de mínimos cuadrados}$$

La Figura P.32 muestra la gráfica del modelo y los datos. En este modelo, la envergadura de una persona tiende a ser aproximadamente la misma que su altura. □

Muchas calculadoras llevan incorporados programas de regresión de mínimos cuadrados. Típicamente, se introducen los datos y después se ejecuta el programa. Usualmente el programa exhibe la pendiente y la y-intersección de la recta que mejor se ajusta a los datos, y el coeficiente de correlación r. Cuanto más próximo a 1 es $|r|$, mejor es el ajuste. Así, en el Ejemplo 1, el valor de r es 0,97, lo que indica que el modelo se ajusta bien a los datos. Si el valor de r es positivo, las variables tienen una correlación positiva, como ocurre en el Ejemplo 1. Si el valor de r es negativo, las variables tienen una correlación negativa.

Ajuste de un modelo cuadrático

Una función que da la altura s de un objeto que cae en términos del tiempo t se llama función de posición. Si no se considera la resistencia del aire, la posición de un objeto que cae admite el modelo

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$$

donde g denota la aceleración de la gravedad, v_0 la velocidad inicial y s_0 la altura inicial. El valor de g depende de dónde se lance el objeto. En la Tierra, g vale aproximadamente -32 pies/s^2, o $-9{,}8$ m/s^2.

Para descubrir experimentalmente el valor de g, se pueden registrar las alturas de un objeto cayendo en varios instantes, como ilustra el Ejemplo 2.


EJEMPLO 2 Ajuste de un modelo cuadrático

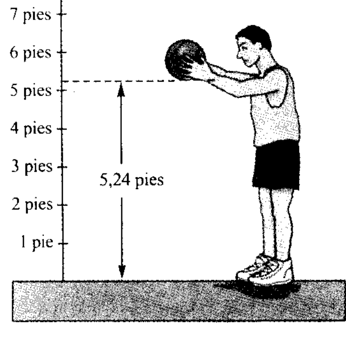
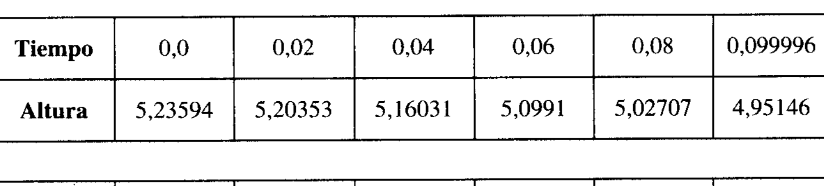


FIGURA P.33
Se deja caer un balón de baloncesto desde una altura de unos 5,24 pies. Con un *CBL System*, se mide la altura del balón cada 0,02 s.

Se deja caer un balón de baloncesto desde una altura de unos $5\frac{1}{4}$ pies, como muestra la Figura P.33. Se mide la altura del balón 23 veces, a intervalos del orden de 0,02 s*. Los resultados quedan recogidos en la siguiente tabla.



Tiempo	0,0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,099996
Altura	5,23594	5,20353	5,16031	5,0991	5,02707	4,95146

Tiempo	0,119996	0,139992	0,159988	0,179988	0,199984	0,219984
Altura	4,85062	4,74979	4,63096	4,50132	4,35728	4,19523

Tiempo	0,23998	0,25993	0,27998	0,299976	0,319972	0,339961
Altura	4,02958	3,84593	3,65507	3,44981	3,23375	3,01048

Tiempo	0,359961	0,379951	0,399941	0,419941	0,439941	
Altura	2,76921	2,52074	2,25786	1,98058	1,63488	

Hallar un modelo que ajuste estos datos, y utilizarlo para predecir el instante en que el balón golpeará el suelo.

---

* Datos tomados con un «Texas Instruments Calculator-Based Laboratory (CBL) System».

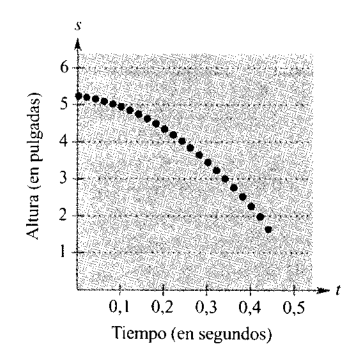


FIGURA P.34
Representación gráfica de los datos.

Solución: Comenzamos dibujando la nube de puntos que representa los datos, mostrada en la Figura P.34. En la nube de puntos se observa que los datos no parecen seguir un modelo lineal. Parece, en cambio, que pueden obedecer a un modelo cuadrático. Para comprobarlo, introduzca los datos en una calculadora con un programa para regresiones cuadráticas. Debería obtener el modelo

$$s = -15{,}45t^2 - 1{,}30t + 5{,}234 \qquad \text{Parábola de regresión de mínimos cuadrados}$$

Con ayuda de este modelo, se puede predecir el instante en que el balón golpea el suelo, sustituyendo s por 0 y resolviendo la ecuación que resulta para t.

$$0 = -15{,}45t^2 - 1{,}30t + 5{,}234 \qquad \text{Hacer } s = 0$$

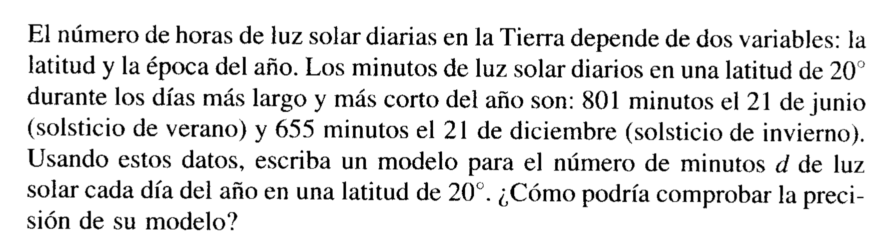
$$t = \frac{1{,}30 \pm \sqrt{(-1{,}30)^2 - 4(-15{,}45)(5{,}234)}}{2(-15{,}45)} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

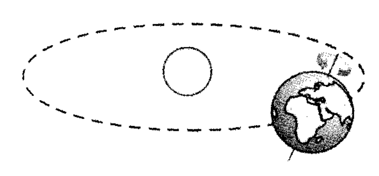
$$t \approx 0{,}54 \qquad \text{Escoger la solución positiva}$$

La solución aproximada es 0,54 s. En otras palabras, el balón continuará cayendo durante 0,1 s más aproximadamente antes de tocar el suelo. □

Ajuste de un modelo trigonométrico

EJEMPLO 3 Ajuste de un modelo trigonométrico


El número de horas de luz solar diarias en la Tierra depende de dos variables: la latitud y la época del año. Los minutos de luz solar diarios en una latitud de 20° durante los días más largo y más corto del año son: 801 minutos el 21 de junio (solsticio de verano) y 655 minutos el 21 de diciembre (solsticio de invierno). Usando estos datos, escriba un modelo para el número de minutos d de luz solar cada día del año en una latitud de 20°. ¿Cómo podría comprobar la precisión de su modelo?



El plano de la órbita de la Tierra alrededor del Sol y su eje de rotación no son perpendiculares. Por el contrario, el eje de la Tierra está inclinado respecto a la órbita. Como resultado, la cantidad de luz solar diaria recibida en cada posición en la Tierra varía con la época del año. Es decir, varía con la posición de la Tierra en su órbita.

Solución: Hemos de elegir una forma de crear un modelo. Se puede hacer la hipótesis de que el modelo es una función seno con período de 365 días. Utilizando los datos, se puede concluir que la amplitud de la gráfica es (801 − 655)/2, o sea, 73. Así pues, un posible modelo es

$$d = 728 - 73 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{365} + \frac{\pi}{2}\right)$$

En este modelo, t representa el número del día del año, correspondiendo $t = 0$ al 21 de diciembre. La Figura P.35 muestra una gráfica del modelo. Para comprobar la precisión, hemos consultado en un almanaque el número de minutos de luz solar en diferentes días del año en una latitud de 20°.

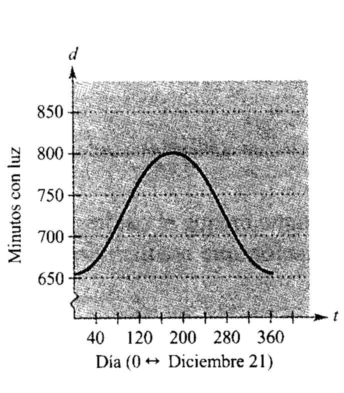


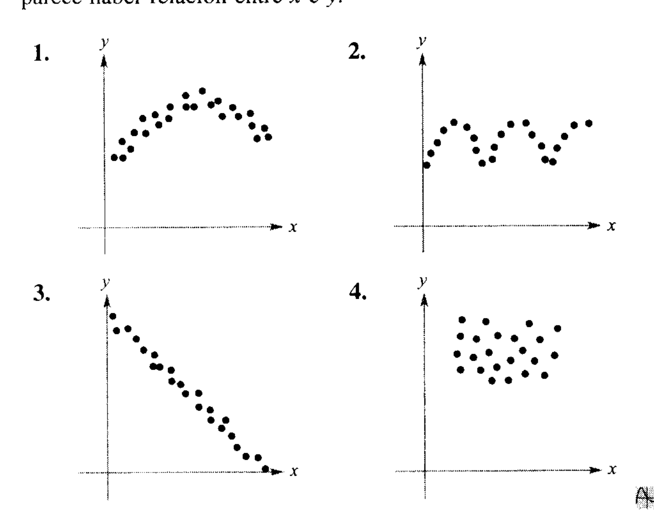
FIGURA P.35
Gráfica del modelo.

Fecha	*Valor de t*	*Horas de luz reales*	*Horas de luz que predice el modelo*
Dic 21	0	655 min	655 min
En 1	11	657 min	656 min
Feb 1	42	676 min	673 min
Mar 1	70	705 min	702 min
Abr 1	101	740 min	740 min
May 1	131	772 min	774 min
Jun 1	162	796 min	797 min
Jun 21	182	801 min	801 min
Jul 1	192	799 min	800 min
Ag 1	223	782 min	784 min
Sep 1	254	752 min	752 min
Oct 1	284	718 min	715 min
Nov 1	315	685 min	680 min
Dic 1	345	661 min	659 min

Como puede comprobar, el modelo es bastante preciso.

Ejercicios de la Sección P.4

En los Ejercicios 1-4 se da una nube de puntos que representa una colección de datos. Determinar si los datos admiten un modelo lineal, uno cuadrático, uno trigonométrico o si no parece haber relación entre x e y.



5. ***Cancerígenos*** Los siguientes pares ordenados dan el índice de exposición a una sustancia cancerígena x y la mortalidad por cáncer y en una población de 100.000 personas.

(3,50, 150,1), (3,58, 133,1), (4,42, 132,9), (2,26, 116,7), (2,63, 140,7), (4,85, 165,5), (12,65, 210,7), (7,42, 181,0), (9,35, 213,4)

a) Representar los datos. A la vista de esta gráfica, ¿parece que los datos siguen un modelo aproximadamente lineal?

b) Encontrar visualmente un modelo lineal para los datos y dibujar dicho modelo.

c) Usando el modelo, calcular el valor aproximado de y si $x = 3$.

6. ***Puntuaciones en cuestionarios*** Los siguientes pares ordenados dan las calificaciones de dos cuestionarios consecutivos de 15 puntos en una clase de 18 alumnos.

(7, 13), (9, 7), (14, 14), (15, 15), (10, 15), (9, 7), (14, 11), (14, 15), (8, 10), (15, 9), (10, 11), (9, 10), (11, 14), (7, 14), (11, 10), (14, 11), (10, 15), (9, 6)

a) Representar los datos. A la vista de esta gráfica, ¿parece que la relación entre puntuaciones consecutivas es aproximadamente lineal?

b) Si la relación parece lineal, hallar un modelo lineal para los datos. Si no, dar alguna posible explicación.

7. ***Ley de Hooke*** La ley de Hooke establece que la fuerza F necesaria para comprimir o estirar un muelle (dentro de sus límites elásticos) es proporcional a la variación de longitud d que experimenta el muelle. Esto es, $F = kd$, donde k es una medida de la resistencia del muelle a la deformación y se denomina *constante elástica*. La siguiente tabla nos da la elongación en centímetros d de un muelle cuando se le aplica una fuerza de F kilogramos fuerza.

F	20	40	60	80	100
d	1,4	2,5	4,0	5,3	6,6

a) Usando regresión en la calculadora, ajustar un modelo lineal a los datos.
b) Representar los datos y el modelo en la calculadora.
c) Utilizar el modelo para estimar la elongación del muelle cuando se le aplica una fuerza de 55 kg.

8. ***Objeto en caída*** En un experimento, unos estudiantes midieron la velocidad s (en metros por segundo) de un objeto, t segundos después de dejarlo caer. Los resultados se presentan en la siguiente tabla.

t	0	1	2	3	4
s	0	11,0	19,4	29,2	39,4

a) Con una calculadora programada para el cálculo de regresiones, ajustar un modelo lineal a los datos.
b) Representar los datos y el modelo utilizando una calculadora gráfica. ¿Es bueno el ajuste del modelo a los datos? Explíquese la respuesta.
c) Aplicar el modelo para estimar la velocidad del objeto tras 2,5 s.

9. ***Consumo de energía*** Los siguientes datos dan el consumo de energía *per capita* (en toneladas de equivalente en carbón) y el producto nacional bruto *per capita* (en miles de dólares) para una muestra de países en 1990. *(Fuente: Statistical Office of the United Nations.)*

Argentina	(1,83, 3,7)	Bangladesh	(0,07, 0,2)
Brasil	(0,77, 2,6)	Canadá	(10,51, 21,5)
Dinamarca	(4,70, 24,0)	Finlandia	(5,93, 26,0)
Francia	(3,87, 20,8)	Grecia	(3,05, 6,8)
India	(0,31, 0,3)	Italia	(3,86, 19,4)
Japón	(4,21, 26,2)	México	(1,75, 3,0)
Pakistán	(0,28, 0,4)	Corea del Sur	(2,47, 6,0)
Tanzania	(0,04, 0,1)	Estados Unidos	(10,32, 23,0)

a) Usando una calculadora programada para el cálculo de regresiones, ajustar un modelo lineal a los datos.
b) Representar los datos y el modelo con una calculadora gráfica.
c) Interpretar la gráfica del apartado *b*). Usar la gráfica para identificar aquellos países que parecen estar alejados del modelo lineal.

10. ***Dureza de Brinell*** Los datos de la tabla proporcionan la dureza de Brinell H del acero del 0,35 (de carbono) cuando se endurece y templa a temperatura t (en grados Fahrenheit). *(Fuente: Standard Handbook for Mechanical Engineers.)*

t	200	400	600	800	1.000	1.200
H	534	495	415	352	269	217

a) Usando regresión en la calculadora, ajustar un modelo lineal a los datos.
b) Representar los datos y el modelo con una calculadora gráfica. ¿Es bueno el ajuste del modelo a los datos? Explíquese la respuesta.
c) Aplicar el modelo para estimar la dureza cuando $t = 500$ °F.

11. ***Gastos de automóviles*** Los datos de la tabla representan los gastos variables de funcionamiento de un automóvil en los Estados Unidos durante los años 1985 a 1991. Las funciones y_1, y_2 e y_3 representan los gastos, en centavos por milla, en gasolina y aceite, mantenimiento, y neumáticos. *(Fuente: American Automobile Manufacturers Association.)*

Año	y_1	y_2	y_3
1985	6,16	1,23	0,65
1986	4,48	1,37	0,67
1987	4,80	1,60	0,80
1988	5,20	1,60	0,80
1989	5,20	1,90	0,80
1990	5,40	2,10	0,90
1991	6,70	2,20	0,90

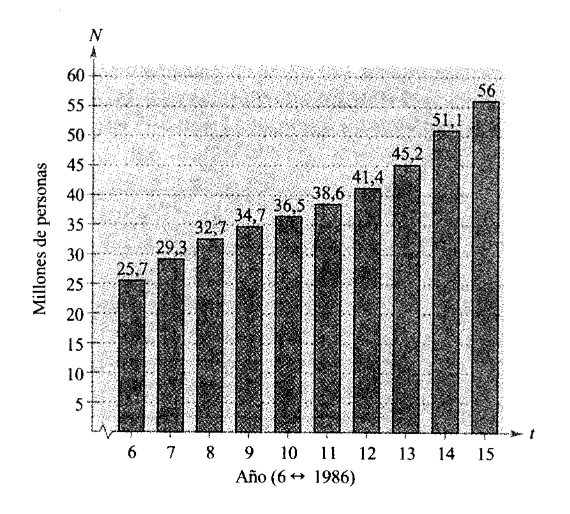
a) Sea t el tiempo en años, donde $t = 5$ corresponde a 1985. Usando regresión en la calculadora, hallar un modelo cuadrático para y_1, y modelos lineales para y_2 e y_3.
b) Representar en la calculadora, y_1, y_2, y_3 e $y_1 + y_2 + y_3$ en una misma ventana. Utilizar el modelo para estimar el gasto variable total por milla en 1998.

12. ***Resistencia de una viga*** Los estudiantes de un laboratorio midieron la fuerza de ruptura S (en libras) de una pieza de madera de 2 pulgadas de anchura, x de altura y 12 de longitud. Los resultados quedan recogidos en la siguiente tabla.

x	4	6	8	10	12
S	2.370	5.460	10.310	16.250	23.860

a) Con una calculadora programada para el cálculo de regresiones, ajustar un modelo cuadrático a los datos.
b) Representar en la calculadora los datos y el modelo.
c) Usar el modelo para estimar la fuerza de ruptura cuando $x = 2$.

13. ***Asistencia sanitaria*** El gráfico de barras muestra el número de personas N (en millones) que recibieron cuidados en organizaciones sanitarias durante los años 1986 a 1995.



a) Sea t el tiempo en años, con $t = 6$ correspondiendo a 1986. Hallar, usando regresión en la calculadora, un modelo lineal y uno cúbico para los datos.
b) Representar los datos y los modelos en la calculadora.
c) Usar las gráficas del apartado *b*) para decidir qué modelo es mejor.
d) Con ayuda de una calculadora, encontrar un modelo cuadrático para los datos y representarlo.
e) Interpretar la pendiente del modelo lineal dentro del contexto de los datos.
f) Usar los modelos lineal y cúbico para predecir el número de personas que serán atendidas en el año 2000.

14. ***Prestaciones de un automóvil*** La siguiente tabla muestra el tiempo t (en segundos) que necesita un Dodge Avenger de 1995 para alcanzar una velocidad de s millas por hora partiendo del reposo. (*Fuente: Road & Track,* marzo 1995.)

s	30	40	50	60	70	80	90
t	3,4	5,0	7,0	9,3	12,0	15,8	20,0

a) Ajustar un modelo cuadrático a los datos usando regresión en la calculadora.
b) Representar los datos y el modelo con una calculadora gráfica.
c) Utilizar la gráfica del apartado *b*) para establecer por qué no es apropiado el modelo para determinar el tiempo necesario para alcanzar velocidades inferiores a 20 millas por hora.
d) Dado que en las pruebas se partía del reposo, añadir el punto (0, 0) a los datos. Ajustar un modelo cuadrático a los nuevos datos y representarlo gráficamente. ¿Describe con mayor precisión el comportamiento del coche a velocidades bajas? Explique la respuesta.

15. ***Prestaciones de un automóvil*** Se acopla un dinamómetro a un motor de 8 válvulas y se mide la potencia en caballos y a diferentes velocidades del motor (en miles de revoluciones por minuto). Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

x	1	2	3	4	5	6
y	40	85	140	200	225	245

a) Ajustar un modelo cúbico a los datos usando una calculadora programada para el cálculo de regresiones.
b) Representar los datos y el modelo con una calculadora gráfica.
c) Estimar, aplicando el modelo, la potencia cuando el motor gira a 4.500 revoluciones por minuto.

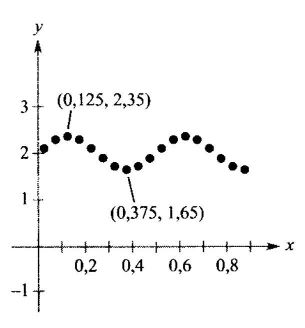
16. ***Temperatura de ebullición*** La siguiente tabla proporciona la temperatura de ebullición del agua T (°F) a diferentes presiones p (en libras/pulg^2). (*Fuente: Standard Handbook for Mechanical Engineers.*)

p	5	10	14,696 (1 atm)	20
T	162,24°	193,21°	212,00°	227,96°

p	30	40	60	80	100
T	250,33°	267,25°	292,71°	312,03°	327,81°

a) Ajustar un modelo cúbico a los datos usando regresión en la calculadora.
b) Representar los datos y el modelo con una calculadora.
c) Utilizar la gráfica para estimar la presión necesaria para que el punto de ebullición del agua exceda los 300 °F.
d) Explicar por qué el modelo no sería adecuado para presiones superiores a 100 libras por pulgada al cuadrado.

17. ***Movimiento armónico*** Un detector mide el movimiento oscilatorio de un peso suspendido de un muelle. La figura muestra los datos recogidos y los desplazamientos máximos del equilibrio (positivo y negativo) aproximados. El desplazamiento y se mide en centímetros y el tiempo t en segundos.
a) ¿Es y función de t? Explíquese la respuesta.
b) Estimar la amplitud y el período de las oscilaciones.
c) Encontrar un modelo para los datos.
d) Representar el modelo del apartado *c*) en una calculadora y comparar el resultado con los datos de la figura.



18. ***Temperatura*** La siguiente tabla muestra las temperaturas máximas diarias en Honolulu H y Chicago C (en grados Fahrenheit), donde $t = 1$ corresponde a enero. *(Fuente: NOAA.)*

t	1	2	3	4	5	6
H	80,1	80,5	81,6	82,8	84,7	86,5
C	29,0	33,5	45,8	58,6	70,1	79,6

t	7	8	9	10	11	12
H	87,5	88,7	88,5	86,9	84,1	81,2
H	83,7	81,8	74,8	63,3	48,8	34,0

a) Un modelo para Honolulu es

$$H(t) = 84{,}40 + 4{,}28 \text{ sen}\left(\frac{\pi t}{6} + 3{,}86\right)$$

Encontrar un modelo para Chicago.
b) Representar en la calculadora los datos y el modelo para las temperaturas de Honolulu. ¿Cómo es de bueno el ajuste del modelo a los datos?
c) Representar en la calculadora los datos y el modelo para las temperaturas de Chicago. ¿Cuán bueno es el ajuste del modelo a los datos?
d) Aplicar los modelos para estimar la temperatura media anual en cada ciudad. ¿Qué término del modelo utilizó? Explique la respuesta.
e) ¿Cuál es el período en cada modelo? ¿Es el que esperaba? Explique las respuestas.
f) ¿Qué ciudad presenta una mayor variación de temperaturas a lo largo del año? ¿Qué factor de los modelos lo determina? Explique las respuestas.

19. ***Proyecto individual*** Busque una colección de datos de la vida real en un periódico y ajuste un modelo a los datos. ¿Qué implica su modelo sobre los datos?

Ejercicios de repaso del Capítulo P

En los Ejercicios 1-4, hallar las intersecciones con los ejes (si existe alguna).

1. $y = 2x - 3$ **2.** $y = (x-1)(x-3)$

3. $y = \dfrac{x-1}{x-2}$ **4.** $xy = 4$

En los Ejercicios 5 y 6, determinar las simetrías respecto a cada eje y respecto al origen.

5. $x^2y - x^2 + 4y = 0$ **6.** $y = x^4 - x^2 + 3$

En los Ejercicios 7-14, dibujar la gráfica de la ecuación.

7. $y = \frac{1}{2}(-x + 3)$ **8.** $4x - 2y = 6$

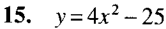
9. $-\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y = 1$ **10.** $0{,}02x + 0{,}15y = 0{,}25$

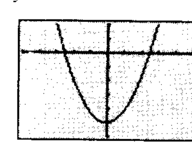
11. $y = 7 - 6x - x^2$ **12.** $y = 6x - x^2$

13. $y = \sqrt{5 - x}$ **14.** $y = |x - 4| - 4$

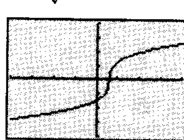
En los Ejercicios 15 y 16, describir la ventana de calculadora que produce la figura.

15. $y = 4x^2 - 25$





16. $y = 8\sqrt[3]{x-6}$



En los Ejercicios 17 y 18, encontrar, usando la calculadora, los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones.

17. $3x - 4y = 8$
$x + y = 5$

18. $x - y + 1 = 0$
$y - x^2 = 7$

19. ***Para pensar*** Escribir una ecuación cuya gráfica corte al eje x en $x = -2$ y $x = 2$ y sea simétrica respecto al origen.

20. ***Para pensar*** ¿Para qué valor de k pasa por el punto indicado la gráfica de $y = kx^3$?
a) $(1, 4)$ *b)* $(-2, 1)$
c) $(0, 0)$ *d)* $(-1, -1)$

En los Ejercicios 21 y 22, dibujar los puntos y calcular la pendiente de la recta que pasa por ellos.

21. $(\frac{3}{2}, 1), (5, \frac{5}{2})$ **22.** $(7, -1), (7, 12)$

En los Ejercicios 23 y 24, aplicar el concepto de pendiente para determinar el valor de t para el que los tres puntos son colineales.

23. $(-2, 5), (0, t), (1, 1)$ **24.** $(-3, 3), (t, -1), (8, 6)$

25. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por $(-2, 4)$ y poseen las siguientes características.
a) Pendiente $\frac{7}{16}$.
b) Es paralela a la recta $5x - 3y = 3$.
c) Pasa por el origen.
d) Es paralela al eje y.

26. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por $(1, 3)$ y poseen las siguientes características.
a) Pendiente $-\frac{2}{3}$.
b) Es perpendicular a la recta $x + y = 0$.
c) Pasa por el punto $(2, 4)$.
d) Es paralela al eje x.

27. ***Ritmo de cambio*** El precio de adquisición de una máquina nueva es $12.500, y su valor decrecerá $850 por año. Utilizar esta información para escribir una ecuación lineal que dé el valor V de la máquina t años después de su adquisición. Determinar su valor transcurridos 3 años.

28. ***Punto de equilibrio*** Un contratista adquiere un equipo por $36.500 que cuesta una media de $9,25 por hora en combustible y mantenimiento. Al operario que lo maneja se le paga $13,50 por hora y a los clientes se les carga $30 por hora.
a) Escribir una ecuación para el coste C que supone hacer funcionar el equipo durante t horas.
b) Escribir una ecuación para los ingresos R derivados de t horas de uso del equipo.
c) Determinar el punto de equilibrio, calculando el instante en el que $R = C$.

En los Ejercicios 29-32, esbozar la gráfica de la ecuación y aplicar el criterio de la recta vertical para determinar si la ecuación expresa y como función de x.

29. $x - y^2 = 0$ **30.** $x^2 - y = 0$

31. $y = x^2 - 2x$ **32.** $x = 9 - y^2$

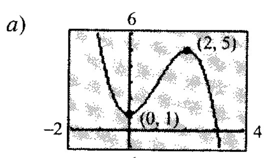
33. Evaluar (si es posible) la función $f(x) = 1/x$ en los valores de la variable independiente especificados y simplificar los resultados.
a) $f(0)$ *b)* $\dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$

34. Dadas $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = 2x + 1$, hallar:
a) $f(x) - g(x)$ *b)* $f(x)g(x)$ *c)* $g(f(x))$

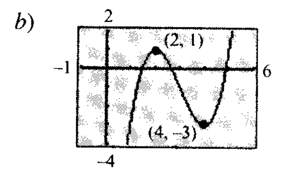
35. Esbozar las gráficas de f (en un mismo sistema de coordenadas) para $c = -2$, 0, y 2
a) $f(x) = x^3 + c$ *b)* $f(x) = (x - c)^3$
c) $f(x) = (x-2)^3 + c$ *d)* $f(x) = cx^3$

36. Representar en una calculadora $f(x) = x^3 - 3x^2$. Usando la gráfica, escribir una fórmula para la función g de la figura.

a)



b)



37. ***Conjetura***
a) Utilizando una calculadora, representar las funciones f, g y h en una misma ventana. Describir las analogías y diferencias observadas entre las gráficas.

Potencias impares: $f(x) = x$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^5$
Potencias pares: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$, $h(x) = x^6$

b) Usar el resultado del apartado *a)* para hacer una conjetura acerca de las gráficas de las funciones $y = x^7$ e $y = x^8$. Comprobar la conjetura con ayuda de una calculadora.

38. ***Para pensar*** Utilizando el resultado del Ejercicio 37, trate de adivinar las formas de las gráficas de f, g y h. Después, represente las funciones con una calculadora gráfica y compare el resultado con su estimación.

a) $f(x) = x^2(x-6)^2$

b) $g(x) = x^3(x-6)^2$

c) $h(x) = x^3(x-6)^3$

39. ***Área*** Se corta un alambre de 24 pulgadas de longitud en cuatro trozos para formar un rectángulo cuyo lado más corto mida x.

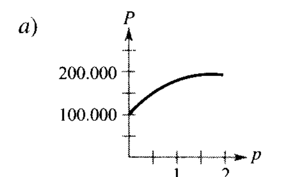
a) Expresar el área A del rectángulo en función de x.

b) Determinar el dominio de la función y representar en una calculadora la función en ese dominio.

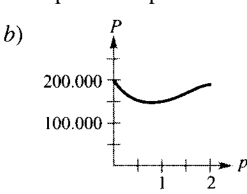
c) Utilizar la gráfica para estimar el área máxima del rectángulo. Hacer una conjetura sobre las dimensiones que producen el área máxima.

40. ***Redacción*** Las siguientes gráficas exhiben los beneficios P de dos pequeñas empresas durante un período de dos años. Invente una historia que explique el comportamiento de cada función de beneficios para un producto producido hipotéticamente por la empresa.

a)

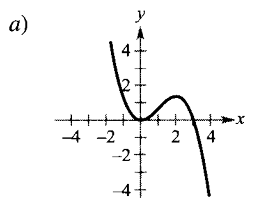


b)

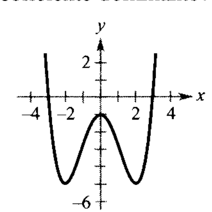


41. ***Para pensar*** ¿Cuál es el menor grado posible de la función polinómica cuya gráfica es aproximadamente la dada? ¿Qué signo debe tener el coeficiente dominante?

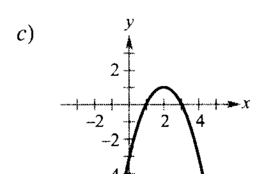
a)



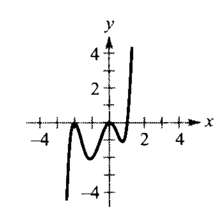
b)



c)



d)



42. ***Ensayo de esfuerzos*** Se prueba una máquina combándola x centímetros, diez veces por minuto, hasta el instante y (en horas) en que falla. Los resultados se recogen en la siguiente tabla.

x	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
y	61	56	53	55	48	35	36	33	44	23

a) Usando regresión en la calculadora, encontrar un modelo lineal para los datos.

b) Representar los datos y el modelo en la calculadora.

c) Usando la gráfica, determinar dónde puede haberse producido un error al realizar uno de los ensayos o al registrar los resultados. Si es así, suprimir el punto erróneo y ajustar un modelo lineal a los datos revisados.

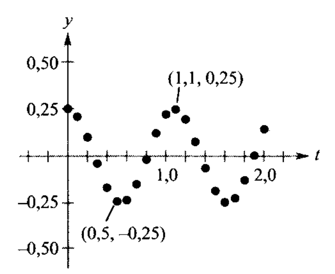
43. ***Movimiento armónico*** Un detector mide el movimiento oscilatorio de un peso suspendido de un muelle. La siguiente figura muestra los datos recogidos y los desplazamientos máximos del equilibrio (positivo y negativo) aproximados. El desplazamiento y se mide en pies y el tiempo t, en segundos.

a) ¿Es y función de t? Explique la respuesta.

b) Estimar la amplitud y el período de las oscilaciones.

c) Encontrar un modelo para los datos.

d) Representar el modelo del apartado *c*) en una calculadora y comparar el resultado con los datos de la figura.



Capítulo 1

MOTIVACIÓN DEL CAPÍTULO

¿Cuánta altura?
¿Cuánta velocidad?

Extracto del artículo «How High? How Fast?», *Newsweek*, de Sharon Begley y Adam Rogers, 22 de julio de 1996.

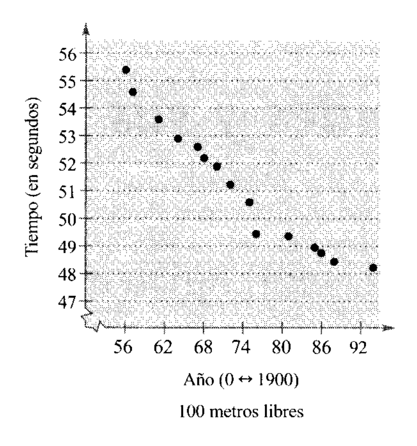
Observemos más de cerca la marcha de los récords. La cadencia decreciente salta a la vista. El récord del mundo en los 400 metros libres femeninos, por ejemplo, ha caído más de dos minutos —un 33 por 100— desde 1921 (6:16.6) hasta 1976 (4:11.69). En los siguientes 20 años, sólo ha bajado ocho segundos, hasta los 4:03.85 de Janet Evans en los Juegos Olímpicos de Seúl de 1988. Si marcara los récords del mundo en un papel, obtendría curvas que parecen aproximarse asintóticamente a un límite, acercándose a él más y más pero sin llegar nunca a alcanzarlo. Es como si las curvas fueran pequeños imanes con polaridad sur y el límite una barra con polaridad norte impuesta. Pero, ¿cuál es el límite?

Llevando al límite la velocidad de natación

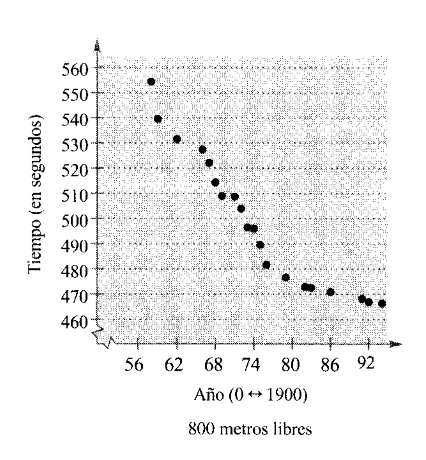
Una ojeada a las marcas establecidas en diversos deportes a lo largo del siglo pasado muestra que los humanos continúan corriendo más rápido, saltando más alto y lanzando más lejos cada vez. ¿A qué se debe?

Uno de los factores es el entrenamiento. Los psicólogos están trabajando para identificar los sistemas del cuerpo humano que limitan el rendimiento y crear técnicas de entrenamiento que desarrollen esos sistemas. Del mismo modo, los psicólogos del deporte trabajan con individuos y miembros de equipos para ayudarles a desarrollar el «flujo» mental que les permita alcanzar el rendimiento óptimo. Más aún, los entrenadores han ideado mecanismos para controlar los cuerpos de los atletas y proporcionarles mucha más información sobre su propio rendimiento que la que era disponible hace apenas veinte años.

El equipamiento también se ha perfeccionado notablemente a lo largo de los años. En algunos deportes el avance es evidente. Las bicicletas son más ligeras y aerodinámicas que nunca. La mejora de las pistas ha elevado la velocidad de los corredores, y las pértigas de aluminio han incrementado drásticamente la altura de los saltos. Incluso deportes como la natación, sin equipamiento aparente, se han beneficiado de la tecnología. El afeitado del vello corporal recortó en un segundo las marcas de los nadadores de 100 metros libres masculinos, y se espera que los nuevos tipos de bañadores reduzcan el rozamiento y mejoren aún más las marcas. Las dos nubes de puntos en la página siguiente muestran los sucesivos récords mundiales (en segundos) en dos pruebas de natación masculinas.



100 metros libres

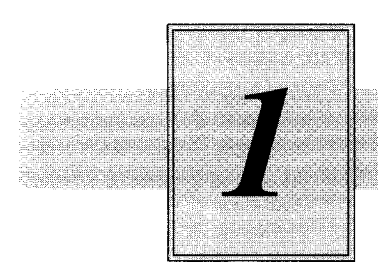


800 metros libres

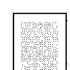
CUESTIONES

1. A partir de esas nubes de puntos, ¿puede determinar en qué año comenzó la práctica del afeitado del vello corporal? Explique su razonamiento.
2. ¿En qué otros años piensa que pudo haber avances tecnológicos en la natación? Explique la respuesta.
3. ¿Cuál parece ser el tiempo límite en que un hombre es capaz de nadar los 100 metros? ¿Y los 800 metros? ¿Cómo lo ha determinado?
4. Copie las nubes de puntos y trace la curva que parece ajustar mejor los datos. ¿Qué tipo de ecuación cree que produciría la curva que ha dibujado?
5. Lea el extracto del *Newsweek* en la página anterior. ¿Qué quieren decir los autores con la expresión «acercarse asintóticamente a un límite»?

En un artículo escrito para *Newsweek*, Sharon Begley y Adam Rogers cuestionaron los límites de la resistencia humana evidenciados por los récords mundiales en varios eventos deportivos.



Límites y sus propiedades



1.1 Una mirada previa sobre el Cálculo

ADVERTENCIA Según vaya progresando en este curso, recuerde que el aprendizaje del Cálculo es sólo uno de sus fines. Su objetivo más importante es aprender cómo utilizar el Cálculo para resolver problemas reales. He aquí algunas estrategias de resolución de problemas que pueden ayudarle.

- Asegúrese de que entiende la pregunta. ¿Cuáles son los datos? ¿Qué se le pide hallar?
- Conciba un plan. Hay muchos acercamientos posibles: hacer un esquema, resolver un problema más sencillo, trabajar marcha atrás, dibujar un diagrama, usar recursos tecnológicos, y muchos otros.
- Ejecute su plan. Asegúrese de que responde a la pregunta. Enuncie su respuesta en palabras. Por ejemplo, mejor que escribir la respuesta como $x = 4{,}6$ sería decir «El área de la región es 4,6 metros».
- Revise su trabajo. ¿Tiene sentido su respuesta? ¿Existe alguna forma de contrastar su plausibilidad?

¿Qué es el Cálculo?

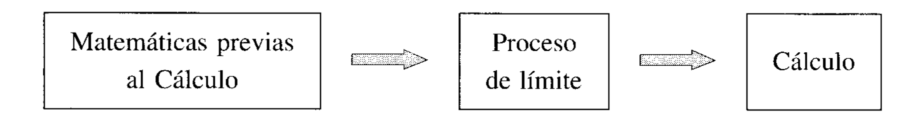
El Cálculo es la matemática de los cambios —velocidades y aceleraciones. También son objeto del Cálculo las rectas tangentes, pendientes, áreas, volúmenes, longitudes de arco, centroides, curvaturas y una gran variedad de conceptos que han hecho capaces a los científicos, ingenieros y economistas de crear modelos para las situaciones de la vida real.

Aunque las matemáticas previas al Cálculo también tratan las velocidades, aceleraciones, rectas tangentes, pendientes, etc., existe una diferencia fundamental entre ellas y el Cálculo. Mientras que las primeras son estáticas, el Cálculo es más dinámico. He aquí algunos ejemplos.

- Las matemáticas previas al Cálculo permiten describir un objeto que se mueve con velocidad constante. Sin embargo, para describir la velocidad de un objeto que se mueve aceleradamente es necesario recurrir al Cálculo.
- Las matemáticas previas al Cálculo permiten describir la pendiente de una recta, pero para describir la pendiente de una curva es necesario el Cálculo.
- Las matemáticas previas al Cálculo permiten describir una recta tangente a un círculo, pero para describir una recta tangente a una gráfica en general es necesario el Cálculo.
- Las matemáticas previas al Cálculo permiten describir el área de un rectángulo, pero para describir el área bajo una curva en general es necesario el Cálculo.

Cada una de estas situaciones involucra a la misma estrategia general —la reformulación de las matemáticas previas al cálculo a través de un proceso de límite—. Así pues, una forma de responder a la pregunta «¿Qué es el Cálculo?» es decir que el Cálculo es una «máquina de límites» que conlleva tres estadios.

El primero lo constituyen las matemáticas previas al Cálculo, con nociones como la pendiente de una recta o el área de un rectángulo. El segundo es el proceso de límite, y el tercero es la nueva formulación propia del Cálculo, en términos de derivadas e integrales.



GRACE CHISHOLM YOUNG (1868-1944)

Grace Chisholm Young obtuvo su título en Matemáticas en el Girton College de Cambridge, Inglaterra. Sus primeros trabajos se publicaron bajo el nombre de William Young, su marido. Entre los años 1914 y 1916, Grace Young publicó trabajos relativos a los fundamentos del Cálculo que la hicieron merecedora del Premio Gamble del Girton College.

Algunos estudiantes intentan aprender Cálculo como si se tratara simplemente de una colección de nuevas fórmulas. Si se reduce el Cálculo a la memorización de las fórmulas de derivación y de integración, se perderá una gran cantidad de comprensión, autoconfianza y satisfacción.

En las dos páginas siguientes presentamos una lista de conceptos familiares, previos al Cálculo, emparejados con sus homólogos del Cálculo. A lo largo del texto, el objetivo debería ser aprender cómo se utilizan las fórmulas y técnicas previas al Cálculo como pilares para producir las fórmulas y técnicas más generales del Cálculo. No se preocupe si algunas de las «viejas fórmulas» de las páginas siguientes no le resultan familiares, pues repasaremos todas ellas.

A medida que avance en el texto, sugerimos que vuelva a leer estos comentarios repetidas veces. Trate de mantener constancia de en cuál de los tres estadios del estudio del Cálculo se encuentra. Por ejemplo, los tres primeros capítulos se desglosan como sigue.

Capítulo P: Preparación para el Cálculo	Matemáticas previas al Cálculo
Capítulo 1: Límites y sus propiedades	El proceso de límite
Capítulo 2: La derivada	La nueva fórmula del Cálculo

El problema de la recta tangente

La noción de límite es fundamental en el estudio del Cálculo. A continuación se dan breves descripciones de dos problemas clásicos del Cálculo —*el problema de la recta tangente* y *el problema del área*— que ilustran la forma en que intervienen los límites en el Cálculo.

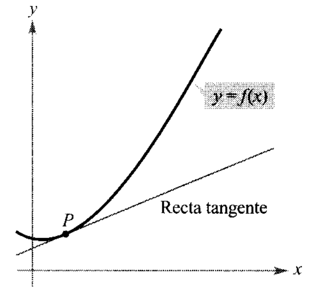


FIGURA 1.1
Recta tangente de la gráfica de f en P.

En el problema de la recta tangente, se dan una función f y un punto P de su gráfica y se pide hallar una ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto P, como ilustra la Figura 1.1.

Exceptuando los casos en que la recta tangente es vertical, el problema de hallar la **recta tangente** en el punto P equivale al de determinar la *pendiente* de la recta tangente en P. Se puede calcular aproximadamente esta pendiente trazando una recta por el punto de tangencia y otro punto de la curva (véase Figura 1.2*a*). Tal recta se llama una **recta secante**. Si $P(c, f(c))$ es el punto de tangencia y

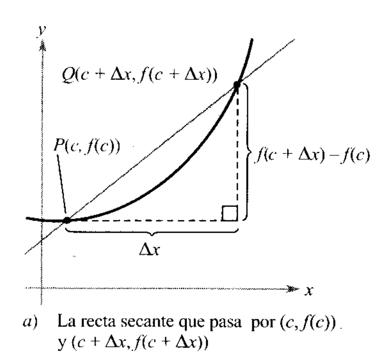
$$Q(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$$

SIN CÁLCULO	CON CÁLCULO DIFERENCIAL
valor de $f(x)$ cuando $x = c$	límite de $f(x)$ cuando x tiende a c
pendiente de una recta	pendiente de una curva
recta secante a una curva	recta tangente a una curva
tasa de variación media $t = a$ y $t = b$	tasa de variación instantánea en $t = c$
curvatura de un círculo	curvatura de una curva
altura de una curva en $x = c$	altura máxima de una curva en un intervalo
plano tangente a una esfera	plano tangente a una superficie
dirección de movimiento a lo largo de una recta	dirección de movimiento sobre una curva

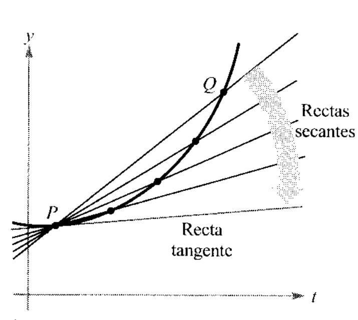
SIN CÁLCULO		CON CÁLCULO INTEGRAL	
área de un rectángulo		área bajo una curva	
trabajo realizado por una fuerza constante		trabajo realizado por una fuerza variable	
centro de un rectángulo		centroide de una región	
longitud de un segmento recto		longitud de un arco	
área de la superficie de un cilindro		área de un sólido de revolución	
masa de un sólido de densidad constante		masa de un sólido de densidad variable	
volumen de un sólido rectangular		volumen de la región bajo una superficie	
suma de un número finito de términos	$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S$	suma de un número infinito de términos	$a_1 + a_2 + a_3 \cdots = S$

es un segundo punto de la gráfica de f, la pendiente de la recta secante que pasa por estos dos puntos viene dada por

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{c + \Delta x - c} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$



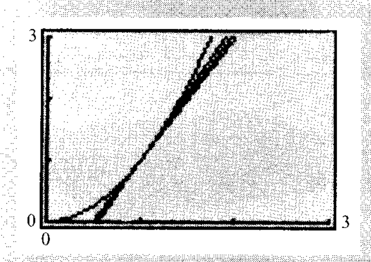
a) La recta secante que pasa por $(c, f(c))$ y $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$



b) Cuando Q se acerca a P, las rectas secantes se van aproximando a la recta tangente

FIGURA 1.2

Al aproximarse Q al punto P, la pendiente de la recta secante se aproxima a la de la recta tangente, como ilustra la Figura 1.2*b*. Cuando existe tal «posición límite» se dice que la pendiente de la recta tangente es el **límite** de las pendientes de las rectas secantes. (Este importante problema será estudiado con mucho más detalle en el Capítulo 2.)



EXPLORACIÓN

Los siguientes puntos pertenecen a la gráfica de $f(x) = x^2$, y se aproximan sucesivamente al punto $P(1, 1)$. Calcule la pendiente de la recta secante por Q_1 y P, Q_2 y P, etcétera. Dibuje estas rectas secantes con una calculadora. Después, utilice sus resultados para estimar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P.

$Q_1(1{,}5, f(1{,}5))$, $Q_2(1{,}1, f(1{,}1))$, $Q_3(1{,}01, f(1{,}01))$,
$Q_4(1{,}001, f(1{,}001))$, $Q_5(1{,}0001, f(1{,}0001))$

El problema del área

En el problema de la recta tangente, se vio cómo se puede aplicar el proceso de límite de la pendiente de una recta para determinar la pendiente de una curva genérica. Otro problema clásico en el Cálculo, que también puede resolverse mediante un proceso de límite, es la determinación del área de una región plana limitada por gráficas de funciones. En este caso, el proceso de límite se aplica al área de un rectángulo con el fin de encontrar el área de una región general.

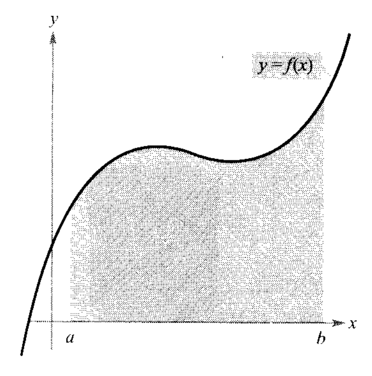
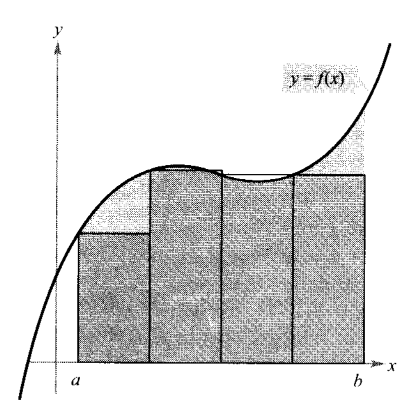
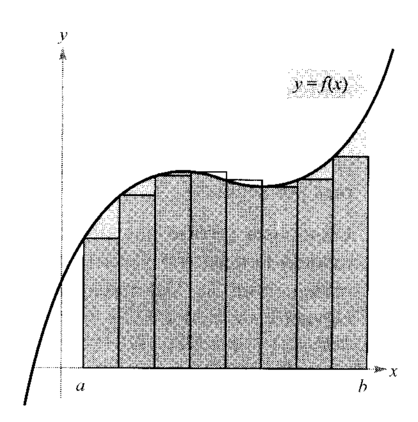


FIGURA 1.3
Área bajo una curva.

A modo de ejemplo sencillo, consideremos la región limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ (véase Figura 1.3). Se puede estimar su área usando varios rectángulos, como ilustra la Figura 1.4. Al hacer crecer el número de rectángulos, la aproximación va mejorando cada vez más, puesto que el área que se pierde con los rectángulos decrece. El objetivo es determinar el límite de la suma de las áreas de los rectángulos cuando su número crece sin tope.



Aproximación usando cuatro rectángulos

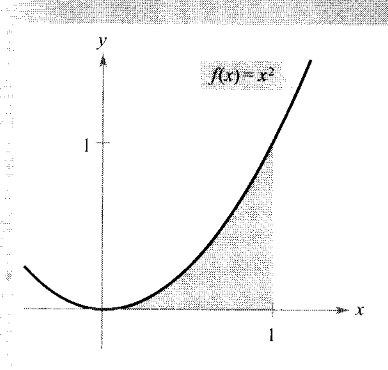


Aproximación usando ocho rectángulos

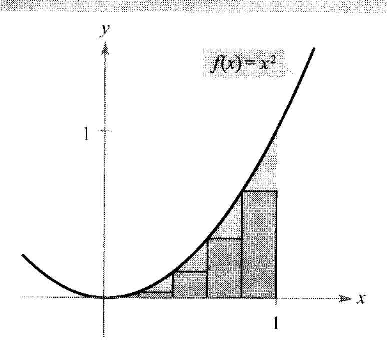
FIGURA 1.4

EXPLORACIÓN

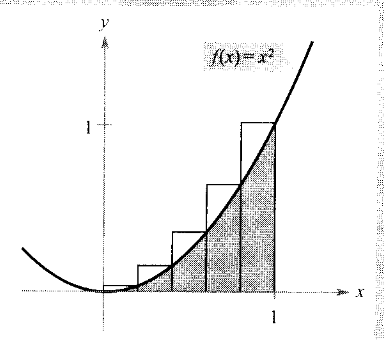
Considere la región limitada por las gráficas de $f(x) = x^2$, $y = 0$ y $x = 1$, mostrada en la parte *a*) de la figura. Se puede estimar el área de esta región empleando dos conjuntos de rectángulos —unos inscritos en la región y otros circunscritos, como ilustran las partes *b*) y *c*). Halle la suma de las áreas de cada colección de rectángulos. Después, utilice sus resultados para calcular aproximadamente el área de la región.



a) Región acotada



b) Rectángulos inscritos



c) Rectángulos circunscritos

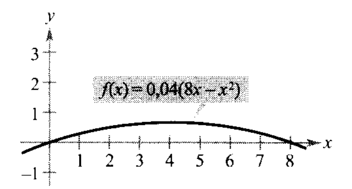
Ejercicios de la Sección 1.1

En los Ejercicios 1-4, decida si el problema puede resolverse mediante matemáticas previas al Cálculo o si requieren el Cálculo. Si puede resolverse mediante matemáticas previas al Cálculo, hágalo. En caso contrario, explique su razonamiento y estime la solución por procedimientos gráficos o numéricos.

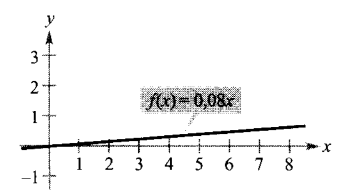
1. Calcular la distancia recorrida en 15 segundos por un objeto que viaja a una velocidad constante de 20 pies por segundo.

2. Calcular la distancia recorrida en 15 segundos por un objeto que se mueve con velocidad $v(t) = 20 + 7 \cos t$ pies por segundo.

3. Un ciclista recorre una trayectoria que admite como modelo la ecuación $y = 0{,}04(8x - x^2)$ donde x e y se miden en millas. Determinar el ritmo de cambio de la elevación cuando $x = 2$.



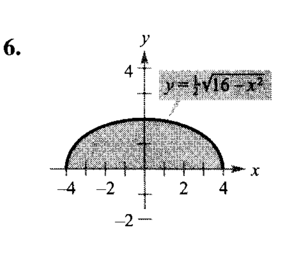
4. Un ciclista recorre una trayectoria que admite como modelo la ecuación $y = 0{,}08x$, donde x e y se miden en millas. Determinar el ritmo de cambio de la elevación cuando $x = 2$.



En los Ejercicios 5 y 6, hallar el área de la región sombreada.

5.

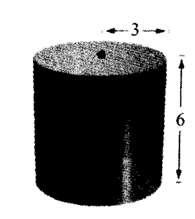
6.



En los Ejercicios 7 y 8, hallar el volumen del sólido mostrado.

7.

8.



9. *a)* Representar en la calculadora

$$y_1 = 4x - x^2$$

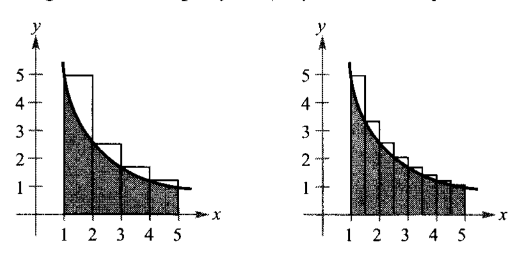
$$y_2 = \left[\frac{y_1(1 + \{2,\ 1{,}5,\ 1,\ 0{,}5\}) - y_1(1)}{\{2,\ 1{,}5\ 1,\ 0{,}5\}}\right](x - 1) + $$
$$+ y_1(1)$$

(*Nota:* Si no puede manejar listas en su calculadora, represente y_2 cuatro veces, para los valores 2, 1,5, 1 y 0,5, respectivamente.)

b) Describir por escrito las gráficas de y_2 con relación a la gráfica de y_1.

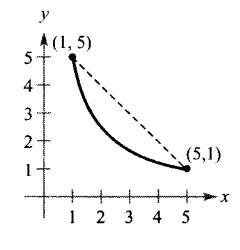
c) Utilizar los resultados del apartado *a)* para estimar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de y_1 en (1, 3). Si se quiere mejorar la estimación de la pendiente, ¿cómo habría que modificar la lista de la fórmula de y_2?

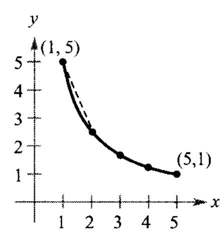
10. *a)* Utilizando los rectángulos, estimar el área de la región limitada por $y = 5/x$, $y = 0$, $x = 1$, y $x = 5$.



b) Describir cómo podría continuarse este proceso para obtener una estimación más precisa del área.

11. Se quiere hallar la longitud de la gráfica de $f(x) = 5/x$ desde (1, 5) hasta (5, 1).

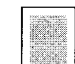




a) Estimar la longitud de la curva hallando la distancia entre sus extremos, como muestra la primera figura.

b) Estimar la longitud de la curva hallando las longitudes de los cuatro segmentos de la segunda figura.

c) Describir cómo podría continuarse este proceso para obtener una estimación más precisa de la longitud de la curva.



1.2 Cálculo de límites gráfica y numéricamente

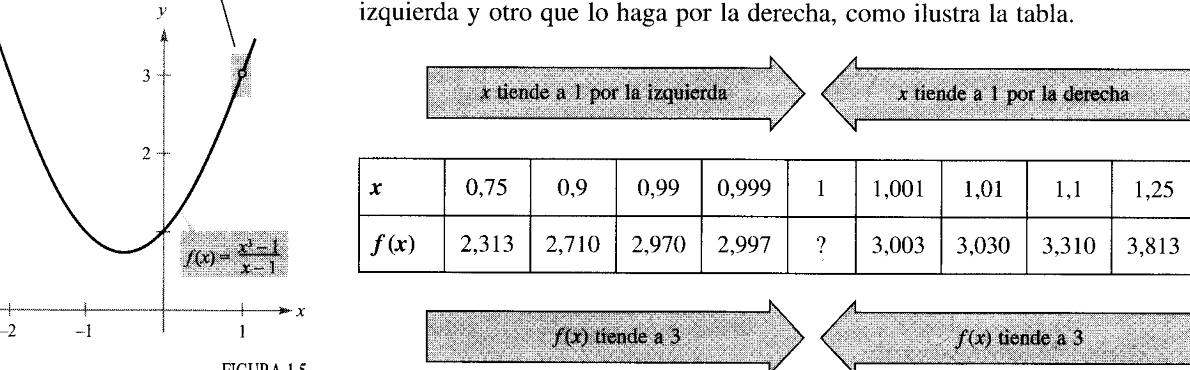
CONTENIDO ▪
Introducción a los límites ▪
Límites que no existen ▪
Definición formal de límite ▪

Introducción a los límites

Supongamos que se nos pide dibujar la gráfica de la función f dada por

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1$$

Para todos los valores distintos de $x = 1$, es posible emplear las técnicas usuales de representación de curvas. Sin embargo, en $x = 1$, no está claro qué esperar. Para obtener una idea del comportamiento de la gráfica de f cerca de $x = 1$, se pueden usar dos conjuntos de valores de x, uno que se aproxime a 1 por la izquierda y otro que lo haga por la derecha, como ilustra la tabla.



x	0,75	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1	1,25
$f(x)$	2,313	2,710	2,970	2,997	?	3,003	3,030	3,310	3,813

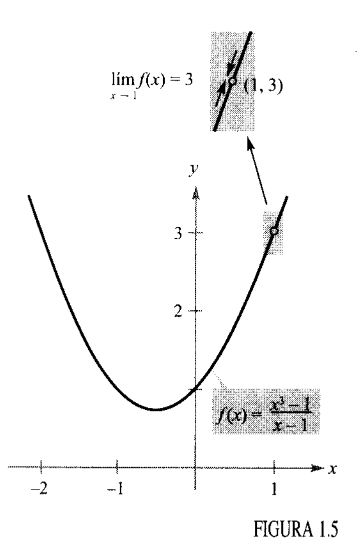


FIGURA 1.5
El límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1 es 3.

Al representar la función, parece que la gráfica de f es una parábola con un hueco en el punto (1, 3), como muestra la Figura 1.5. A pesar de que x no puede ser igual a 1, podemos acercarnos arbitrariamente a 1 y, como resultado, $f(x)$ se acerca arbitrariamente a 3. En notación de límites, se escribe

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3 \qquad \text{Esto se lee «el límite de } f(x) \text{ cuando } x \text{ tiende a 1 es 3»}$$

Esta discusión conduce a una descripción informal de límite. Si $f(x)$ se acerca arbitrariamente a un número L cuando x tiende a c por cualquiera de los dos lados, entonces el límite de $f(x)$, cuando x tiende a c, es L. Esto se escribe

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = L}$$

EXPLORACIÓN

La discusión precedente proporciona un ejemplo de cómo se puede estimar un límite *numéricamente*, construyendo una tabla, o *gráficamente*, dibujando una gráfica. Intente estimar numéricamente el límite

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

completando la tabla.

x	1,75	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	2,25
$f(x)$	?	?	?	?	?	?	?	?	?

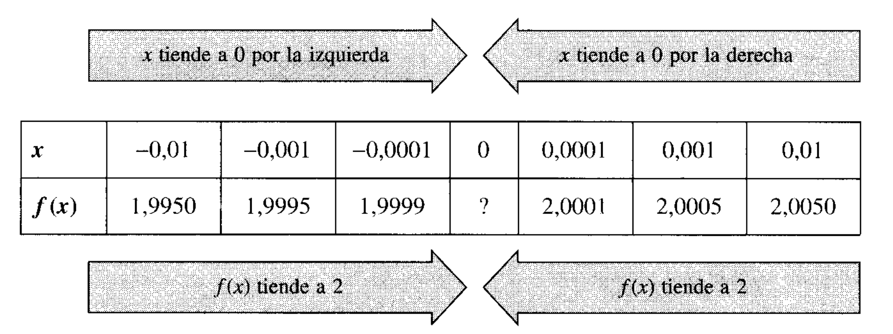
A continuación, estime gráficamente el límite usando una calculadora.

EJEMPLO 1 Estimación numérica de un límite

Evaluar la función $f(x) = x/(\sqrt{x+1} - 1)$ en varios puntos cerca de $x = 0$ y usar el resultado para estimar el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

Solución: La siguiente tabla recoge los valores de $f(x)$ para diversos valores de x cerca de 0.



x	−0,01	−0,001	−0,0001	0	0,0001	0,001	0,01
$f(x)$	1,9950	1,9995	1,9999	?	2,0001	2,0005	2,0050

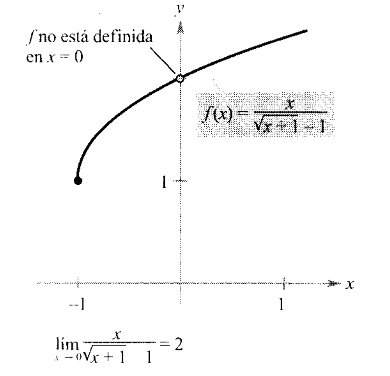


FIGURA 1.6
El límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0 es 2.

A partir de los datos de la tabla, se puede estimar que el límite es 2, resultado que se ve confirmado por la gráfica de f (véase Figura 1.6). □

Hasta ahora, en esta sección, hemos estimado límites numérica y gráficamente. Cada uno de estos procedimientos produce un valor aproximado del límite. En la Sección 1.3, se estudiarán técnicas analíticas para evaluar límites. A lo largo del curso, intente desarrollar el hábito de aplicar el siguiente enfoque de tres puntos a la resolución de problemas.

1. Procedimiento numérico — Construya una tabla de valores.
2. Procedimiento gráfico — Dibuje una gráfica, a mano o con una calculadora.
3. Procedimiento analítico — Utilice el Álgebra o el Cálculo.

Nota. Observemos que la función del Ejemplo 1 no está definida en $x = 0$ y, a pesar de ello, la función parece tender a un límite cuando x tiende a 0. Esto ocurre a menudo, y es importante darse cuenta de que *el que exista o no $f(x)$ en $x = c$ no guarda relación con la existencia del límite de $f(x)$ cuando x tiende a c.*

EJEMPLO 2 Cálculo de un límite

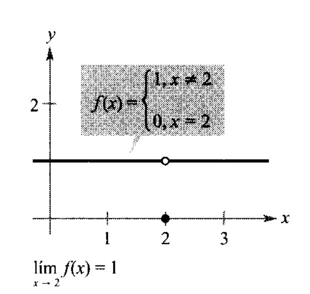


FIGURA 1.7
El límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 es 1.

Hallar el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2, donde f se define como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$$

Solución: Dado que $f(x) = 1$ para todos los x distintos de $x = 2$, se puede concluir que el límite es 1, como se muestra en la Figura 1.7. Por tanto, podemos escribir

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 1$$

El hecho de que $f(2) = 0$ no influye en la existencia ni en el valor del límite cuando x tiende a 2. Por ejemplo, si se hubiera definido la función como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

el límite sería el mismo. □

Límites que no existen

En los próximos tres ejemplos se examinarán algunos límites que no existen.

EJEMPLO 3 Comportamiento diferente por la derecha y por la izquierda



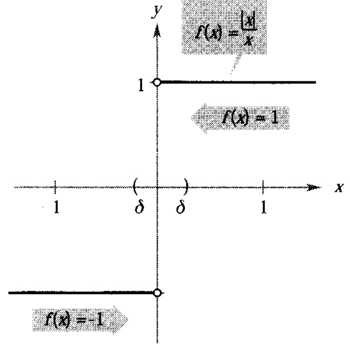


FIGURA 1.8
$\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

Demostrar que el siguiente límite no existe.

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

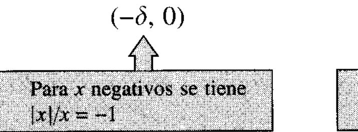
Solución: Consideremos la gráfica de la función $f(x) = |x|/x$. En la Figura 1.8, puede verse que para los valores de x positivos

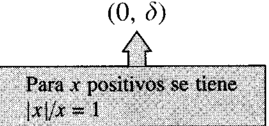
$$\frac{|x|}{x} = 1, \quad x > 0$$

mientras que para los negativos

$$\frac{|x|}{x} = -1, \qquad x < 0$$

Esto significa que, independientemente de cuánto se aproxime x a 0, existirán tanto valores de x positivos como negativos que darán $f(x) = 1$ y $f(x) = -1$. Concretamente, si δ es un número positivo, para los x que satisfacen la desigualdad $0 < |x| < \delta$, los valores de $|x|/x$ se pueden clasificar como sigue.





Esto implica que el límite no existe. □

EJEMPLO 4 Comportamiento no acotado

FIGURA 1.9
$\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

Discutir la existencia del límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

Solución: Sea $f(x) = 1/x^2$. En la Figura 1.9, puede verse que cuando x tiende a 0 tanto por la derecha como por la izquierda, $f(x)$ crece sin cota. Esto quiere decir que, eligiendo x suficientemente próximo a 0, se puede lograr que f sea tan grande como se quiera. Por ejemplo, $f(x)$ será mayor que 100 si elegimos valores de x que estén a menos de 1/10 de 0. Esto es,

$$0 < |x| < \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x^2} > 100$$

Análogamente, se puede obligar a f a ser mayor que 1.000.000 como sigue:

$$0 < |x| < \frac{1}{1.000} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x^2} > 1.000.000$$

Como $f(x)$ no se aproxima a ningún número real cuando x tiende a 0, podemos concluir que el límite no existe. □

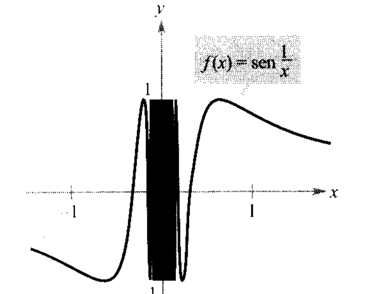
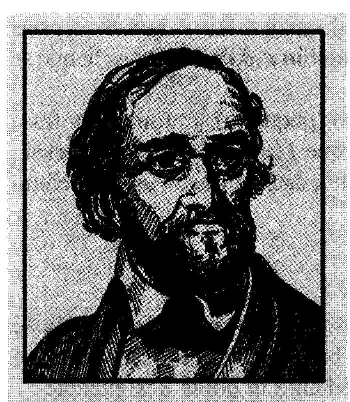


FIGURA 1.10
$\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

EJEMPLO 5 Comportamiento oscilante

Discutir la existencia del límite $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

Solución: Sea $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$. En la Figura 1.10, puede verse que, cuando x tiende a 0, $f(x)$ oscila entre −1 y 1. Por consiguiente, el límite no existe puesto que, por pequeño que se elija δ, siempre es posible escoger x_1 y x_2 que disten menos de δ unidades de 0 tales que sen $(1/x_1) = 1$ y sen $(1/x_2) = 1$, como indica la tabla.



PETER GUSTAV DIRICHLET (1805-1859)

En el desarrollo temprano del Cálculo, la definición era mucho más restrictiva que hoy en día, y «funciones» como la de Dirichlet no habrían sido consideradas. La definición moderna de función se debe al matemático alemán Peter Gustav Dirichlet.

x	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{3\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{2}{7\pi}$	$\frac{2}{9\pi}$	$\frac{2}{11\pi}$	$x \to 0$
$\operatorname{sen} \frac{1}{x}$	1	−1	1	−1	1	−1	El límite no existe

□

Comportamientos típicos asociados a la no existencia de un límite

1. $f(x)$ tiende a números diferentes según x tienda a c por la derecha o por la izquierda.
2. $f(x)$ crece o decrece sin cota cuando x tiende a c.
3. $f(x)$ oscila entre dos valores fijos cuando x tiende a c.

Existen muchas otras funciones interesantes que presentan comportamientos no usuales en lo que se refiere a los límites. Una que se cita con frecuencia es la *función de Dirichlet*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Esta función *carece de límite* en cualquier número real c.

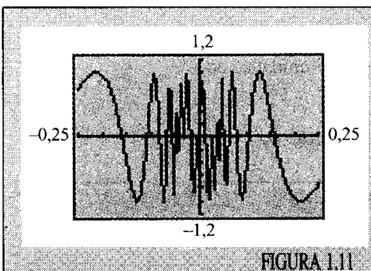


FIGURA 1.11
Gráfica incorrecta de $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$.

Cuando utilice una calculadora para investigar el comportamiento de una función cerca del valor de x en el que intenta evaluar su límite, recuerde que no siempre se puede confiar en las figuras que dibujan las calculadoras. Por ejemplo, si usa una calculadora para dibujar la gráfica de la función del Ejemplo 5 en un intervalo que contenga al 0, es muy probable que obtenga una gráfica incorrecta, similar a la mostrada en la Figura 1.11. El motivo por el cual una calculadora no puede exhibir la gráfica correcta es que la gráfica efectúa infinitas oscilaciones en cualquier intervalo que contenga al 0.



AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789-1857)

Cauchy comenzó su labor en Matemáticas a los 22 años. Durante su brillante carrera, escribió casi 800 artículos en materias diversas, desde la Mecánica hasta la Astronomía.

Definición formal de límite

Examinemos nuevamente la descripción informal de límite. Si $f(x)$ se acerca arbitrariamente a un número L cuando x tiende a c por cualquiera de sus dos lados, decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es L, y escribimos

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

A primera vista, esta descripción parece muy técnica. No obstante, la llamamos informal porque aún tenemos que dotar de un significado preciso a las frases

«$f(x)$ se acerca arbitrariamente a L»

y

«x tiende a c.»

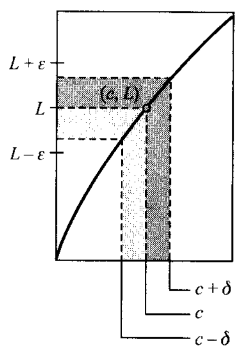


FIGURA 1.12
La definición ε-δ del límite de $f(x)$ cuando x tiende a c.

La primera persona en asignar un significado matemático riguroso a estas dos frases fue Augustin-Louis Cauchy. Su **definición ε-δ de límite** es la que se usa hoy de forma estándar.

En la Figura 1.12, sea ε un número positivo (pequeño). Entonces, la frase «$f(x)$ se acerca arbitrariamente a L» significa que $f(x)$ pertenece al intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Usando la noción de valor absoluto, esto se puede escribir como

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Análogamente, la frase «x tiende a c» significa que existe un número positivo δ tal que x pertenece bien al intervalo $(c - \delta, c)$, o bien al intervalo $(c, c + \delta)$. Este hecho puede expresarse de manera concisa mediante la doble desigualdad

$$0 < |x - c| < \delta$$

La primera desigualdad

$$0 < |x - c| \qquad \text{La diferencia entre } x \text{ y } c \text{ es mayor que } 0$$

expresa el hecho de que $x \neq c$. La segunda

$$|x - c| < \delta \qquad x \text{ está a menos de } \delta \text{ unidades de } c$$

nos dice que x está a una distancia de c menor que δ.

DEFINICIÓN DE LÍMITE Sean f una función definida en un intervalo abierto que contiene a c (salvo, posiblemente, en c) y L un número real. La afirmación

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

PARA MÁS INFORMACIÓN
Se puede leer más acerca de la introducción del rigor en el Cálculo en «Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus» de Judith V. Grabiner en *The American Mathematical Monthly*, marzo 1983.

Nota. A lo largo del texto, cuando escribamos

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

estaremos haciendo dos afirmaciones simultáneas: el límite **existe** y es igual a L.

Algunas funciones carecen de límite cuando $x \to c$, pero aquellas que lo poseen no pueden tener dos límites diferentes cuando $x \to c$. Es decir, *si el límite de una función existe, entonces es único* (véase el Ejercicio 45).

Los próximos tres ejemplos ayudan a consolidar la comprensión de la definición ε-δ de límite.

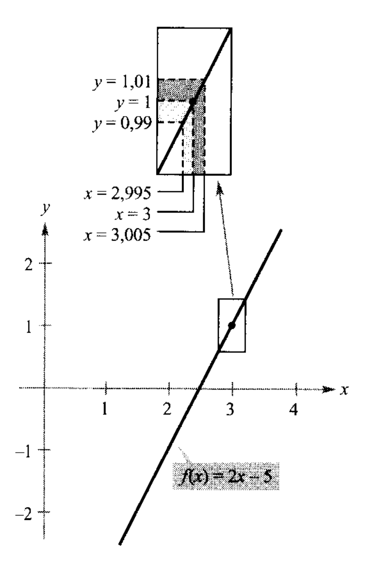


FIGURA 1.13
El límite de $f(x)$ cuando x tiende a 3 es 1.

EJEMPLO 6 Determinación de δ para un ε dado

Dado el límite

$$\lim_{x\to 3}(2x-5)=1$$

hallar δ tal que $|(2x-5)-1|<0{,}01$ siempre que $0<|x-3|<\delta$.

Solución: En este problema se trabaja con un valor dado de ε, $\varepsilon = 0{,}01$. Para encontrar un δ apropiado, observemos que

$$|(2x-5)-1| = |2x-6| = 2|x-3|$$

Como la desigualdad $|(2x-5)-1|<0{,}01$ es equivalente a $2|x-3|<0{,}01$, podemos escoger $\delta = 1/2\,(0{,}01) = 0{,}005$, Esta elección funciona porque

$$0<|x-3|<0{,}005$$

implica que

$$|(2x-5)-1| = 2|x-3| < 2(0{,}005) = 0{,}01$$

como muestra la Figura 1.13. □

Nota. Obsérvese que, en el Ejemplo 6, 0,005 es el *mayor* valor de δ que garantiza que $|(2x-5)-1|<0{,}01$ siempre que $0<|x-3|<\delta$. Cualquier valor positivo *menor* para δ es igualmente válido.

En el Ejemplo 6, se ha hallado un valor de δ para un ε dado. Esto no demuestra la existencia del límite. Para hacerlo, debemos probar que es posible encontrar un δ para cualquier ε, como enseña el próximo ejemplo.

EJEMPLO 7 Aplicación de la definición ε-δ de límite

Usar la definición ε-δ de límite para demostrar que

$$\lim_{x\to 2}(3x-2)=4$$

Solución: Debemos probar que para todo $\varepsilon>0$ dado, existe un $\delta>0$ tal que $|(3x-2)-4|<\varepsilon$ siempre que $0<|x-2|<\delta$. Puesto que la elección de δ depende de ε, es necesario establecer una relación entre los valores absolutos $|(3x-2)-4|$ y $|x-2|$.

$$|(3x-2)-4| = |3x-6| = 3|x-2|$$

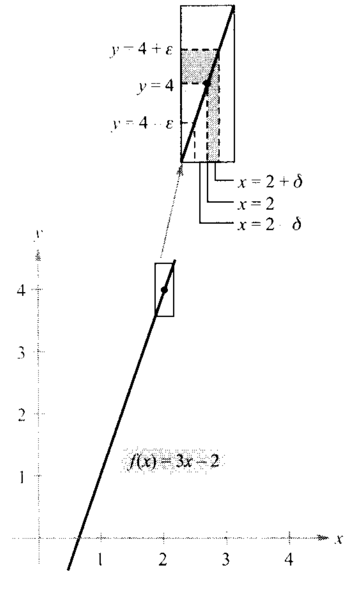


FIGURA 1.14
El límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 es 4.

Así pues, para cada $\varepsilon > 0$ dado, podemos tomar $\delta = \varepsilon/3$. Esta elección funciona porque

$$0 < |x - 2| < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$$

implica que

$$|(3x - 2) - 4| = 3|x - 2| < 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

como muestra la Figura 1.14. □

EJEMPLO 8 Aplicación de la definición ε-δ de límite

Usar la definición ε-δ de límite para demostrar que

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

Solución: Debemos probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|x^2 - 4| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - 2| < \delta$$

Para encontrar un δ apropiado, comencemos por escribir $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|$. Para todo x del intervalo $(1, 3)$, sabemos que $|x + 2| < 5$. Por tanto, tomando δ igual al mínimo entre $\varepsilon/5$ y 1, resulta que, si $0 < |x - 2| < \delta$, se tiene que

$$|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < \left(\frac{\varepsilon}{5}\right)(5) = \varepsilon$$

como se muestra en la Figura 1.15. □

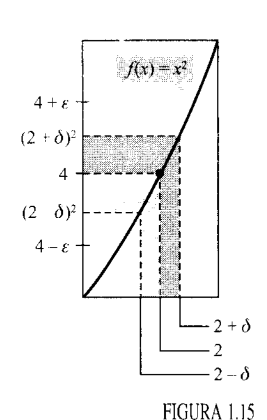


FIGURA 1.15
El límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 es 4.

A lo largo de este capítulo, utilizará la definición ε-δ de límite fundamentalmente para demostrar teoremas sobre límites y para establecer la existencia o no existencia de tipos particulares de límites. Para *calcular* límites, veremos técnicas más sencillas de manejar que la definición ε-δ.

Ejercicios de la Sección 1.2

1. ***Un modelo matemático*** El coste de una llamada telefónica entre dos ciudades es de \$0,75 por el primer minuto y \$0,50 por cada minuto adicional. Una fórmula para el coste es

$$C(t) = 0{,}75 - 0{,}50[\![-(t - 1)]\!]$$

donde t es el tiempo en minutos.

(*Nota:* $[\![x]\!]$ = mayor entero n tal que $n \leqslant x$. Por ejemplo, $[\![3{,}2]\!] = 3$ y $[\![-1{,}6]\!] = -2$.)

a) Usando una calculadora gráfica, representar la función de coste para $0 < t \leqslant 5$.

b) Utilizar la gráfica para completar la siguiente tabla y observar el comportamiento de la función cuando t tiende a 3,5. Hallar $\lim_{t \to 3{,}5} C(t)$.

t	3	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	4
C				?			

c) Utilizar la gráfica para completar la siguiente tabla y observar el comportamiento de la función cuando t tiende a 3.

t	2	2,5	2,9	3	3,1	3,5	4
C				?			

¿Existe el límite cuando t tiende a 3? Explicar la respuesta.

2. ***Redacción*** Describir brevemente, por escrito, el significado de la notación

$$\lim_{x \to 8} f(x) = 25$$

En los Ejercicios 3-10, completar la tabla y usar el resultado para estimar el límite. Puede representarse la función en la calculadora para confirmar la respuesta.

3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - x - 2}$

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$f(x)$						

4. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$f(x)$						

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{3}}{x}$

x	−0,1	−0,01	−0,001	0,001	0,01	1,0
$f(x)$						

6. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{1 - x} - 2}{x + 3}$

x	−3,1	−3,01	−3,001	−2,999	−2,99	−2,9
$f(x)$						

7. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{[1/(x + 1)] - (1/4)}{x - 3}$

x	2,9	2,99	2,999	3,001	3,01	3,1
$f(x)$						

8. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{[x/(x + 1)] - (4/5)}{x - 4}$

x	3,9	3,99	3,999	4,001	4,01	4,1
$f(x)$						

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

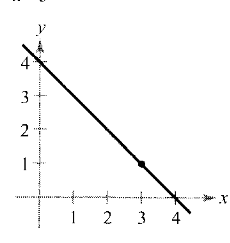
x	−0,1	−0,01	−0,001	0,001	0,01	0,1
$f(x)$						

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$

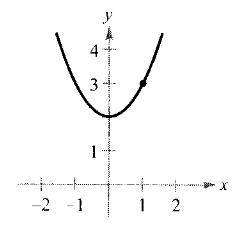
x	−0,1	−0,01	−0,001	0,001	0,01	0,1
$f(x)$						

En los Ejercicios 11-20, usar la gráfica para hallar el límite (si existe).

11. $\lim\limits_{x \to 3} (4 - x)$

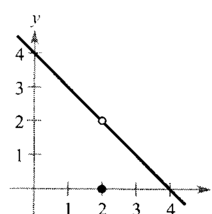


12. $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2)$



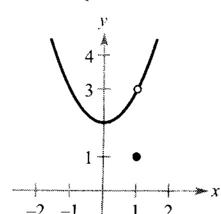
13. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x, & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

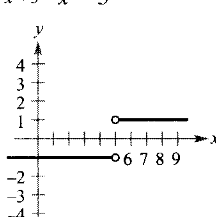


14. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

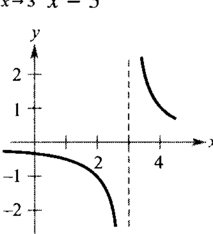
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$



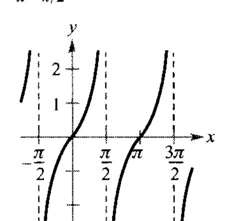
15. $\lim_{x \to 5} \frac{|x - 5|}{x - 5}$



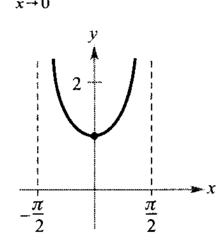
16. $\lim_{x \to 3} \frac{1}{x - 3}$



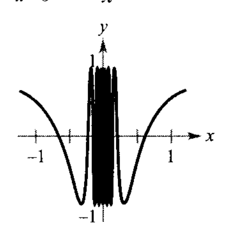
17. $\lim_{x \to \pi/2} \operatorname{tg} x$



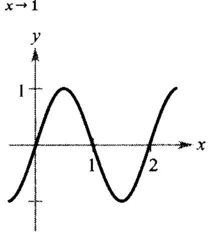
18. $\lim_{x \to 0} \sec x$



19. $\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$



20. $\lim_{x \to 1} \operatorname{sen} \pi x$



En los Ejercicios 21-24, calcular el límite L. Después, hallar un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < 0{,}01$ siempre que $0 < |x - c| < \delta$.

21. $\lim_{x \to 2} (3x + 2)$

22. $\lim_{x \to 4} \left(4 - \frac{x}{2}\right)$

23. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 3)$

24. $\lim_{x \to 5} (x^2 + 4)$

En los Ejercicios 25-36, calcular el límite L. Después, usar la definición ε-δ para demostrar que el límite es L.

25. $\lim_{x \to 2} (x + 3)$

26. $\lim_{x \to -3} (2x + 5)$

27. $\lim_{x \to -4} (1/2\ x - 1)$

28. $\lim_{x \to 1} (2/3\ x + 9)$

29. $\lim_{x \to 6} 3$

30. $\lim_{x \to 2} (-1)$

31. $\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x}$

32. $\lim_{x \to 4} \sqrt{x}$

33. $\lim_{x \to -2} |x - 2|$

34. $\lim_{x \to 3} |x - 3|$

35. $\lim_{x \to 1} (x^2 + 1)$

36. $\lim_{x \to -3} (x^2 + 3x)$

Redacción En los Ejercicios 37-40, represente la función con una calculadora y estime el límite (si existe). ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Puede detectar un posible peligro en la determinación del dominio mediante un mero análisis de la gráfica que genera la calculadora? Escriba unas líneas acerca de la importancia de examinar una función analíticamente además de hacerlo gráficamente.

37. $f(x) = \frac{\sqrt{x + 5} - 3}{x - 4}$

$\lim_{x \to 4} f(x)$

38. $f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 4x + 3}$

$\lim_{x \to 3} f(x)$

39. $f(x) = \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$

$\lim_{x \to 9} f(x)$

40. $f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 9}$

$\lim_{x \to 3} f(x)$

41. ***Análisis gráfico*** La afirmación

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

significa que a cada $\varepsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces

$$\left|\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4\right| < \varepsilon$$

Si $\varepsilon = 0{,}001$, entonces

$$\left|\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4\right| < 0{,}001$$

Representar con una calculadora cada miembro de esta desigualdad. Usando el zoom, hallar un intervalo $(2 - \delta, 2 + \delta)$ tal que la gráfica del miembro de la izquierda quede por debajo que la del miembro de la derecha.

42. ***Para pensar*** Contestar las siguientes preguntas razonando cada respuesta.
   a) Si $f(2) = 4$, ¿se puede concluir algo sobre el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2?
   b) Si el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 es 4, ¿se puede concluir algo acerca de $f(2)$?

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 43-46, determinar si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.

43. Si f no está definida en $x = c$, no existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c.

44. Si el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es 0, existe un número k tal que $f(k) < 0{,}001$.

45. Si $f(c) = L$, entonces $\lim_{x \to c} f(x) = L$

46. Si $\lim_{x \to c} f(x) = L$, entonces $f(c) = L$

47. ***Programación*** En una calculadora programable, escriba un programa que estime

$$\lim_{x \to c} f(x)$$

Suponga que el programa sólo se aplicará a funciones cuyo límite cuando x tiende a c existe. [*Ayuda:* Haga $y_1 = f(x)$ y genere dos listas cuyas entradas formen los pares ordenados

$$(c \pm [0{,}1]^n, \quad f(c \pm [0{,}1]^n))$$

para $n = 0, 1, 2, 3$ y 4.]

48. Utilizando el programa creado en el Ejercicio 47, estimar el límite

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x - 4}$$

49. Demostrar que si existe el límite de $f(x)$ cuando $x \to c$, ese límite debe ser único. [*Ayuda:* Tomar

$$\lim_{x \to c} f(x) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c} f(x) = L_2$$

y probar que $L_1 = L_2$.]

50. Consideremos la recta $f(x) = mx + b$, donde $m \neq 0$. Aplicando la definición ε-δ de límite, demostrar que

$$\lim_{x \to c} f(x) = mc + b$$

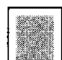
51. Demostrar que

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

es equivalente a

$$\lim_{x \to c} [f(x) - L] = 0$$

52. Consideremos la función $f(x) = (1 + x)^{1/x}$. Estimar el límite $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$ evaluando f en valores de x próximos a 0. Esbozar la gráfica de f.



1.3 Cálculo analítico de límites

CONTENIDO
- Propiedades de los límites
- Estrategia para el cálculo de límites
- Técnicas de cancelación y de racionalización
- Teorema del encaje

Propiedades de los límites

En la Sección 1.2, vimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c no depende del valor de f en $x = c$. Puede ocurrir, no obstante, que este límite sea $f(c)$. En estos casos, se puede evaluar el límite por **sustitución directa**. Esto es,

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } c$$

Las funciones con este *buen comportamiento* se dicen **continuas en *c***. En la Sección 1.4, se examinará con más detalle este concepto.

TEOREMA 1.1 ALGUNOS LÍMITES BÁSICOS

Sean b, c números reales y n un entero positivo. Entonces:

1. $\lim_{x \to c} b = b$ 2. $\lim_{x \to c} x = c$ 3. $\lim_{x \to c} x^n = c^n$

EXPLORACIÓN

Para demostrar los teoremas de esta página y las siguientes, puede utilizar la definición formal ε-δ de límite de la sección previa. Damos aquí un ejemplo de cómo usar esta definición para demostrar la propiedad 2 del Teorema 1.1.

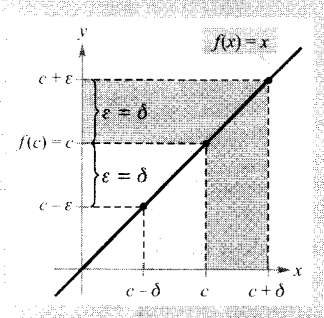
Para demostrarla, hay que probar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|x - c| < \varepsilon$$

siempre que

$$0 < |x - c| < \delta$$

Como la segunda desigualdad es una versión más estricta de la primera, se puede elegir sencillamente $\delta = \varepsilon$, como se ilustra abajo. Esto completa la demostración.



Discuta esta demostración. Las demostraciones del resto de las propiedades de los límites se incluyen en el apéndice y en los ejercicios.

EJEMPLO 1 Evaluación de límites básicos

a) $\lim\limits_{x \to 2} 3 = 3$ *b*) $\lim\limits_{x \to -4} x = -4$ *c*) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 2^2 = 4$ □

Nota. Cuando encuentre nuevas notaciones o símbolos en Matemáticas, asegúrese de que sabe cómo se leen. Por ejemplo, el límite del Ejemplo 1*c*) se lee «el límite de x^2 cuando x tiende a 2 es 4».

TEOREMA 1.2 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Sean b, c números reales, n un entero positivo y f, g funciones con los siguientes límites

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c} g(x) = K$$

1. Múltiplo escalar: $\lim\limits_{x \to c} [bf(x)] = bL$
2. Suma o diferencia: $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$
3. Producto: $\lim\limits_{x \to c} [f(x)g(x)] = LK$
4. Cociente: $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{K}$, supuesto que $K \neq 0$
5. Potencias: $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^n = L^n$

EJEMPLO 2 El límite de un polinomio

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} (4x^2 + 3) &= \lim_{x \to 2} 4x^2 + \lim_{x \to 2} 3 && \text{Propiedad 2}\\ &= 4\left(\lim_{x \to 2} x^2\right) + \lim_{x \to 2} 3 && \text{Propiedad 1}\\ &= 4(2^2) + 3 && \text{Ejemplo 1}\\ &= 19 && \text{Simplificar}\end{aligned}$$ □

Observemos que, en el Ejemplo 2, el límite (cuando $x \to 2$) de la función polinómica $p(x) = 4x^2 + 3$ es simplemente el valor de p en $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2} p(x) = p(2) = 4(2^2) + 3 = 19$$

Esta propiedad de *sustitución directa* es válida para todas las funciones polinómicas y todas las racionales cuyos denominadores no se anulen en el punto considerado.

TEOREMA 1.3 LÍMITES DE FUNCIONES POLINÓMICAS Y RACIONALES

Sean p una función polinómica y c un número real. Entonces

$$\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$$

Sean $r(x) = p(x)/q(x)$ una función racional, y c un número real tal que $q(c) \neq 0$. Entonces

$$\lim_{x\to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}$$

EL SÍMBOLO DE RAÍZ CUADRADA

El primer uso de un símbolo para denotar la raíz cuadrada data del siglo XVI. Al principio, los matemáticos emplearon el símbolo $\surd$ que tiene sólo dos trazos. Se escogió este símbolo porque se asemejaba a una *r* minúscula para representar la palabra *raíz*.

EJEMPLO 3 Límite de una función racional

Hallar el límite $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x + 2}{x + 1}$

Solución: Puesto que el denominador no es 0 cuando $x = 1$, se puede aplicar el Teorema 1.3 para obtener

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x + 2}{x + 1} = \frac{1^2 + 1 + 2}{1 + 1} = \frac{4}{2} = 2$$ □

Las funciones polinómicas y racionales constituyen dos de los tres tipos básicos de funciones algebraicas. El próximo teorema concierne al límite del tercer tipo de función algebraica, aquella en la que interviene una raíz.

TEOREMA 1.4 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN RADICAL

Sea n un entero positivo. El siguiente límite es válido para todo c si n es impar, y para todo $c > 0$ si n es par.

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$

El siguiente teorema extenderá notablemente su capacidad de evaluar límites, ya que muestra cómo tratar el límite de una función compuesta.

TEOREMA 1.5 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Si f y g son funciones tales que $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to L} f(x) = f(L)$, entonces

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L)$$

EJEMPLO 4 Límite de una función compuesta

a) De

$$\lim_{x \to 0} (x^2 + 4) = 0^2 + 4 = 4 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$$

se sigue que

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4} = 2$$

b) De

$$\lim_{x \to 3} (2x^2 - 10) = 2(3^2) - 10 = 8 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 8} \sqrt[3]{x} = 2$$

se sigue que

$$\lim_{x \to 3} \sqrt[3]{2x^2 - 10} = \sqrt[3]{8} = 2$$

□

Se ha visto que los límites de muchas funciones algebraicas se pueden calcular por sustitución directa. Cada una de las seis funciones trigonométricas básicas también posee esta deseable propiedad, como establece el siguiente teorema (presentado sin demostración).

TEOREMA 1.6 LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea c un número real en el dominio de la función trigonométrica dada. Entonces

1. $\lim_{x \to c} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} c$ **2.** $\lim_{x \to c} \cos x = \cos c$

3. $\lim_{x \to c} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} c$ **4.** $\lim_{x \to c} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} c$

5. $\lim_{x \to c} \sec x = \sec c$ **6.** $\lim_{x \to c} \operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} c$

EJEMPLO 5 Límites de funciones trigonométricas

a) $\lim_{x \to 0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(0) = 0$

b) $\lim_{x \to \pi} (x \cos x) = \left(\lim_{x \to \pi} x\right)\left(\lim_{x \to \pi} \cos x\right) = \pi \cos(\pi) = -\pi$

c) $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}^2 x = \lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)^2 = 0^2 = 0$

□

Estrategia para el cálculo de límites

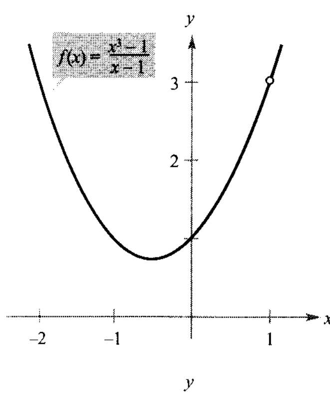
En las tres páginas previas, se han estudiado diversos tipos de funciones cuyos límites pueden calcularse por sustitución directa. El conocimiento de estas funciones, junto con el siguiente teorema, permiten desarrollar una estrategia para calcular límites.

TEOREMA 1.7 FUNCIONES QUE COINCIDEN SALVO EN UN PUNTO

Sea c un número real y sea $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq c$ en un intervalo abierto que contiene c. Si existe el límite de $g(x)$ cuando x tiende a c, entonces también existe el de $f(x)$ y

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x)$$

EJEMPLO 6 Cálculo del límite de una función



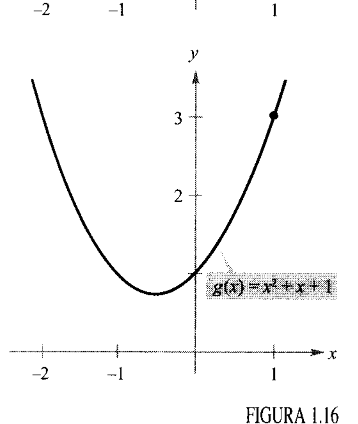


FIGURA 1.16
f y g coinciden salvo en un punto.

Hallar el límite $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

Solución: Sea $f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$. Factorizando y cancelando factores, se puede escribir f como

$$f(x) = \frac{\cancel{(x - 1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{(x - 1)}} = x^2 + x + 1 = g(x), \quad x \neq 1$$

Así pues, para todos los valores de x distintos de $x = 1$, las funciones f y g coinciden, como ilustra la Figura 1.16. Como $\lim_{x \to 1} g(x)$ existe, se puede aplicar el Teorema 1.7 y concluir que f y g tienen el mismo límite en $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \quad \text{Factorizar}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x - 1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{x - 1}} \quad \text{Cancelar factores idénticos}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) \quad \text{Aplicar el Teorema 1.7}$$

$$= 1^2 + 1 + 1 \quad \text{Usar sustitución directa}$$

$$= 3 \quad \text{Simplificar}$$

□

ADVERTENCIA Cuando aplique esta estrategia al cálculo de límites, recuerde que algunas funciones no tienen límite (cuando x tiende a c). Por ejemplo, el siguiente límite no existe

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 1}{x - 1}$$

Estrategia para el cálculo de límites

1. Aprenda a reconocer qué límites pueden evaluarse por sustitución directa. (Estos límites se enumeran en los Teoremas 1.1 al 1.6.)
2. Si el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c *no puede* evaluarse por sustitución directa, intente encontrar una función g que coincida con f para todo x distinto de $x = c$. [Elija g tal que el límite de $g(x)$ *pueda* evaluarse por sustitución directa.]
3. Aplique el Teorema 1.7 para concluir *analíticamente* que

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = g(c)$$

4. Use una *gráfica* o una *tabla* para reforzar su conclusión.

Técnicas de cancelación y de racionalización

En los Ejemplos 7 y 8 se exhiben dos técnicas para calcular límites analíticamente. La primera supone la cancelación de factores comunes, y la segunda la racionalización del numerador de una fracción.

EJEMPLO 7 Técnica de cancelación

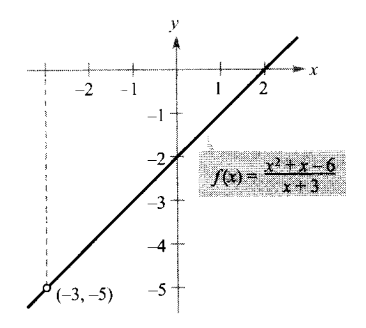


FIGURA 1.17
f no está definida para $x = -3$.

Hallar el límite $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

Solución: Aunque se trata del límite de una función racional, *no se puede* aplicar el Teorema 1.3 porque el límite del denominador es 0.

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} \quad \begin{cases} \lim_{x \to -3} (x^2 + x - 6) = 0 \\ \lim_{x \to -3} (x + 3) = 0 \end{cases}$$

La sustitución directa falla

Dado que el límite del numerador también es 0, numerador y denominador tienen el factor común $(x + 3)$. Por tanto, para todo $x \neq -3$, podemos cancelar este factor para obtener

$$\frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \frac{\cancel{(x+3)}(x - 2)}{\cancel{x+3}} = x - 2, \quad x \neq -3$$

Del Teorema 1.7, se sigue que

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \lim_{x \to -3} (x - 2) \qquad \text{Aplicar el Teorema 1.7}$$

$$= -5 \qquad \text{Usar sustitución directa}$$

Este resultado se muestra gráficamente en la Figura 1.17. Observemos que la gráfica de la función f coincide con la de la función $g(x) = x - 2$, salvo que la gráfica de f tiene un hueco en el punto $(-3, -5)$. □

En el Ejemplo 7, la sustitución directa produce la forma 0/0, que carece de significado. Tal expresión se denomina forma indeterminada porque no es posible (a partir sólo de esa forma) determinar el límite. Si al intentar evaluar un límite se llega a esta forma, debe escribirse la fracción de modo que el nuevo denominador no tenga límite 0. Una manera de conseguirlo consiste en *cancelar factores idénticos*, como se muestra en el Ejemplo 7. Otra manera es *racionalizar el numerador*, como ilustra el Ejemplo 8.

Nota. En la solución del Ejemplo 7, asegúrese de que capta la utilidad del Teorema de Factorización del Álgebra. Este teorema establece que si c es un cero de una función polinómica, entonces $(x - c)$ es un factor del polinomio. Por tanto, si aplica sustitución directa a una función racional y obtiene

$$r(c) = \frac{p(c)}{q(c)} = \frac{0}{0}$$

puede concluir que $(x - c)$ es un factor común de $p(x)$ y $q(x)$.



Puesto que las gráficas de

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} \quad \text{y} \quad g(x) = x - 2$$

difieren sólo en el punto (−3, −5), una calculadora gráfica podría no ser capaz de distinguirlas. No obstante, debido a la configuración de puntos («pixels») y a los errores de redondeo, es posible encontrar configuraciones de pantalla que distingan las gráficas. Concretamente, aplicando el zoom repetidas veces cerca del punto (−3, −5) en la gráfica de f, la calculadora podría mostrar fallos o irregularidades que no existen en la gráfica real. (Véase la Figura 1.18.) Modificando la configuración de pantalla, podría obtenerse la gráfica correcta de f.

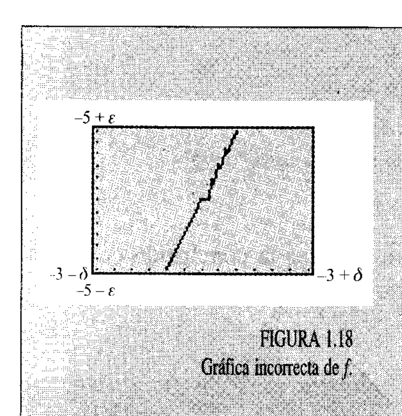


FIGURA 1.18
Gráfica incorrecta de f.

EJEMPLO 8 Técnica de racionalización

Calcular el límite $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

Solución: Por sustitución directa, se obtiene la forma indeterminada 0/0.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \begin{cases} \lim_{x \to 0} (\sqrt{x+1} - 1) = 0 \\ \lim_{x \to 0} x = 0 \end{cases}$$

La sustitución directa falla

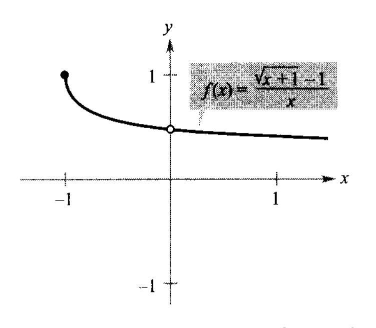


FIGURA 1.19
El límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0 es $1/2$.

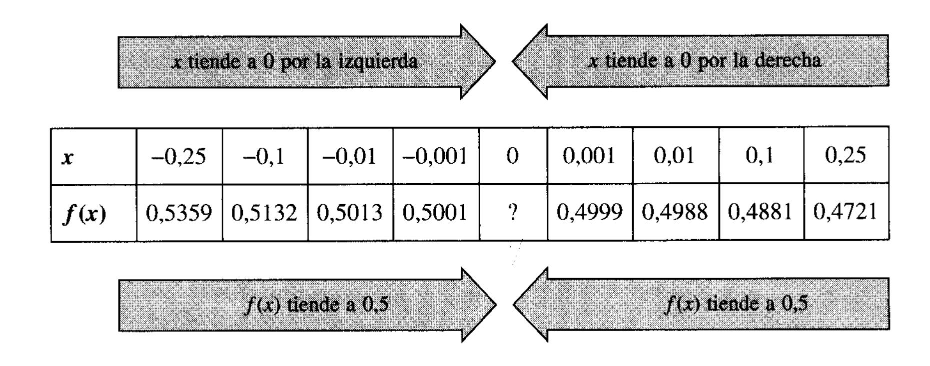
En este caso, podemos escribir la fracción racionalizando el denominador.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &= \left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right)\\ &= \frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}\\ &= \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}, \quad x \neq 0\end{aligned}$$

Ahora, usando el Teorema 1.7, se puede evaluar el límite como sigue.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\\ &= \frac{1}{1+1}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Una tabla o una gráfica pueden servir para reforzar la conclusión de que el límite es $1/2$. (Véase la Figura 1.19.)



x	−0,25	−0,1	−0,01	−0,001	0	0,001	0,01	0,1	0,25
$f(x)$	0,5359	0,5132	0,5013	0,5001	?	0,4999	0,4988	0,4881	0,4721

Nota. La técnica de racionalización para el cálculo de límites se basa en multiplicar por una forma conveniente de 1. En el Ejemplo 8, la forma apropiada es

$$1 = \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$$

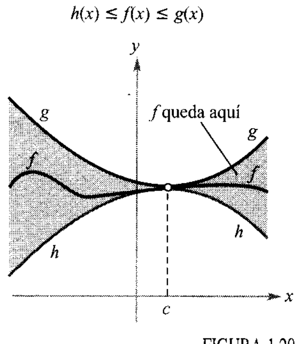


FIGURA 1.20
El teorema del encaje.

Teorema del encaje

El siguiente teorema concierne al límite de una función que está «encajada» entre otras dos, cada una de las cuales tiene el mismo límite en un valor de x dado, como ilustra la Figura 1.20. (En el apéndice se da la demostración de este teorema.)

TEOREMA 1.8 TEOREMA DEL ENCAJE

Si $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contiene c, excepto posiblemente en el propio c, y si

$$\lim_{x \to c} h(x) = L = \lim_{x \to c} g(x)$$

entonces $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y es igual a L.

En la demostración del Teorema 1.9 se aprecia la utilidad del teorema del encaje.

TEOREMA 1.9 DOS LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS ESPECIALES

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ 2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0$

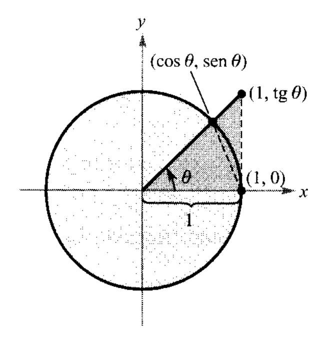
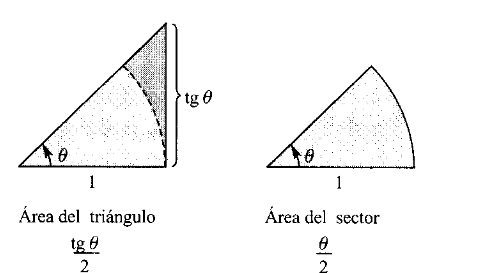


FIGURA 1.21
Para demostrar el Teorema 1.9, se usa un sector circular.

Demostración: Con el fin de evitar la confusión entre dos usos distintos de x, presentamos la demostración utilizando la variable θ, donde θ denota un ángulo agudo *medido en radianes*. La Figura 1.21 muestra un sector circular encajado entre dos triángulos.



Multiplicando cada expresión por $2/\operatorname{sen} \theta$ resulta

$$\frac{1}{\cos \theta} \geqslant \frac{\theta}{\operatorname{sen} \theta} \geqslant 1$$

y tomando inversos se obtiene

$$\cos \theta \leqslant \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} \leqslant 1$$

PARA MÁS INFORMACIÓN
Sobre la función $f(x) = \text{sen}\, x/x$, puede consultarse el artículo «The Function $(\sin x)/x$» de William B. Gearhart y Harris S. Shultz en *The College Mathematics Journal*, marzo 1990.

Como $\cos\theta = \cos(-\theta)$ y $(\text{sen}\,\theta)/\theta = [\text{sen}\,(-\theta)]/(-\theta)$, concluimos que esta desigualdad es válida para todo θ no nulo del intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$. Finalmente, dado que $\lim\limits_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$ y $\lim\limits_{\theta\to 0} 1 = 1$, podemos aplicar el teorema del encaje para concluir que $\lim\limits_{\theta\to 0} (\text{sen}\,\theta)/\theta = 1$. La demostración del valor del segundo límite se deja como ejercicio (véase el Ejercicio 103). □

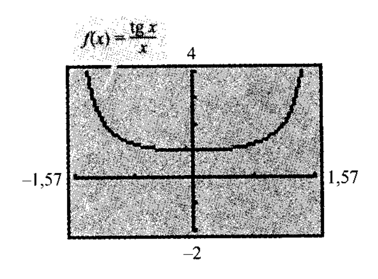


FIGURA 1.22
El límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0 es 1.

EJEMPLO 9 Un límite en el que interviene una función trigonométrica

Hallar el límite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}\, x}{x}$

Solución: La sustitución directa conduce a la forma indeterminada 0/0. Para resolver este problema, podemos escribir tg x como $(\text{sen}\, x)/(\cos x)$ y obtener

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\, x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\text{sen}\, x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

Ahora, como

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

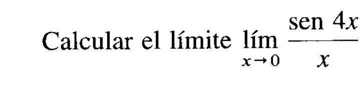
puede obtener

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\, x}{x} &= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}\right)\\ &= (1)(1)\\ &= 1\end{aligned}$$

(Véase Figura 1.22.) □

EJEMPLO 10 Un límite en el que interviene una función trigonométrica

Calcular el límite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 4x}{x}$



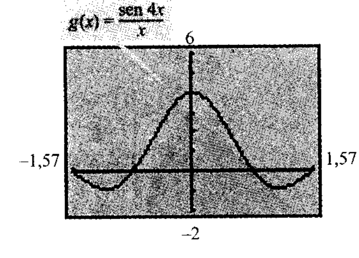


FIGURA 1.23
El límite de $g(x)$ cuando x tiende a 0 es 4.

Solución: La sustitución directa conduce a la forma indeterminada 0/0. Para resolver este problema, podemos escribir el límite como

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, 4x}{x} = 4\left(\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, 4x}{4x}\right)$$

Haciendo ahora $y = 4x$ y observando que $x \to 0$ si y sólo si $y \to 0$, podemos escribir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, 4x}{x} &= 4\left(\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, 4x}{4x}\right)\\ &= 4\left(\lim_{y\to 0} \frac{\text{sen}\, y}{y}\right)\\ &= 4(1)\\ &= 4\end{aligned}$$

(Véase Figura 1.23.) □



Una calculadora permite confirmar los límites de los ejemplos. Así, las Figuras 1.22 y 1.23 muestran las gráficas de

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{\operatorname{sen} 4x}{x}$$

Observe que la primera gráfica parece contener el punto (0, 1) y la segunda parece contener el (0, 4), lo que apoya las conclusiones obtenidas en los Ejemplos 9 y 10.

Ejercicios de la Sección 1.3

En los Ejercicios 1-4, representar la función en la calculadora y estimar visualmente los límites.

1. $h(x) = x^2 - 5x$

a) $\lim_{x\to 5} h(x)$

b) $\lim_{x\to -1} h(x)$

2. $g(x) = \dfrac{12(\sqrt{x} - 3)}{x - 9}$

a) $\lim_{x\to 4} g(x)$

b) $\lim_{x\to 0} g(x)$

3. $f(x) = x \cos x$

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$

b) $\lim_{x\to \pi/3} f(x)$

4. $f(t) = t|t - 4|$

a) $\lim_{t\to 4} f(t)$

b) $\lim_{t\to -1} f(t)$

En los Ejercicios 5-28, hallar el límite.

5. $\lim_{x\to 4} x^2$

6. $\lim_{x\to -3} (3x + 2)$

7. $\lim_{x\to 0} (2x - 1)$

8. $\lim_{x\to 1} (-x^2 + 1)$

9. $\lim_{x\to 2} (-x^2 + x - 2)$

10. $\lim_{x\to 1} (3x^3 - 2x^2 + 4)$

11. $\lim_{x\to 3} \sqrt{x + 1}$

12. $\lim_{x\to 4} \sqrt[3]{x + 4}$

13. $\lim_{x\to -4} (x + 3)^2$

14. $\lim_{x\to 0} (2x - 1)^3$

15. $\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{x}$

16. $\lim_{x\to -3} \dfrac{2}{x + 2}$

17. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 + 1}{x}$

18. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1}}{x - 4}$

19. $\lim_{x\to \pi/2} \operatorname{sen} x$

20. $\lim_{x\to \pi} \operatorname{tg} x$

21. $\lim_{x\to 1} \cos \pi x$

22. $\lim_{x\to 1} \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{2}$

23. $\lim_{x\to 0} \sec 2x$

24. $\lim_{x\to \pi} \cos 3x$

25. $\lim_{x\to 5\pi/6} \operatorname{sen} x$

26. $\lim_{x\to 5\pi/3} \cos x$

27. $\lim_{x\to 3} \operatorname{tg} \left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$

28. $\lim_{x\to 7} \sec \left(\dfrac{\pi x}{6}\right)$

En los Ejercicios 29-32, utilizar la información dada para calcular los límites.

29. $\lim_{x\to c} f(x) = 2$

$\lim_{x\to c} g(x) = 3$

a) $\lim_{x\to c} [5g(x)]$

b) $\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)]$

c) $\lim_{x\to c} [f(x)g(x)]$

d) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

30. $\lim_{x\to c} f(x) = \dfrac{3}{2}$

$\lim_{x\to c} g(x) = \dfrac{1}{2}$

a) $\lim_{x\to c} [4f(x)]$

b) $\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)]$

c) $\lim_{x\to c} [f(x)g(x)]$

d) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

31. $\lim_{x\to c} f(x) = 4$

a) $\lim_{x\to c} [f(x)]^3$

b) $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)}$

c) $\lim_{x\to c} [3f(x)]$

d) $\lim_{x\to c} [f(x)]^{3/2}$

32. $\lim_{x\to c} f(x) = 27$

a) $\lim_{x\to c} \sqrt[3]{f(x)}$

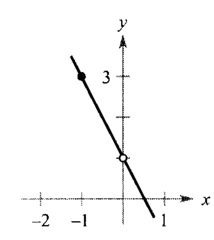
b) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{18}$

c) $\lim_{x\to c} [f(x)]^2$

d) $\lim_{x\to c} [f(x)]^{2/3}$

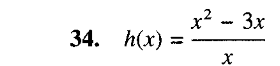
En los Ejercicios 33-36, usar la gráfica para determinar visualmente el límite (si existe). Cuando sea posible, hallar una función que coincida con la dada excepto en el punto en cuestión.

33. $g(x) = \dfrac{-2x^2 + x}{x}$

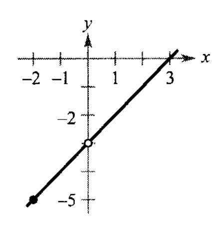


a) $\lim_{x \to 0} g(x)$

b) $\lim_{x \to -1} g(x)$

34. 

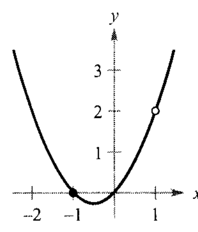
$h(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x}$



a) $\lim_{x \to -2} h(x)$

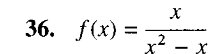
b) $\lim_{x \to 0} h(x)$

35. $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{x - 1}$

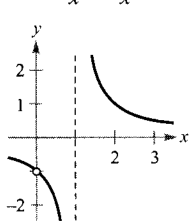


a) $\lim_{x \to 1} g(x)$

b) $\lim_{x \to -1} g(x)$

36. 

$f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x}$



a) $\lim_{x \to 1} f(x)$

b) $\lim_{x \to 0} f(x)$

En los Ejercicios 37-40, hallar el límite de la función (si existe). Encontrar una función que coincida con la dada salvo en el punto y representarla en la calculadora.

37. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

38. $\lim_{x \to -1} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x + 1}$

39. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

40. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$

En los Ejercicios 41-52, hallar el límite (si existe).

41. $\lim_{x \to 5} \dfrac{x - 5}{x^2 - 25}$

42. $\lim_{x \to 2} \dfrac{2 - x}{x^2 - 4}$

43. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

44. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}}{x}$

45. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$

46. $\lim_{x \to 0} \dfrac{[1/(x + 4)] - (1/4)}{x}$

47. $\lim_{x \to 0} \dfrac{[1/(2 + x)] - (1/2)}{x}$

48. $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3}$

49. $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{2(x + \Delta x) - 2x}{\Delta x}$

50. $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$

51. $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) + 1 - (x^2 - 2x + 1)}{\Delta x}$

52. $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$

Investigación gráfica, numérica y analítica En los Ejercicios 53-56, representar la función en la calculadora y estimar el límite. Usar una tabla para reforzar la conclusión. Después, calcular el límite por métodos analíticos.

53. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$

54. $\lim_{x \to 16} \dfrac{4 - \sqrt{x}}{x - 16}$

55. $\lim_{x \to 0} \dfrac{[1/(2 + x)] - (1/2)}{x}$

56. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^5 - 32}{x - 2}$

En los Ejercicios 57-68, determinar el límite (si existe) de la función trigonométrica.

57. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{5x}$

58. $\lim_{x \to 0} \dfrac{3(1 - \cos x)}{x}$

59. $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\sec \theta - 1}{\theta \sec \theta}$

60. $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\cos \theta \operatorname{tg} \theta}{\theta}$

61. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$

62. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x}$

63. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(1 - \cos h)^2}{h}$

64. $\lim_{\phi \to \pi} \phi \sec \phi$

65. $\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\cos x}{\operatorname{ctg} x}$

66. $\lim_{x \to \pi/4} \dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

67. $\lim_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}$

$\left[\textit{Ayuda:} \text{ Calcular el } \lim_{t \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\right)^2.\right]$

68. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$

$\left[\textit{Ayuda:} \text{ Calcular el } \lim_{x \to 0} \left(\dfrac{2 \operatorname{sen} 2x}{2x}\right)\left(\dfrac{3x}{3 \operatorname{sen} 3x}\right).\right]$

Investigación gráfica, numérica y analítica En los Ejercicios 69-72, representar la función en una calculadora y estimar el límite. Usar una tabla para corroborar la conclusión. Después, calcular el límite por métodos analíticos.

69. $\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3t}{t}$ **70.** $\lim_{h \to 0} (1 + \cos 2h)$

71. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x}$ **72.** $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x}}$

En los Ejercicios 73-76, hallar $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

73. $f(x) = 2x + 3$ **74.** $f(x) = \sqrt{x}$

75. $f(x) = \frac{4}{x}$ **76.** $f(x) = x^2 - 4x$

En los Ejercicios 77 y 78, usar el teorema del encaje para hallar $\lim_{x \to c} f(x)$.

77. $c = 0$

$4 - x^2 \leqslant f(x) \leqslant 4 + x^2$

78. $c = a$

$b - |x - a| \leqslant f(x) \leqslant b + |x - a|$

En los Ejercicios 79-84, representar en una calculadora la función dada y las ecuaciones $y = |x|$ e $y = -|x|$ en una misma ventana. Usando las gráficas para visualizar el teorema del encaje, calcular $\lim_{x \to 0} f(x)$.

79. $f(x) = x \cos x$ **80.** $f(x) = |x \operatorname{sen} x|$

81. $f(x) = |x| \operatorname{sen} x$ **82.** $f(x) = |x| \cos x$

83. $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ **84.** $h(x) = x \cos \frac{1}{x}$

85. ***Redacción*** Representar en una calculadora

$$f(x) = x,\ g(x) = \operatorname{sen} x,\ \text{y}\ h(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

en una misma pantalla. Comparar $f(x)$ y $g(x)$ cuando x es «próximo a» 0. Utilizar esta comparación para explicar en unas líneas por qué

$$\lim_{x \to 0} h(x) = 1$$

86. ***Redacción*** Usando una calculadora, representar

$$f(x) = x,\ g(x) = \operatorname{sen}^2 x,\ \text{y}\ h(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$$

en una misma ventana. Comparar $f(x)$ y $g(x)$ cuando x es «próximo a» 0. Utilizar esta comparación para explicar en unas líneas por qué

$$\lim_{x \to 0} h(x) = 0$$

Objeto en caída libre En los Ejercicios 87 y 88, debe usarse la función posición $s(t) = -16t^2 + 1.000$, que da la altura (en pies) de un objeto que lleva cayendo t segundos desde una altura de 1.000 pies. La velocidad en el instante $t = a$ segundos viene dada por

$$\lim_{t \to a} \frac{s(a) - s(t)}{a - t}$$

87. Si a un obrero de la construcción se le cae una llave inglesa desde una altura de 1.000 pies, ¿con qué velocidad estará cayendo la llave tras 5 segundos?

88. Si a un obrero de la construcción se le cae una llave inglesa desde una altura de 1.000 pies, ¿cuándo golpeará el suelo la llave? ¿A qué velocidad se producirá el impacto?

Si a un obrero de la construcción se le cae una llave inglesa desde una altura de 1.000 pies y grita «¡Cuidado ahí abajo!», ¿cuánto tiempo deberá permanecer apartada de la trayectoria una persona en el suelo? El Ejercicio 88 proporciona parte de la respuesta.

Objeto en caída libre En los Ejercicios 89 y 90, debe usarse la función posición $s(t) = 4{,}9t^2 + 150$, que da la altura (en metros) de un objeto que cae desde una altura de 150 m. La velocidad en el instante $t = a$ segundos viene dada por

$$\lim_{t \to a} \frac{s(a) - s(t)}{a - t}$$

89. Determinar la velocidad del objeto cuando $t = 3$.

90. ¿A qué velocidad impactará el suelo el objeto?

91. ***Un modelo matemático*** La velocidad de mecanografiado media de un alumno de mecanografía tras t semanas de clases se da en la tabla.

t	5	10	15	20	25	30
S	28	56	79	90	93	94

a) Construir una curva con los datos.
b) ¿Parece existir una velocidad de mecanografiado límite? Explicar la respuesta.

92. Encontrar dos funciones f y g tales que $\lim_{x \to 0} f(x)$ y $\lim_{x \to 0} g(x)$ no existen pero existe $\lim_{x \to 0} [f(x) + g(x)]$.

93. Demostrar que si $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)]$ no existe, entonces $\lim_{x \to c} g(x)$ no existe.

94. Demostrar la propiedad 1 del Teorema 1.1.

95. Demostrar la propiedad 3 del Teorema 1.1. (Puede utilizarse la propiedad 3 del Teorema 1.2.)

96. Demostrar la propiedad 1 del Teorema 1.2.

97. ***¿Verdadero o falso?*** Si $f(x) < g(x)$ para todo $x \neq a$, ¿es cierto que $\lim_{x \to a} f(x) < \lim_{x \to a} g(x)$? Si es falso, explicar por qué o dar un ejemplo que pruebe la falsedad.

98. Probar que si $\lim_{x \to c} f(x) = 0$, entonces $\lim_{x \to c} |f(x)| = 0$.

99. Probar que si $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ y $|g(x)| \leqslant M$ para un número fijo M y todo $x \neq c$, entonces $\lim_{x \to c} f(x)g(x) = 0$.

100. Probar que si $\lim_{x \to c} |f(x)| = 0$, entonces $\lim_{x \to c} f(x) = 0$.

(*Nota:* Éste es el recíproco del Ejercicio 98.)

101. Probar que si $\lim_{x \to c} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \to c} |f(x)| = |L|$.

[*Ayuda:* Usar la desigualdad $||f(x)| - |L|| \leqslant |f(x) - L|$.]

102. ***Para pensar*** Hallar una función f que muestre que el recíproco del Ejercicio 101 no es cierto. [*Ayuda:* Buscar una función f tal que $\lim_{x \to c} |f(x)| = |L|$ pero $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe.]

103. Demostrar la segunda parte del Teorema 1.9 probando que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

104. Sean $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

y

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ x, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Calcular (si es posible) $\lim_{x \to 0} f(x)$ y $\lim_{x \to 0} g(x)$.

105. ***Razonamiento gráfico*** Consideremos la función $f(x) = \dfrac{\sec x - 1}{x^2}$.

a) Determinar el dominio de f.
b) Representar f en una calculadora. ¿Es evidente el dominio de f a partir de la gráfica? Si no lo es, explicar por qué.
c) Utilizando la gráfica de f, estimar $\lim_{x \to 0} f(x)$.
d) Confirmar la respuesta al apartado *c*) analíticamente.

106. ***Aproximación***

a) Hallar $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.
b) Usar el resultado del apartado *a*) para obtener la aproximación $\cos x \approx 1 - 1/2\, x^2$ para x cercanos a 0.
c) Aplicando el resultado de *b*), estimar cos (0,1).
d) Utilizando una calculadora, estimar cos (0,1) con cuatro cifras decimales exactas. Comparar el resultado con el del apartado *c*).

107. ***Redacción*** Discutir qué significa, en el contexto del cálculo de límites, que dos funciones coincidan salvo en un punto.

CONTENIDO ▪
Continuidad en un punto y en un intervalo abierto ▪
Límites laterales y continuidad en un intervalo cerrado ▪
Propiedades de la continuidad ▪
Teorema del valor intermedio ▪

1.4 Continuidad y límites laterales

Continuidad en un punto y en un intervalo abierto

En Matemáticas, el término *continuo* tiene prácticamente el mismo significado que en su uso cotidiano. Decir que una función es continua en $x = c$ significa que no hay interrupción de la gráfica de f en c. Esto es, la gráfica no tiene en c agujeros, saltos ni aberturas. La Figura 1.24 exhibe tres valores de x en los que la gráfica de f *no es* continua. En los demás puntos del intervalo (a, b), la gráfica no sufre interrupciones y es continua.

EXPLORACIÓN

De modo informal, se podría decir que una función es continua en un intervalo abierto si su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Represente en la calculadora cada una de las siguientes funciones en el intervalo indicado. A la vista de las gráficas, ¿qué funciones diría que son continuas en el intervalo? ¿Piensa que puede confiar en los resultados obtenidos gráficamente? Explique su razonamiento.

Función	*Intervalo*
a) $y = x^2 + 1$	$(-3, 3)$
b) $y = \dfrac{1}{x-2}$	$(-3, 3)$
c) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$	$(-\pi, \pi)$
d) $y = \dfrac{x^2-4}{x+2}$	$(-3, 3)$
e) $y = \begin{cases} 2x-4, & x \leq 0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$	$(-3, 3)$

PARA MÁS INFORMACIÓN Sobre el concepto de continuidad véase el artículo «Leibniz and the Spell of the Continuous» de Hardy Grant en *The College Mathematics Journal*, septiembre 1994.

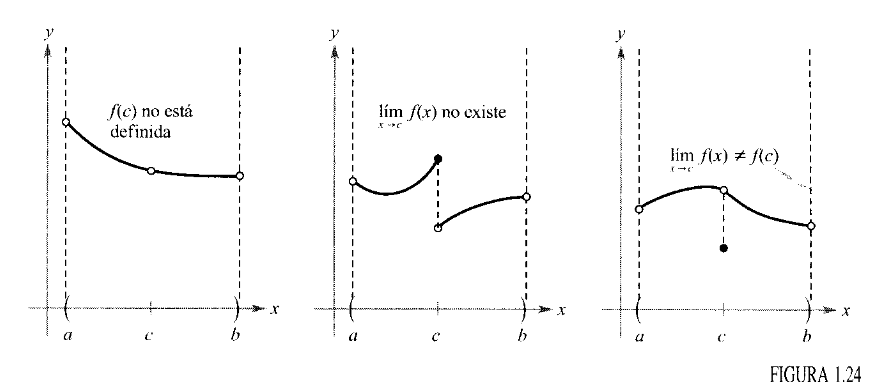


FIGURA 1.24
Existen tres condiciones para que el gráfico de f no sea continuo en $x = c$.

En la Figura 1.24, parece que la continuidad en $x = c$ puede destruirse por cualquiera de las siguientes condiciones.

1. La función no está definida en $x = c$.
2. No existe el límite de $f(x)$ en $x = c$.
3. El límite de $f(x)$ en $x = c$ existe, pero no es igual a $f(c)$.

Si no se da *ninguna* de las tres condiciones de arriba, se dice que la función f es **continua en *c***, como indica la importante definición que sigue.

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD

Continuidad en un punto: Decimos que una función f es **continua en *c*** si se satisfacen las tres condiciones siguientes.

1. $f(c)$ está definida.
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Continuidad en un intervalo abierto: Decimos que una función es **continua en un intervalo abierto (*a*, *b*)** si es continua en cada punto del intervalo. Una función que es continua en toda la recta real $(-\infty, \infty)$ se llama **continua en todas partes**.

Consideremos un intervalo abierto I que contiene un número real c. Si una función f está definida en I (salvo, posiblemente, en c) y no es continua en c, se dice que f tiene una **discontinuidad** en c. Las discontinuidades se distribuyen en dos categorías: **evitables** e **inevitables**. Una discontinuidad en c se denomina evitable si f se puede hacer continua definiendo (o redefiniendo) apropiadamente $f(c)$. Por ejemplo, las funciones de las Figuras 1.25*a* y *c* presentan discontinuidades evitables en c, mientras que la de la Figura 1.25*b* posee una discontinuidad inevitable en c.

EJEMPLO 1 Continuidad de una función

Discutir la continuidad de cada función.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *b*) $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

c) $h(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leqslant 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$ *d*) $y = \text{sen } x$

Solución:

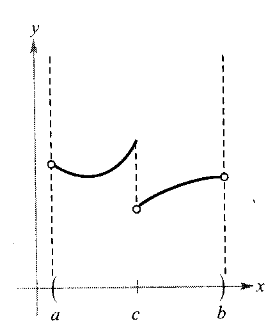
a) El dominio de f lo constituyen todos los números reales no nulos. Por el Teorema 1.3, se puede concluir que f es continua en todos los valores de x de su dominio. En $x = 0$, f tiene una discontinuidad inevitable, como muestra la Figura 1.26*a*. En otras palabras, no hay modo de definir $f(0)$ para hacer que la nueva función sea continua en $x = 0$.

b) El dominio de g lo constituyen todos los números reales excepto $x = 1$. Aplicando el Teorema 1.3, podemos concluir que g es continua en todos los valores de x de su dominio. En $x = 1$, la función presenta una discontinuidad evitable (véase Figura 1.26*b*). Si se define $g(1)$ como 2, la «nueva» función es continua en todos los números reales.

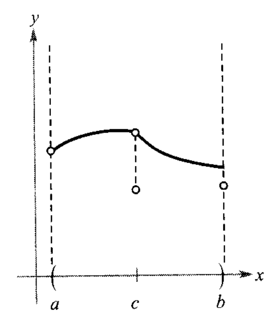
c) El dominio de h está formado por todos los números reales. La función h es continua en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$ y, puesto que $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 1$, h es continua en toda la recta real, como ilustra la Figura 1.26*c*.

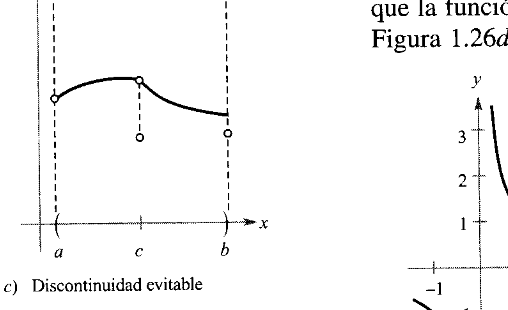
d) El dominio de y es toda la recta real. Por el Teorema 1.6, se puede concluir que la función es continua en todo su dominio $(-\infty, \infty)$, como ilustra la Figura 1.26*d*.

a) Discontinuidad evitable



b) Discontinuidad inevitable

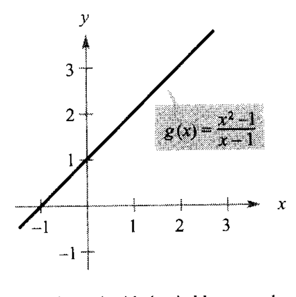




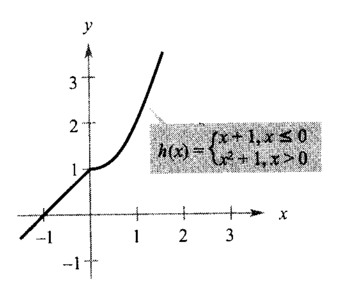
c) Discontinuidad evitable

FIGURA 1.25

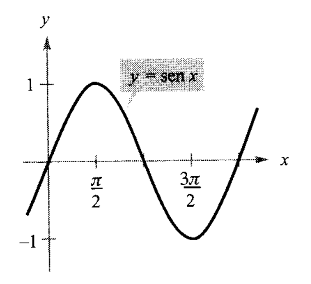
a) Discontinuidad inevitable en $x = 0$



b) Discontinuidad evitable en $x = 1$



c) Continua en toda la recta real



d) Continua en toda la recta real

FIGURA 1.26 □

Límites laterales y continuidad en un intervalo cerrado

Para comprender la noción de continuidad en un intervalo cerrado, es necesario estudiar antes un tipo diferente de límite, llamado límite lateral. Por ejemplo, el **límite por la derecha** significa que x tiende a c por valores superiores a c. Este límite se denota

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Límite por la derecha

De forma similar, **el límite por la izquierda** significa que x tiende a c por valores inferiores a c. Este límite se denota

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

Límite por la izquierda

Los límites laterales son útiles al tomar límites de funciones que contienen raíces. Por ejemplo, si n es un entero dado,

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt[n]{x} = 0$$

EJEMPLO 2 Un límite lateral

Hallar el límite de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ cuando x tiende a -2 por la derecha.

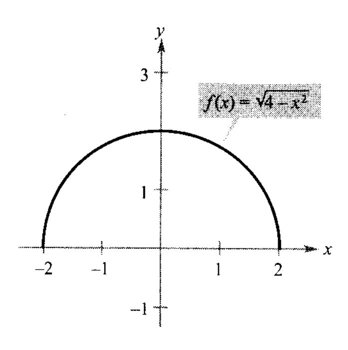


FIGURA 1.27
El límite de $f(x)$ cuando x tiende a -2 por la derecha es 0.

Solución: Como se indica en la Figura 1.27, el límite cuando x tiende a -2 por la derecha es

$$\lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0$$ □

Los límites laterales pueden usarse para investigar el comportamiento de las **funciones escalón**. Un tipo común de función escalón es la función parte entera $[\![x]\!]$, definida por

$$[\![x]\!] = \text{mayor entero } n \text{ tal que } n \leqslant x$$

Función parte entera

Por ejemplo, $[\![2{,}5]\!] = 2$ y $[\![-2{,}5]\!] = -3$.

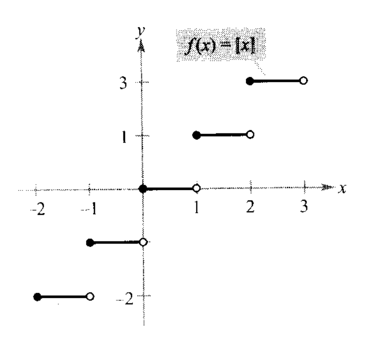


FIGURA 1.28
La función parte entera.

EJEMPLO 3 La función parte entera

Hallar el límite de la función parte entera $f(x) = [\![x]\!]$ cuando x tiende a 0 por la izquierda y cuando x tiende a 0 por la derecha.

Solución: Como muestra la Figura 1.28, el límite cuando x tiende a 0 *por la izquierda* viene dado por

$$\lim_{x \to 0^-} [\![x]\!] = -1$$

mientras que el límite cuando x tiende a 0 *por la derecha* viene dado por

$$\lim_{x \to 0^+} [\![x]\!] = 0$$

La función parte entera no es continua en 0 debido a que los límites por la izquierda y por la derecha en 0 son diferentes. Mediante un razonamiento similar, se puede concluir que la función parte entera no es continua en ningún entero n. □

Cuando el límite por la izquierda no es igual al límite por la derecha, el límite (bilateral) *no* existe. El siguiente teorema hace más explícito este resultado. Su demostración se obtiene directamente de la definición de límite lateral.

TEOREMA 1.10 EXISTENCIA DEL LÍMITE

Sea f una función, y sean c y L números reales. El límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es L si y sólo si

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

El concepto de límite lateral nos permite extender la definición de continuidad a intervalos cerrados. Básicamente, se dice que una función es continua en un intervalo cerrado si es continua en el interior del intervalo y posee continuidad lateral en los extremos. Enunciamos esto formalmente como sigue.

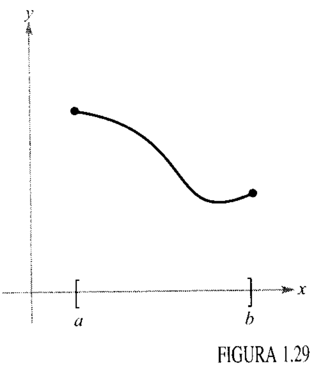


FIGURA 1.29
Función continua en un intervalo cerrado.

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD EN UN INTERVALO CERRADO

Se dice que una función f es **continua en el intervalo cerrado [a, b]** si es continua en el intervalo abierto (a, b) y

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

La función es **continua por la derecha** en a y **continua por la izquierda** en b (véase Figura 1.29).

Se pueden dar definiciones análogas para incluir la continuidad en intervalos de la forma $(a, b]$ o $[a, b)$, que no son abiertos ni cerrados, o en intervalos infinitos. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \sqrt{x}$$

es continua en el intervalo infinito $[0, \infty)$, y la función

$$g(x) = \sqrt{2 - x}$$

es continua en el intervalo $(-\infty, 2]$.

EJEMPLO 4 Continuidad en un intervalo cerrado

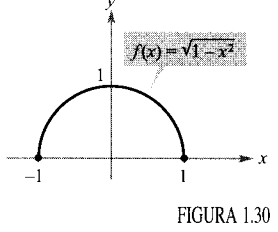


FIGURA 1.30
Función continua en [−1, 1].

Discutir la continuidad de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Solución: El dominio de f es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. En todos los puntos del intervalo abierto $(-1, 1)$, la continuidad de f es consecuencia de los Teoremas 1.4 y 1.5. Además, dado que

$$\lim_{x \to -1^+} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(-1) \qquad \text{Continua por la derecha}$$

y

$$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(1) \qquad \text{Continua por la izquierda}$$

podemos concluir que f es continua en el intervalo cerrado $[-1, 1]$, como ilustra la Figura 1.30. □

El siguiente ejemplo muestra cómo se puede aplicar un límite lateral a la determinación del cero absoluto en la escala Kelvin.

EJEMPLO 5 Ley de Charles y cero absoluto

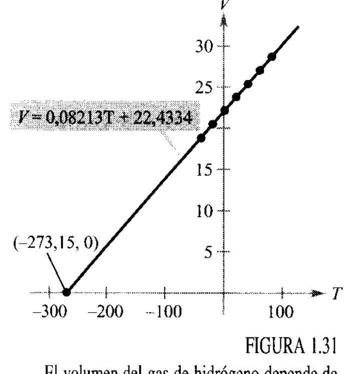


FIGURA 1.31
El volumen del gas de hidrógeno depende de su temperatura.

En la escala Kelvin, el *cero absoluto* es la temperatura 0 K. Pese a que se han conseguido temperaturas de aproximadamente 0,0001 K en los laboratorios, nunca se ha alcanzado el cero absoluto. De hecho, la evidencia sugiere que *no se puede* alcanzar el cero absoluto. ¿Cómo determinaron los científicos que 0 K es el «límite inferior» de la temperatura de la materia? ¿Cuál es el cero absoluto en la escala Celsius?

Solución: La determinación del cero absoluto proviene del trabajo del físico francés Jacques Charles (1746-1823). Charles descubrió que el volumen de un gas a presión constante crece linealmente con la temperatura. La tabla de la página siguiente ilustra esta relación entre volumen y temperatura. La tabla se

refiere a un mol de hidrógeno que se mantiene a una presión constante de una atmósfera. El volumen V se mide en litros y la temperatura T se mide en grados Celsius.

T	−40	−20	0	20	40	60	80
V	19,1482	20,7908	22,4334	24,0760	25,7186	27,3612	29,0038

Los puntos que representa la tabla se muestran en la Figura 1.31. Usando los puntos de la tabla, se puede determinar además que T y V están relacionados por la ecuación lineal

$$V = 0{,}08213T + 22{,}4334 \quad \text{o} \quad T = \frac{V - 22{,}4334}{0{,}08213}$$

Razonando que el volumen del gas puede tender a 0 (pero nunca pasar a valores negativos) se puede concluir que la «mínima temperatura posible» viene dada por

$$\begin{aligned} \lim_{V\to 0^+} T &= \lim_{V\to 0^+} \frac{V - 22{,}4334}{0{,}08213} \\ &= \frac{0 - 22{,}4334}{0{,}08213} \qquad \text{Usar sustitución directa} \\ &\approx -273{,}15 \end{aligned}$$

Por tanto, el cero absoluto en la escala Kelvin (0 K) es aproximadamente −273,15° en la escala Celsius. □

La tabla muestra las temperaturas del Ejemplo 5, en escala Fahrenheit. Intente repetir la solución del Ejemplo 5 utilizando estas temperaturas y volúmenes. Use el resultado para hallar el valor del cero absoluto en la escala Fahrenheit.

La lanzadera espacial emplea hidrógeno líquido y oxígeno líquido como combustible. El hidrógeno líquido debe almacenarse a temperatura entre −262 °C y −253 °C. A temperaturas más bajas, el hidrógeno sería un sólido, mientras que a temperaturas más altas sería un gas.

T	−40	−4	32	68	104	140	176
V	19,1482	20,7908	22,4334	24,0760	25,7186	27,3612	29,0038

Nota. La Ley de Charles para los gases (suponiendo presión constante) puede enunciarse como

$$V = RT \qquad \text{Ley de Charles}$$

donde V es el volumen, R es una constante y T es la temperatura. En este enunciado de la ley, ¿qué propiedad debe tener la escala de temperaturas?

Propiedades de la continuidad

Cada una de las propiedades de los límites analizadas en la Sección 1.3 conduce a una propiedad correspondiente relativa a la continuidad de una función. Por ejemplo, el Teorema 1.11 es consecuencia directa del Teorema 1.2.

TEOREMA 1.11 PROPIEDADES DE LA CONTINUIDAD

Si b es un número real y f, g son continuas en $x = c$, entonces las siguientes funciones también son continuas en c.

1. **Múltiplo escalar: bf**
2. **Suma y diferencia: $f \pm g$**
3. **Producto: fg**
4. **Cociente: $\frac{f}{g}$, si $g(c) \neq 0$**

FUNCIÓN CONTINUA

Augustin-Louis Cauchy introdujo por primera vez el concepto de función continua en 1821. La definición dada en su libro *Cours d'Analyse* establecía que cambios infinitamente pequeños en y eran el resultado de cambios infinitamente pequeños en x. «...$f(x)$ se llamará una función *continua* si... los valores numéricos de la diferencia $f(x + \alpha) - f(x)$ decrecen infinitamente con los de α...»

Las funciones de los tipos siguientes son continuas en sus dominios.

1. Funciones polinómicas: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
2. Funciones racionales: $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}, \quad q(x) \neq 0$
3. Funciones radicales: $f(x) = \sqrt[n]{x}$
4. Funciones trigonométricas: $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$

Combinando el Teorema 1.11 con este resumen, se puede concluir que una gran variedad de funciones elementales son continuas en sus dominios.

EJEMPLO 6 Aplicación de las propiedades de la continuidad

Por el Teorema 1.11, cada una de las siguientes funciones es continua en todos los puntos de su dominio.

$$f(x) = x + \operatorname{sen} x, \quad f(x) = 3 \operatorname{tg} x, \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{\cos x}$$ □

El próximo teorema, consecuencia del Teorema 1.5, permite determinar la continuidad de funciones compuestas, como

$$f(x) = \operatorname{sen} 3x, \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad f(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$$

TEOREMA 1.12 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Si g es continua en c y f es continua en $g(c)$, la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en c.

Nota. Como consecuencia del Teorema 1.12, si f y g satisfacen sus condiciones, se deduce que el límite de $f(g(x))$ cuando x tiende a c es

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(g(c))$$

EJEMPLO 7 Investigación de la continuidad

Describir el intervalo o intervalos en que es continua cada función.

a) $f(x) = \operatorname{tg} x$ *b*) $g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ *c*) $h(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Solución:

a) La función tangente $f(x) = \operatorname{tg} x$ no está definida en los puntos

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad \text{con } n \text{ entero}$$

En todos los demás puntos es continua. Así pues, $f(x) = \operatorname{tg} x$ es continua en todos los intervalos abiertos

$$\ldots, \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \ldots$$

como muestra la Figura 1.32*a*.

b) Como $y = 1/x$ es continua excepto en $x = 0$ y la función seno es continua en toda la recta real, resulta que $y = \operatorname{sen}(1/x)$ es continua en todos los valores reales salvo $x = 0$. En $x = 0$, no existe el límite de $g(x)$ (véase Ejemplo 5, Sección 1.2). Por tanto, g es continua en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$, como se indica en la Figura 1.32*b*.

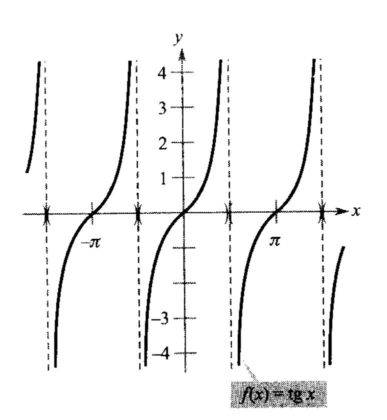
c) Esta función es similar a la de la parte *b*), excepto que las oscilaciones están amortiguadas por el factor x. Aplicando el teorema del encaje, obtenemos

$$-|x| \leqslant x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant |x|, \qquad x \neq 0$$

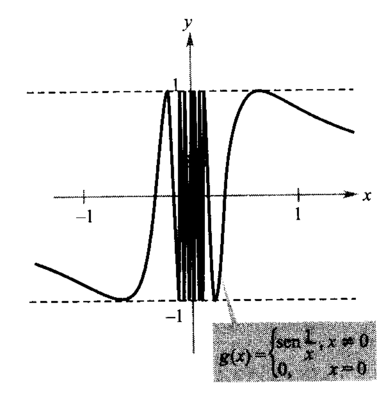
y podemos concluir que

$$\lim_{x \to 0} h(x) = 0$$

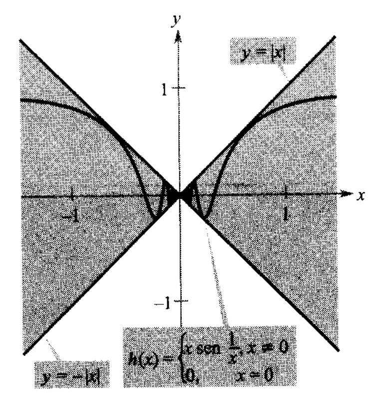
Por tanto, h es continua en toda la recta real (véase Figura 1.32*c*).



a) *f* es continua en cada intervalo abierto de su dominio



b) *g* es continua en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$



c) *h* es continua en toda la recta real

FIGURA 1.32 □

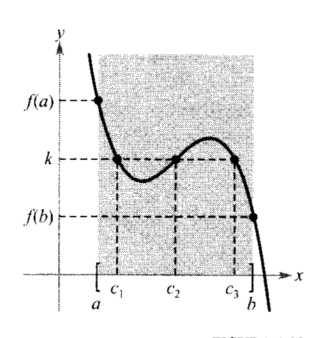


FIGURA 1.33
f es continua en $[a, b]$.
[Existen 3 números c tales que $f(c) = k$.]

Teorema del valor intermedio

Concluiremos esta sección con un importante teorema que concierne al comportamiento de las funciones continuas en un intervalo cerrado.

TEOREMA 1.13 TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y k es cualquier número entre $f(a)$ y (b), existe al menos un número c en $[a, b]$ tal que $f(c) = k$.

Nota. El teorema del valor intermedio asegura que existe al menos un c, pero no proporciona un método para encontrarlo. Tales teoremas se denominan **teoremas de existencia**.

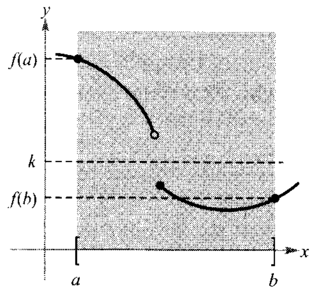


FIGURA 1.34
f no es continua en $[a, b]$.
[No existen números c tales que $f(c) = k$.]

Consultando un libro de cálculo avanzado se ve que este resultado se demuestra recurriendo a una propiedad de los números reales que se llama *«completitud»*. El teorema del valor intermedio establece que para una función continua, si x recorre todos los valores desde a hasta b, entonces $f(x)$ debe tomar todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$. Como ilustración sencilla de este hecho, si un niño medía 1,50 m al cumplir 13 años y 1,62 m al cumplir 14 años, en algún momento entre esos dos cumpleaños medía 1,55 m. Y lo mismo es cierto para todo valor h de la altura que esté entre 1,50 m y 1,62 m. Esto parece razonable, ya que damos por supuesto que la altura de un ser humano varía de forma continua, sin cambios o saltos bruscos.

El teorema del valor intermedio asegura la existencia de *al menos* un número c en el intervalo cerrado $[a, b]$. Puede, claro está, haber más de uno, como indica la Figura 1.33. Una función discontinua puede no poseer la propiedad del valor intermedio. Por ejemplo, la gráfica de la función discontinua de la Figura 1.34 salta sobre la recta horizontal dada por $y = k$, sin que haya ningún valor c en el que $f(c) = k$.

El teorema del valor intermedio suele ser útil para localizar los ceros de una función continua en un intervalo cerrado. Específicamente, si f es continua en $[a, b]$ y $f(a), f(b)$ difieren en signo, entonces el citado teorema nos asegura la existencia de al menos un cero de f en el intervalo cerrado $[a, b]$.

EJEMPLO 8 Una aplicación del teorema del valor intermedio

Usando el teorema del valor intermedio, probar que la función polinómica

$$f(x) = x^3 + 2x - 1$$

tiene un cero en el intervalo $[0, 1]$.

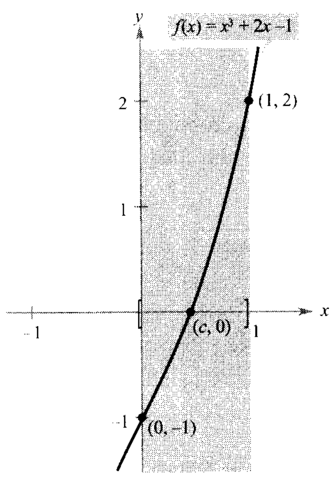


FIGURA 1.35
f es continua en [0, 1] y cumple $f(0) < 0, f(1) > 0$.

Solución: Observemos que f es continua en el intervalo cerrado [0, 1]. Dado que

$$f(0) = 0^3 + 2(0) - 1 = -1$$

y

$$f(1) = 1^3 + 2(1) - 1 = 2$$

resulta que $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$. Podemos, pues, aplicar el teorema del valor intermedio y concluir que debe haber algún c en [0, 1] tal que

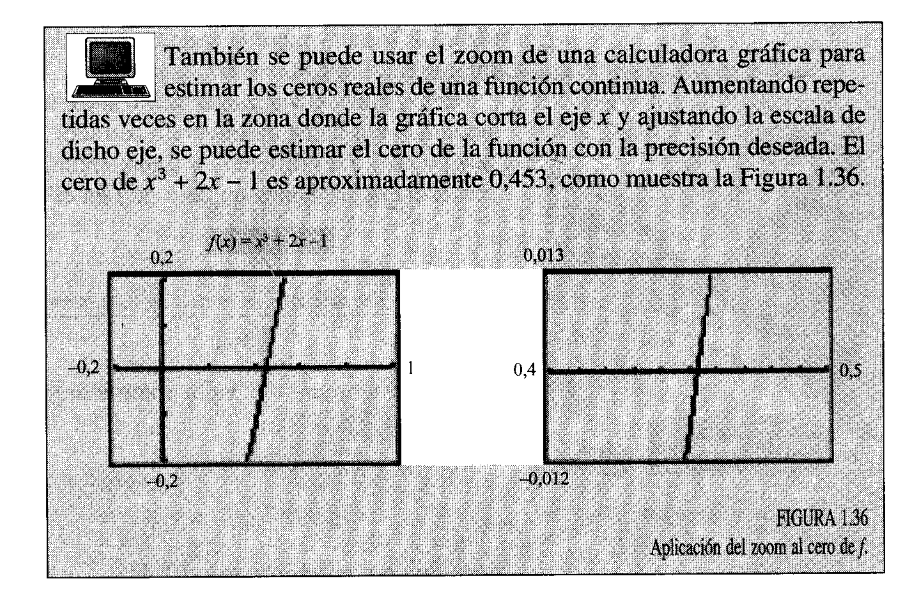
$$f(c) = 0 \qquad f \text{ posee algún cero en el intervalo cerrado } [0, 1]$$

como muestra la Figura 1.35. □

El método de bisección para localizar aproximadamente los ceros reales de una función continua es similar al método empleado en el Ejemplo 8. Si se sabe que existe un cero en el intervalo cerrado $[a, b]$, dicho cero debe pertenecer al intervalo

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \quad \text{o en} \quad \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

Mirando el signo de $f([a + b]/2)$, podemos determinar qué intervalo contiene el cero. Mediante reiteradas bisecciones del intervalo, podemos «cercar» el cero de la función.

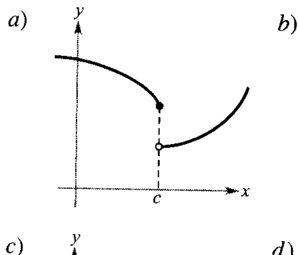


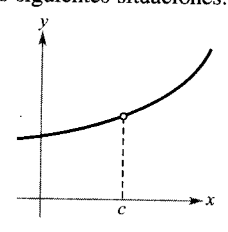
También se puede usar el zoom de una calculadora gráfica para estimar los ceros reales de una función continua. Aumentando repetidas veces en la zona donde la gráfica corta el eje x y ajustando la escala de dicho eje, se puede estimar el cero de la función con la precisión deseada. El cero de $x^3 + 2x - 1$ es aproximadamente 0,453, como muestra la Figura 1.36.

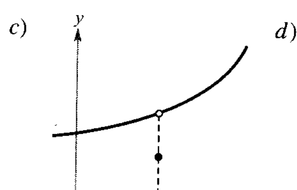
FIGURA 1.36
Aplicación del zoom al cero de f.

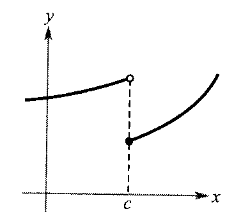
Ejercicios de la Sección 1.4

1. ***Para pensar*** Establecer cómo se destruye la continuidad en $x = c$ en cada una de las siguientes situaciones.

a)


b)


c)


d)


2. ***Redacción*** Describir la diferencia entre discontinuidad evitable e inevitable. En la explicación, dar ejemplos de:
   a) Una función con una discontinuidad inevitable en $x = 2$.
   b) Una función con una discontinuidad evitable en $x = -2$.
   c) Una función que presente las dos características descritas en los apartados *a)* y *b)*.

3. ***Para pensar*** Esbozar la gráfica de una función tal que

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 1$$

y

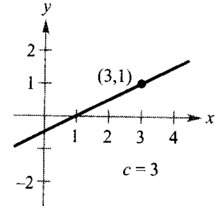
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 0$$

¿Es la función continua en $x = 3$? Explicar la respuesta.

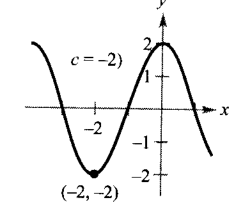
4. ***Para pensar*** Si las funciones f y g son continuas en todos los x reales, ¿es siempre $f + g$ continua en todos los x reales?, ¿y f/g? Si alguna de las dos no es necesariamente continua, dar un ejemplo para verificar la conclusión.

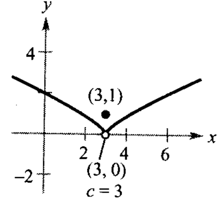
En los Ejercicios 5-10, determinar el límite usando la gráfica.

a) $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ *b)* $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ *c)* $\lim\limits_{x\to c} f(x)$

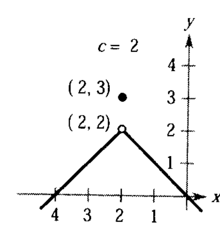
5.


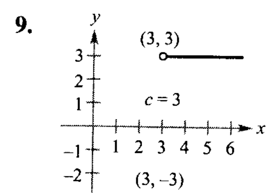
6.

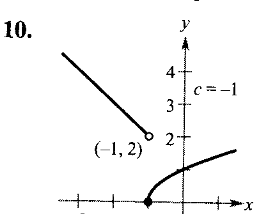


7.


8.



9.


10.


En los Ejercicios 11-26, hallar el límite (si existe).

11. $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{x-5}{x^2-25}$

12. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2-x}{x^2-4}$

13. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

14. $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$

16. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

17. $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-} \dfrac{\dfrac{1}{x+\Delta x} - \dfrac{1}{x}}{\Delta x}$

18. $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+} \dfrac{(x+\Delta x)^2 + x + \Delta x - (x^2+x)}{\Delta x}$

19. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{2}, & x \leqslant 3 \\ \dfrac{12-2x}{3}, & x > 3 \end{cases}$

20. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & x < 2 \\ -x^2 + 4x - 2, & x \geqslant 2 \end{cases}$

21. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x < 1 \\ x + 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$

22. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 1 \\ 1 - x, & x > 1 \end{cases}$

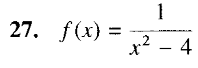
23. $\lim\limits_{x\to \pi} \operatorname{ctg} x$

24. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \sec x$

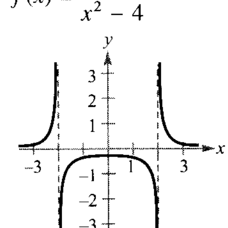
25. $\lim\limits_{x\to 3^-} (2[\![x]\!] - 1)$

26. $\lim\limits_{x\to 2^+} (2x - [\![x]\!])$

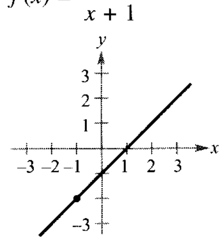
En los Ejercicios 27-30, hallar los valores de x (si hay alguno) en los que f no es continua.



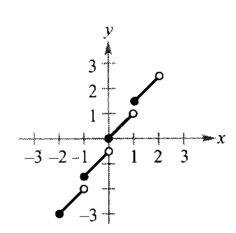
27. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$



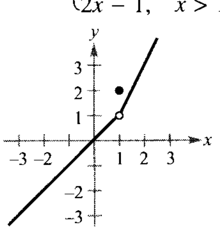
28. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$



29. $f(x) = \dfrac{1}{2}[\![x]\!] + x$



30. $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$



En los Ejercicios 31-52, hallar los valores de x (si existe alguno) en los que f no es continua. ¿Qué discontinuidades son evitables?

31. $f(x) = x^2 - 2x + 1$

32. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

33. $f(x) = x + \operatorname{sen} x$

34. $f(x) = \cos \dfrac{\pi x}{2}$

35. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

36. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

37. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

38. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$

39. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 3x - 10}$

40. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + x - 2}$

41. $f(x) = \dfrac{|x + 2|}{x + 2}$

42. $f(x) = \dfrac{|x - 3|}{x - 3}$

43. $f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & x < 1 \\ x^2, & x \geqslant 1 \end{cases}$

45. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x \leqslant 2 \\ 3 - x, & x > 2 \end{cases}$

46. $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leqslant 2 \\ x^2 - 4x + 1, & x > 2 \end{cases}$

47. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{cosec} \dfrac{\pi x}{6}, & |x - 3| \leqslant 2 \\ 2, & |x - 3| > 2 \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4}, & |x| < 1 \\ x, & |x| \geqslant 1 \end{cases}$

49. $f(x) = \operatorname{cosec} 2x$

50. $f(x) = \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$

51. $f(x) = [\![x - 1]\!]$

52. $f(x) = x - [\![x]\!]$

En los Ejercicios 53 y 54, representar la función en la calculadora. A partir de la gráfica, estimar

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

¿Es la función continua en toda la recta real?

53. $f(x) = \dfrac{|x^2 - 4|x}{x + 2}$

54. $f(x) = \dfrac{|x^2 + 4x|(x + 2)}{x + 4}$

En los Ejercicios 55-58, determinar los valores de las constantes a y b que hacen que la función sea continua en toda la recta real.

55. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leqslant 2 \\ ax^2, & x > 2 \end{cases}$

56. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{4 \operatorname{sen} x}{x}, & x < 0 \\ a - 2x, & x \geqslant 0 \end{cases}$

57. $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leqslant -1 \\ ax + b, & -1 < x < 3 \\ -2, & x \geqslant 3 \end{cases}$

58. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}, & x \neq a \\ 8, & x = a \end{cases}$

En los Ejercicios 59-62, discutir la continuidad de la función compuesta $h(x) = f(g(x))$.

59. $f(x) = x^2$

$g(x) = x - 1$

60. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$g(x) = x - 1$

61. $f(x) = \dfrac{1}{(x - 6)}$

$g(x) = x^2 + 5$

62. $f(x) = \operatorname{sen} x$

$g(x) = x^2$

En los Ejercicios 63-66, representar la función en la calculadora. Utilizar la gráfica para determinar todos los valores de x en los que la función no es continua.

63. $f(x) = [\![x]\!] - x$

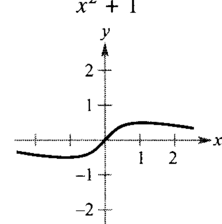
64. $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$

65. $g(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x \leqslant 3 \\ x^2 - 2x, & x > 3 \end{cases}$

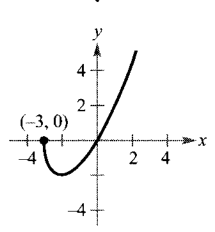
66. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{x}, & x < 0 \\ 5x, & x \geqslant 0 \end{cases}$

En los Ejercicios 67-70, hallar los intervalos en los que la función es continua.

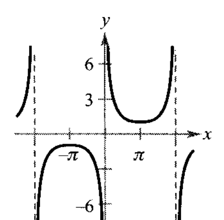
67. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$



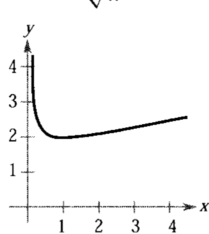
68. $f(x) = x\sqrt{x + 3}$



69. $f(x) = \operatorname{cosec} \dfrac{x}{2}$



70. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$



Redacción En los Ejercicios 71 y 72, usar una calculadora para representar la función en el intervalo [−4, 4]. *¿Parece* continua en el intervalo la gráfica de la función? ¿Es continua la función en [−4, 4]? Escribir unas líneas acerca de la importancia de examinar una función analíticamente además de hacerlo gráficamente.

71. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

72. $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$

Redacción En los Ejercicios 73 y 74, explicar por escrito por qué la función posee un cero en el intervalo especificado.

73. $f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad [2, 4]$

74. $f(x) = x^3 + 3x - 2, \quad [0, 1]$

En los Ejercicios 75-78, utilizar el teorema del valor intermedio y una calculadora gráfica para estimar el cero de la función en el intervalo [0, 1]. Aplicando sucesivos aumentos a la gráfica de la función, determinar el cero con una precisión de dos cifras decimales. Usando una calculadora programada para la búsqueda de raíces, estimar el cero con una precisión de cuatro cifras decimales.

75. $f(x) = x^3 + x - 1$

76. $f(x) = x^3 + 3x - 2$

77. $g(t) = 2 \cos t - 3t$

78. $h(\theta) = 1 + \theta - 3 \operatorname{tg} \theta$

En los Ejercicios 79-82, comprobar que el teorema del valor intermedio es aplicable al intervalo indicado y hallar el valor de c que garantiza el teorema.

79. $f(x) = x^2 + x - 1, \quad [0, 5], \quad f(c) = 11$

80. $f(x) = x^2 - 6x + 8, \quad [0, 3], \quad f(c) = 0$

81. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2, \quad [0, 3], \quad f(c) = 4$

82. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 1}, \quad \left[\dfrac{5}{2}, 4\right], \quad f(c) = 6$

83. ***Volumen*** Usar el teorema del valor intermedio para demostrar que entre todas las esferas cuyos radios pertenecen al intervalo [0, 5] hay una con 275 cm^3 de volumen.

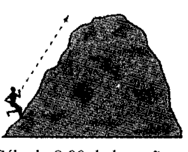
84. ***Tarifas telefónicas*** Una llamada de larga distancia entre dos ciudades cuesta $ 1,04 por los primeros dos minutos y $ 0,36 por cada minuto o fracción adicional. Utilizando la función parte entera, expresar el coste C de una llamada en términos del tiempo t (en minutos). Dibujar la gráfica de esta función y discutir su continuidad.

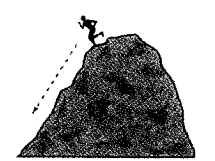
85. ***Gestión de inventarios*** El número de unidades en inventario en una pequeña empresa viene dado por

$$N(t) = 25\left(2\left[\!\left[\frac{t + 2}{2}\right]\!\right] - t\right)$$

donde t representa el tiempo en meses. Dibujar la gráfica de esta función y discutir su continuidad. ¿Con qué frecuencia debe la empresa reponer existencias?

86. ***Déjà vu*** Un sábado a las 8:00 de la mañana, un hombre comienza a subir corriendo la ladera de una montaña hacia su camping de fin de semana. El domingo a las 8:00 de la mañana baja corriendo la montaña. Tarda 20 minutos en subir y sólo 10 en bajar. En cierto punto del camino de bajada, el hombre se da cuenta de que pasó por el mismo lugar a la misma hora el sábado. Probar que el hombre está en lo cierto. [*Ayuda:* Aplicar el teorema del valor intermedio a la función $f(t) = s(t) - r(t)$, siendo $s(t)$ y $r(t)$ las funciones de posición de subida y bajada.]


Sábado 8:00 de la mañana


Domingo 8:00 de la mañana

87. Demostrar que si f es continua y carece de ceros en $[a, b]$, entonces

$$f(x) > 0 \text{ para todo } x \text{ en } [a, b]$$

o

$$f(x) < 0 \text{ para todo } x \text{ en } [a, b]$$

88. Demostrar que la función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

no es continua en ningún número real.

89. Demostrar que la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ kx, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

sólo es continua en $x = 0$. (Aquí k es cualquier número real no nulo.)

90. La **función signo** se define por

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Dibujar la gráfica de sgn(x) y hallar los siguientes límites (cuando sea posible).

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x)$ *b*) $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x)$ *c*) $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 91-94, determinar si la afirmación es cierta o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

91. Si $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ y $f(c) = L$, entonces f es continua en c.

92. Si $f(x) = g(x)$ para $x \neq c$ y $f(c) \neq g(c)$, entonces alguna de las funciones f y g no es continua en c.

93. Para una función racional puede haber infinitos valores de x en los que no es continua.

94. La función $f(x) = |x - 1|/(x - 1)$ es continua en $(-\infty, \infty)$.

95. ***Un modelo matemático*** La siguiente tabla recoge la velocidad S (en pies por segundo) de un objeto que lleva cayendo t segundos.

t	0	5	10	15	20	25	30
S	0	48,2	53,5	55,2	55,9	56,2	56,3

a) Construir una curva con los datos.
b) ¿Parece existir una velocidad límite del objeto? En caso afirmativo, encontrar una posible causa.

96. Demostrar que si $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$, entonces f es continua en x_0.

97. Probar que para todo número real y existe un x en $(-\pi/2, \pi/2)$ tal que tg $x = y$.

98. Discutir la continuidad de la función $h(x) = x[\![x]\!]$.

99. Sea $f(x) = (\sqrt{x + c^2} - c)/x$, $c > 0$. ¿Cuál es el dominio de f? ¿Cómo se puede definir f en $x = 0$ de manera tal que f sea continua en ese punto?

100. Sean $f_1(x)$ y $f_2(x)$ funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Probar que si $f_1(a) < f_2(a)$ y $f_1(b) > f_2(b)$, entonces existe c entre a y b tal que $f_1(c) = f_2(c)$.

1.5 Límites infinitos

CONTENIDO ▪
Límites infinitos ▪
Asíntotas verticales ▪

Límites infinitos

Sea f la función dada por

$$f(x) = \frac{3}{x - 2}$$

Con ayuda de la Figura 1.37 y de la tabla de la página siguiente, puede verse que $f(x)$ *decrece sin cota* cuando x tiende a 2 por la izquierda y *crece sin cota* cuando x tiende a 2 por la derecha. Este comportamiento se denota

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3}{x - 2} = -\infty \qquad f(x) \text{ decrece sin cota cuando } x \text{ tiende a 2 por la izquierda}$$

y

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3}{x - 2} = \infty \qquad f(x) \text{ crece sin cota cuando } x \text{ tiende a 2 por la derecha}$$

FIGURA 1.37
$f(x)$ crece y decrece sin cota cuando x tiende a 2.

x se aproxima a 2 por la izquierda →					← x se aproxima a 2 por la derecha			

x	1,5	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	2,5
$f(x)$	−6	−30	−300	−3.000	?	3.000	300	30	6

$f(x)$ decrece sin cota →	← $f(x)$ crece sin cota

Todo límite en el que $f(x)$ crece o decrece sin cota cuando x tiende a c se llama **límite infinito**.

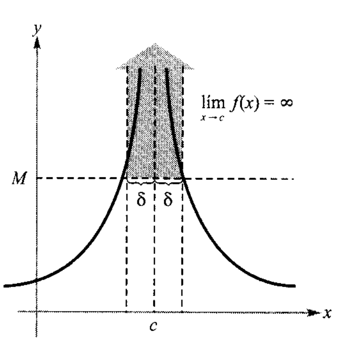


FIGURA 1.38
Límites infinitos.

DEFINICIÓN DE LÍMITES INFINITOS

Sea f una función definida en todo número real de un intervalo abierto que contiene a c, salvo, posiblemente, en el propio c. La expresión

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

significa que para todo $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ siempre que $0 < |x - c| < \delta$ (véase Figura 1.38). Análogamente, la expresión

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

significa que para todo $N < 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < N$ siempre que $0 < |x - c| < \delta$. Para definir el **límite infinito por la izquierda**, basta sustituir $0 < |x - c| < \delta$ por $c - \delta < x < c$. Y para definir el **límite infinito por la derecha**, basta sustituir $0 < |x - c| < \delta$ por $c < x < c + \delta$.

¡Ojo! El símbolo de igualdad en la expresión $\lim f(x) = \infty$ no significa que el límite exista. Bien al contrario, nos indica la razón de su *no existencia*: el comportamiento no acotado de $f(x)$ cuando x tiende a c.

EXPLORACIÓN

Represente las siguientes funciones en una calculadora. Para cada una de ellas, determine analíticamente el único número real c que no pertenece al dominio. A continuación, halle gráficamente el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c por la izquierda o por la derecha.

a) $f(x) = \dfrac{3}{x - 4}$ *b)* $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$

c) $f(x) = \dfrac{2}{(x - 3)^2}$ *d)* $f(x) = \dfrac{-3}{(x + 2)^2}$

EJEMPLO 1 Determinación de límites infinitos a partir de una gráfica

Usando la Figura 1.39, determinar el límite de cada función cuando x tiende a 1 por la izquierda o por la derecha.

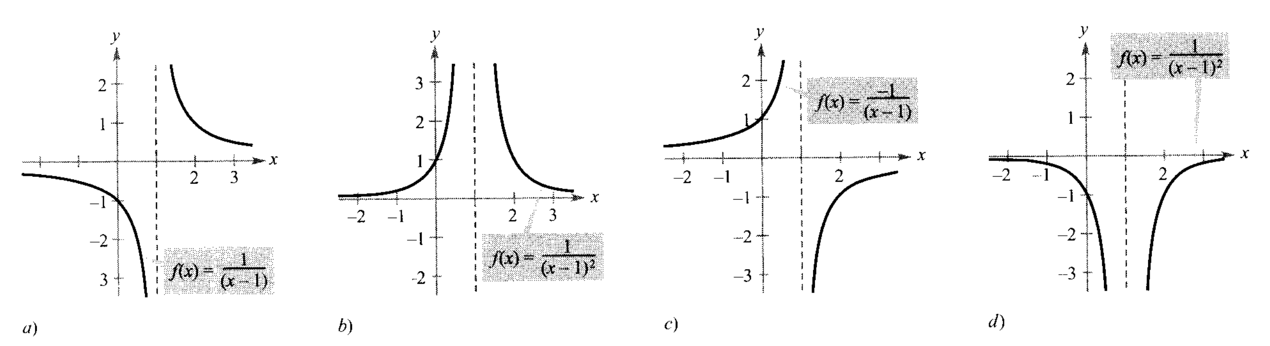


FIGURA 1.39
Las cuatro gráficas tienen una asíntota vertical en $x = 1$.

Solución:

a) $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ y $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$ El límite por ambos lados es ∞

c) $\lim_{x \to 1^-} \frac{-1}{x-1} = \infty$ y $\lim_{x \to 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty$

d) $\lim_{x \to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$ El límite por ambos lados es $-\infty$ □

Asíntotas verticales

Si fuera posible extender las gráficas de la Figura 1.39 hacia el infinito, positivo o negativo, veríamos que ambas se acercan arbitrariamente a la recta vertical $x = 1$. Esta recta es una **asíntota vertical** de la gráfica de f.

| Nota. Si una función f posee una asíntota vertical en $x = c$, entonces f *no es continua* en c.

DEFINICIÓN DE ASÍNTOTA VERTICAL

Si $f(x)$ tiende a infinito (o menos infinito) cuando x tiende a c por la derecha o por la izquierda, se dice que la recta $x = c$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

Observemos que, en el Ejemplo 1, cada una de las funciones es un *cociente* y la asíntota vertical aparece en el número que anula el denominador pero no el numerador. El siguiente teorema generaliza esta observación.

TEOREMA 1.14 **ASÍNTOTAS VERTICALES**

Sean f y g funciones continuas en un intervalo abierto que contiene c. Si $f(c) \neq 0$, $g(c) = 0$, y existe un intervalo abierto que contiene c tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq c$ del intervalo, entonces la gráfica de la función

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

posee una asíntota vertical en $x = c$.

EJEMPLO 2 Determinación de asíntotas verticales

Hallar todas las asíntotas verticales de la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{2(x+1)}$ *b*) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ *c*) $f(x) = \text{ctg } x$

Solución:

a) Cuando $x = -1$, el denominador de

$$f(x) = \frac{1}{2(x+1)}$$

es 0 y el numerador no es 0. Por tanto, por el Teorema 1.14, se puede concluir que $x = -1$ es una asíntota vertical (véase Figura 1.40*a*).

b) Factorizando el denominador como

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}$$

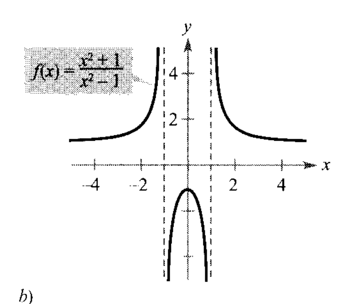
puede verse que se anula en $x = -1$ y en $x = 1$. Además, dado que el numerador no es 0 en ninguno de estos puntos, del Teorema 1.14 se sigue que la gráfica tiene dos asíntotas verticales, como ilustra la Figura 1.40*b*.

c) Escribiendo la función cotangente de la forma

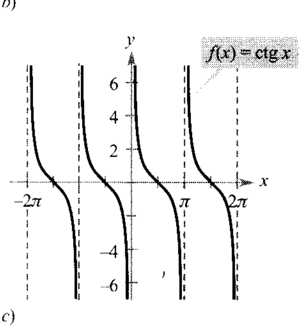
$$f(x) = \text{ctg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

podemos aplicar el Teorema 1.14 y concluir que las asíntotas verticales tienen lugar en todos los valores de x tales que $\cos x \neq 0$ y $\text{sen } x = 0$ (véase Figura 1.40*c*). Por consiguiente, la gráfica de esta función tiene infinitas asíntotas verticales. Estas asíntotas aparecen cuando $x = n\pi$, siendo n un entero. □

a)



b)



c)

FIGURA 1.40
Funciones con asíntotas verticales.

El Teorema 1.14 exige que el valor del numerador en $x = c$ no sea nulo. Si tanto el numerador como el denominador son 0 en $x = c$, se obtiene la forma indeterminada 0/0, y no es posible conocer el comportamiento límite en $x = c$ sin una investigación adicional.

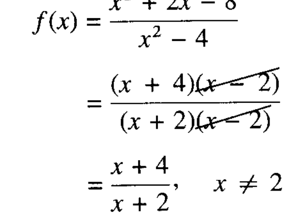
EJEMPLO 3 Una función racional con factores comunes

Determinar todas las asíntotas verticales de la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}$$

Solución: Comenzamos simplificando la expresión como sigue.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}$$



$$= \frac{(x + 4)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)}$$

$$= \frac{x + 4}{x + 2}, \quad x \neq 2$$

FIGURA 1.41
$f(x)$ crece y decrece sin cota cuando x tiende a -2.

En todos los $x \neq 2$, la gráfica de f coincide con la de $g(x) = (x + 4)/(x + 2)$. De modo que podemos aplicar el Teorema 1.14 a g para concluir que existe una asíntota vertical en $x = -2$ (véase Figura 1.41). A partir de la gráfica, vemos que

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = \infty$$

Observemos que $x = 2$ *no* es una asíntota vertical. □

EJEMPLO 4 Determinación de límites infinitos

Hallar los siguientes límites.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$$

FIGURA 1.42
f posee una asíntota vertical en $x = 1$.

Solución: Puesto que el denominador es 0 cuando $x = 1$ (y el numerador no se anula), sabemos que la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$$

tiene una asíntota vertical en $x = 1$. Esto significa que cada uno de los límites dados es ∞ o $-\infty$. Una gráfica en la calculadora puede ayudar a determinar el

ADVERTENCIA Cuando se utiliza calculadora, hay que ser cuidadoso para interpretar correctamente la gráfica de una función con una asíntota vertical, ya que las calculadoras tienen a menudo dificultades para dibujar este tipo de gráficas.

resultado. En la gráfica de f de la Figura 1.42, vemos que la gráfica tiende a ∞ por la izquierda de $x = 1$ y a $-\infty$ por la derecha. Así pues, podemos concluir que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} = \infty \qquad \text{El límite por la izquierda es infinito}$$

y

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} = -\infty \qquad \text{El límite por la derecha es menos infinito}$$ □

TEOREMA 1.15 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES INFINITOS

Sean c y L números reales, y sean f y g funciones tales que

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c} g(x) = L$$

1. **Suma o diferencia:** $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \infty$
2. **Producto:** $\lim_{x \to c} [f(x)g(x)] = \infty, \quad L > 0$

   $\lim_{x \to c} [f(x)g(x)] = -\infty, \quad L < 0$
3. **Cociente:** $\lim_{x \to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$

Propiedades análogas son válidas para límites laterales y para funciones cuyo límite cuando x tiende a c es $-\infty$.

Demostración: Para probar que el límite de $f(x) + g(x)$ es infinito, escojamos un $M > 0$. Necesitamos entonces encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$[f(x) + g(x)] > M$$

siempre que $0 < |x - c| < \delta$. Para simplificar, podemos suponer $L > 0$ y hacer $M_1 = M + 1$. Como el límite de $f(x)$ es infinito, existe un δ_1 tal que $f(x) > M_1$ siempre que $0 < |x - c| < \delta_1$. Y como el límite de $g(x)$ es L, existe un δ_2 tal que $|g(x) - L| < 1$ siempre que $0 < |x - c| < \delta_2$. Denotando por δ el mínimo entre δ_1 y δ_2, concluimos que $0 < |x - c| < \delta$ implica que $f(x) > M + 1$ y $|g(x) - L| < 1$. La segunda de estas desigualdades implica que $g(x) > L - 1$ y, sumando esto a la primera desigualdad, obtenemos

$$f(x) + g(x) > (M + 1) + (L - 1) = M + L > M$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \infty$$

Las demostraciones de las demás propiedades se dejan como ejercicios (véase Ejercicio 60). □

EJEMPLO 5 Cálculo de límites

a) Como $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, se sigue que

$$\lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \infty \qquad \text{Propiedad 1, Teorema 1.15}$$

b) De $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 + 1) = 2$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$, deducimos que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 + 1}{1/(x-1)} = 0 \qquad \text{Propiedad 3, Teorema 1.15}$$

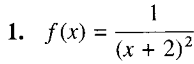
c) Al ser $\lim\limits_{x\to 0^+} 3 = 3$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{ctg} x = \infty$, se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} 3 \operatorname{ctg} x = \infty \qquad \text{Propiedad 2, Teorema 1.15}$$

□

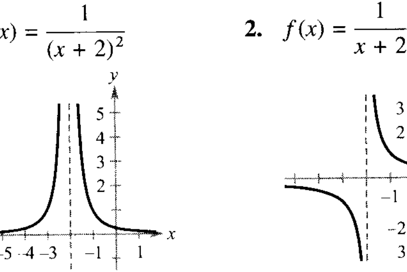
Ejercicios de la Sección 1.5

En los Ejercicios 1-4, averiguar si $f(x)$ tiende a ∞ o a $-\infty$ cuando x tiende a -2 por la izquierda o por la derecha.



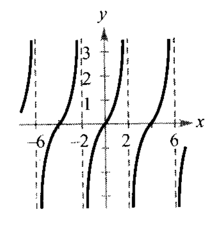
1. $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

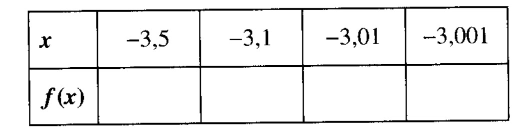


3. $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$

4. $f(x) = \sec\dfrac{\pi x}{4}$



Análisis numérico y gráfico En los Ejercicios 5-8, determinar, completando la tabla, si $f(x)$ tiende a ∞ o a $-\infty$ cuando x tiende a -3 por la izquierda y por la derecha, respectivamente. Representar la función con una calculadora para confirmar la respuesta.



x	−3,5	−3,1	−3,01	−3,001
$f(x)$				

x	−2,999	−2,99	−2,9	−2,5
$f(x)$				

5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

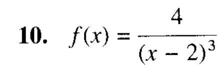
6. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

7. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$

8. $f(x) = \sec\dfrac{\pi x}{6}$

En los Ejercicios 9-24, hallar las asíntotas verticales (si existe alguna) de la función.

9. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$



10. $f(x) = \dfrac{4}{(x-2)^3}$

11. $h(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - x - 2}$

12. $g(x) = \dfrac{2 + x}{1 - x}$

13. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

14. $f(x) = \dfrac{-4x}{x^2 + 4}$

15. $f(x) = \operatorname{tg} 2x$

16. $f(x) = \sec \pi x$

17. $T(t) = 1 - \dfrac{4}{t^2}$

18. $V(s) = \dfrac{-2}{(s-2)^2}$

19. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x - 2}$

20. $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)^4}$

21. $g(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$

22. $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + x + 2}$

23. $s(t) = \dfrac{t}{\operatorname{sen} t}$

24. $g(\theta) = \dfrac{\operatorname{tg} \theta}{\theta}$

En los Ejercicios 25-28, determinar si la función tiene una asíntota vertical o una discontinuidad evitable en $x = -1$. Representar la función en una calculadora para confirmar la respuesta.

25. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

26. $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x - 7}{x + 1}$

27. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

28. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x + 1)}{x + 1}$

En los Ejercicios 29-40, hallar el límite.

29. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x - 3}{x - 2}$

30. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2 + x}{1 - x}$

31. $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x^2}{x^2 - 16}$

32. $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x^2}{x^2 + 16}$

33. $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 6}$

34. $\lim\limits_{x \to (-1/2)^+} \dfrac{6x^2 + x - 1}{4x^2 - 4x - 3}$

35. $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

36. $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)$

37. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2}{\operatorname{sen} x}$

38. $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^+} \dfrac{-2}{\cos x}$

39. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x}{(x^2 + 1)(x - 1)}$

40. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 2}{x^2}$

En los Ejercicios 41-44, representar la función en una calculadora y determinar el límite lateral.

41. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

42. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

43. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 25}$

$\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$

44. $f(x) = \sec \dfrac{\pi x}{6}$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

45. Una suma dada es inversamente proporcional a $1 - r$, donde $0 < |r| < 1$. Calcular el límite de S cuando $r \to 1^-$.

46. ***Ley de Boyle*** En un gas a temperatura constante, la presión P es inversamente proporcional al volumen V. Calcular el límite de P cuando $V \to 0^+$.

47. ***Ritmo de cambio*** Una escalera de 25 pies está apoyada en una casa (véase figura). Si se tira de la base de la escalera alejándola de la casa a un ritmo de 2 pies por segundo, la parte superior descenderá por la pared a un ritmo de

$$r = \frac{2x}{\sqrt{625 - x^2}} \text{ pies/s}$$

donde x es la distancia entre la base de la escalera y la casa.

a) Hallar el ritmo r cuando x es 7 pies.
b) Hallar el ritmo r cuando x es 15 pies.
c) Hallar el límite de r cuando $x \to 25^-$.

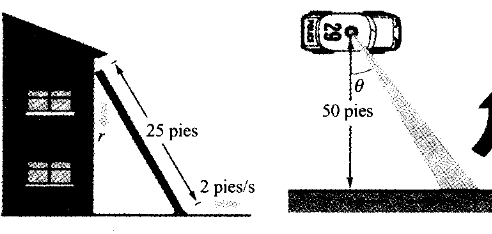


FIGURA E. 47 FIGURA E. 48

48. ***Ritmo de cambio*** Un coche patrulla está aparcado a 50 pies de un gran almacén (véase figura). La luz giratoria de la parte superior del coche gira a un ritmo de $\frac{1}{2}$ revolución por segundo. El ritmo al que se desplaza el haz de luz a lo largo de la pared es

$$r = 50\pi \sec^2 \theta \text{ pies/s}$$

a) Hallar el ritmo r cuando θ es $\pi/6$.
b) Hallar el ritmo r cuando θ es $\pi/3$.
c) Hallar el límite de r cuando $\theta \to (\pi/2)^-$.

49. ***Drogas ilegales*** El coste en millones de dólares que le supone a una agencia gubernamental incautarse de un x% de cierta droga ilegal es

$$C = \frac{528x}{100 - x}, \quad 0 \leqslant x < 100$$

a) Hallar el coste de la incautación del 25 %.
b) Hallar el coste de la incautación del 50 %.
c) Hallar el coste de la incautación del 75 %.
d) Hallar el límite de C cuando $x \to 100^-$.

50. ***Velocidad media*** En un viaje de d millas a otra ciudad, la velocidad media de un camionero fue de x millas por hora. En el viaje de vuelta, la velocidad media fue de y millas por hora. La velocidad media del viaje de ida y vuelta fue de 50 millas por hora.

a) Comprobar que $y = \frac{25x}{x - 25}$. ¿Cuál es el dominio?

b) Completar la tabla.

x	30	40	50	60
y				

¿Difieren los valores de y de los esperados? Explicar la respuesta.

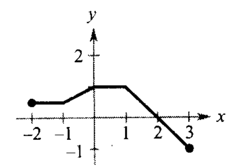
c) Hallar el límite de y cuando $x \to 25^+$.

51. ***Relatividad*** De acuerdo con la teoría de la relatividad, la masa m de una partícula depende de su velocidad v. Esto es,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

donde m_0 es la masa cuando la partícula está en reposo y c es la velocidad de la luz. Calcular el límite de la masa cuando c^-.

52. ***Para pensar*** Usando la gráfica de la función f (véase figura), esbozar la gráfica de $g(x) = 1/f(x)$ en el intervalo $[-2, 3]$.



53. ***Razonamiento numérico y gráfico*** Una correa en cruz conecta un disco de 20 cm (10 cm de radio) situado en un motor eléctrico con otro de 40 cm (20 cm de radio) en una sierra circular. El motor eléctrico gira a 1.700 revoluciones por minuto.

a) Hallar el número de revoluciones por minuto de la sierra.

b) ¿Cómo afecta el cruce de la correa a la sierra en relación con el motor?

c) Sea L la longitud total de la correa. Expresar L en función de ϕ, donde ϕ se mide en radianes. ¿Cuál es el dominio de la función? [*Ayuda:* Sumar las longitudes de los tramos rectos de la correa y las longitudes de la correa alrededor de cada disco.]

d) Completar la tabla con ayuda de una calculadora.

ϕ	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5
L					

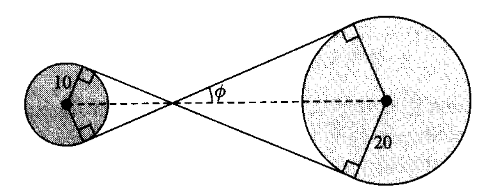
e) Usando una calculadora, representar la función en un dominio apropiado.

f) Hallar

$$\lim_{\phi \to (\pi/2)^-} L$$

Dar un segundo método, de tipo geométrico, para calcular este límite.

g) Hallar $\lim_{\phi \to 0^+} L$



54. ***Análisis numérico y gráfico*** Consideremos la región sombreada que queda fuera del sector de círculo de radio 10 m y dentro del triángulo rectángulo de la figura.

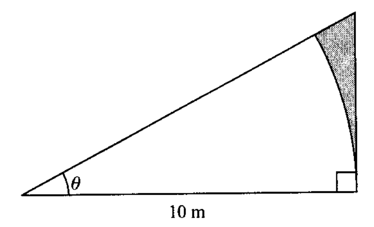
a) Expresar el área $A = f(\theta)$ de la región en función de θ. Determinar el dominio de esta función.

b) Completar la tabla con ayuda de una calculadora.

θ	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5
$f(\theta)$					

c) Usando una calculadora, representar la función en un dominio apropiado.

d) Calcular el límite de A cuando $\theta \to \pi/2^-$.



¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 55-58, determinar si la afirmación es cierta o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.

55. Si $p(x)$ es un polinomio, entonces la función dada por

$$f(x) = \frac{p(x)}{x - 1}$$

posee una asíntota vertical en $x = 1$.

56. Toda función racional tiene al menos una asíntota vertical.

57. Las funciones polinómicas carecen de asíntotas verticales.

58. Si f tiene una asíntota vertical en $x = 0$, entonces f no está definida en $x = 0$.

59. Encontrar dos funciones f y g tales que

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c} g(x) = \infty$$

pero $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] \neq 0$.

60. Demostrar las propiedades restantes del Teorema 1,15.

61. Probar que si

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{1}{f(x)} = 0$$

62. Probar que si

$$\lim_{x \to c} \frac{1}{f(x)} = 0$$

entonces $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe.

63. ***Redacción*** Dado que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x + 2}{(x - 1)^2} = \infty$$

para cada $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\frac{x + 2}{(x - 1)^2} > M$$

siempre que $0 < |x - 1| < \delta$.

a) Sea $M = 100$. Representar con una calculadora la función y la recta $y = 100$. Usar las gráficas para estimar δ.

b) Sea $M = 1000$. Representar en una calculadora la función y la recta $y = 1000$. Usar las gráficas para estimar δ.

c) Describir en unas líneas cómo varía δ al crecer M.

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

Recuerde del Teorema 1.9 que el límite de $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ cuando x tiende a 0 es

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

a) Utilizando una calculadora, represente la función f en el intervalo $-\pi \leqslant 0 \leqslant \pi$. Explique cómo ayuda esta gráfica a confirmar que $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

b) Explique cómo podría usar una tabla de valores para confirmar numéricamente el valor de este límite.

c) Dibuje a mano la gráfica de la función $g(x) = \operatorname{sen} x$. Trace de forma aproximada la tangente en el punto (0, 0) y estime visualmente su pendiente.

d) Sea $(x, \operatorname{sen} x)$ un punto de la gráfica de g cercano a (0, 0). Escriba una fórmula para la pendiente de la recta secante que une $(x, \operatorname{sen} x)$ y (0, 0). Evalúe esta fórmula en $x = 0{,}1$ y $x = 0{,}01$. Después, determine el valor exacto de la pendiente de la recta tangente a g en el punto (0, 0).

e) Dibuje la gráfica de la función coseno $h(x) = \cos x$. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en el punto (0, 1)? Utilice límites para calcular analíticamente dicha pendiente. [*Ayuda:* Véase la segunda parte del Teorema 1.9.]

f) Calcula la pendiente de la recta tangente a $k(x) = \operatorname{tg} x$ en el punto (0, 0).

Ejercicios de repaso del Capítulo 1

En los Ejercicios 1 y 2, discutir si el problema se puede resolver usando conocimientos previos al Cálculo. Si es así, resolverlo. En caso de que sea necesario el Cálculo, explicar por qué. Estimar la solución usando un método gráfico o numérico.

1. Calcular la distancia entre los puntos (1, 1) y (3, 9) a lo largo de la curva $y = x^2$.

2. Calcular la distancia entre los puntos (1, 1) y (3, 9) a lo largo de la recta $y = 4x - 3$.

En los Ejercicios 3 y 4, completar la tabla y usar el resultado para estimar el límite. Representar la función en la calculadora para corroborar el resultado.

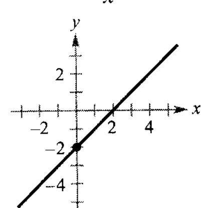
x	−0,1	−0,01	−0,001	0,001	0,01	0,1
$f(x)$						

3. $\lim_{x \to 0} \frac{[1/(x + 2)] - (1/2)}{x}$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln (x + 5) - \ln 5}{x}$

En los Ejercicios 5 y 6, usar la gráfica para determinar el límite.

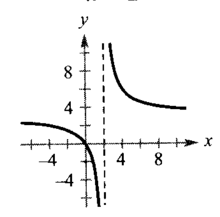
5. $h(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x}$



a) $\lim_{x \to 0} h(x)$

b) $\lim_{x \to -1} h(x)$

6. $g(x) = \dfrac{3x}{x - 2}$



a) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$

b) $\lim_{x \to 0} g(x)$

En los Ejercicios 7-22, calcular el límite (si existe).

7. $\lim_{x \to 2} (5x - 3)$

8. $\lim_{x \to 2} (3x + 5)$

9. $\lim_{x \to 2} (5x - 3)(3x + 5)$

10. $\lim_{x \to 2} \dfrac{3x + 5}{5x - 3}$

11. $\lim_{t \to 3} \dfrac{t^2 + 1}{t}$

12. $\lim_{t \to 3} \dfrac{t^2 - 9}{t - 3}$

13. $\lim_{t \to -2} \dfrac{t + 2}{t^2 - 4}$

14. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4 + x} - 2}{x}$

15. $\lim_{x \to 0} \dfrac{[1/(x + 1)] - 1}{x}$

16. $\lim_{s \to 0} \dfrac{(1/\sqrt{1 + s}) - 1}{s}$

17. $\lim_{x \to -5} \dfrac{x^3 + 125}{x + 5}$

18. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$

19. $\lim_{x \to 0^+} \left(x - \dfrac{1}{x^3}\right)$

20. $\lim_{x \to 2} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$

21. $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}[(\pi/6) + \Delta x] - (1/2)}{\Delta x}$

[*Ayuda:* $\operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen}\theta \cos\phi + \cos\theta \operatorname{sen}\phi$]

22. $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\cos(\pi + \Delta x) + 1}{\Delta x}$

[*Ayuda:* $\cos(\theta + \phi) = \cos\theta \cos\phi - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$]

En los Ejercicios 23-32, calcular el límite lateral propuesto.

23. $\lim_{x \to -2^-} \dfrac{2x^2 + x + 1}{x + 2}$

24. $\lim_{x \to (1/2)^+} \dfrac{x}{2x - 1}$

25. $\lim_{x \to -1^+} \dfrac{x + 1}{x^3 + 1}$

26. $\lim_{x \to -1^-} \dfrac{x + 1}{x^4 - 1}$

27. $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$

28. $\lim_{x \to -1^+} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$

29. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{5x}$

30. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\sec x}{x}$

31. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{cosec} 2x}{x}$

32. $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{\cos^2 x}{x}$

Investigación numérica, gráfica y analítica En los Ejercicios 33 y 34, consideramos $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.

a) Completar la tabla para aproximar el límite.
b) Representar en una calculadora la función y estimar el límite, a la vista de esa gráfica.
c) Racionalizar el numerador y calcular analíticamente el valor exacto del límite.

x	1,1	1,01	1,001	1,0001
$f(x)$				

33. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{3}}{x - 1}$

34. $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt[3]{x}}{x - 1}$

[*Ayuda:* $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$]

En los Ejercicios 35-44, averiguar los intervalos en los que la función es continua.

35. $f(x) = [\![x + 3]\!]$

36. $f(x) = \dfrac{3x^2 - x - 2}{x - 1}$

37. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - x - 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} 5 - x, & x \leqslant 2 \\ 2x - 3, & x > 2 \end{cases}$

39. $f(x) = \dfrac{1}{(x - 2)^2}$

40. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x}}$

41. $f(x) = \dfrac{3}{x + 1}$

42. $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 2}$

43. $f(x) = \operatorname{cosec} \dfrac{\pi x}{2}$

44. $f(x) = \operatorname{tg} 2x$

45. Determinar el valor de c para el cual la función f es continua en toda la recta real.

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leqslant 2 \\ cx + 6, & x > 2 \end{cases}$$

46. Hallar los valores de b y c que hacen continua sobre toda la recta real a la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & 1 < x < 3 \\ x^2 + bx + c, & |x - 2| \geqslant 1 \end{cases}$$

47. ***Interés compuesto*** Se depositan $ 5.000 en un plan de ahorro que produce un 12 por 100 de interés compuesto semestralmente. El balance a los t años de la inversión viene dado por $A = 5.000(1{,}06)^{[\![2t]\!]}$. Representar la función en la calculadora y discutir su continuidad.

48. ***Coste de entregas nocturnas*** Enviar un paquete en servicio nocturno de Nueva York a Atlanta cuesta $9,80 la primera libra y $2,50 cada libra adicional. Usar la función parte entera para formular un modelo que describa el coste C de enviar un paquete de x libras. Representar la función en la calculadora y discutir su continuidad.

En los Ejercicios 49-52, hallar las asíntotas verticales (si las hay) de la función.

49. $g(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$

50. $h(x) = \dfrac{4x}{4 - x^2}$

51. $f(x) = \dfrac{8}{(x - 10)^2}$

52. $f(x) = \operatorname{cosec} \pi x$

53. ***Coste de la depuración ambiental*** Una central térmica quema carbón para generar energía eléctrica. El coste C, en dólares, de eliminar un p por 100 de las sustancias contaminantes del aire en sus emisiones de humos es

$$C = \frac{80.000p}{100 - p}, \quad 0 \leqslant p < 100$$

Hallar cuánto cuesta eliminar *a*) 15 por 100, *b*) 50 por 100, y *c*) 90 por 100. *d*) Calcular el límite de C cuando $p \to 100$.

54. Sea la función f definida por

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}, \quad x \neq 0$$

a) Hallar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$ (si existe).

b) ¿Puede definirse f de manera que sea continua en $x = 0$?

Objeto en caída libre En los Ejercicios 55 y 56, usar la función posición $s(t) = -4{,}9t^2 + 200$, que da la altura en metros de un objeto que cae libremente desde una altura de 200 metros. Su velocidad en el instante $t = a$ segundos es

$$\lim_{t \to a} \frac{s(a) - s(t)}{a - t}$$

55. Calcular su velocidad cuando $t = 4$.

56. ¿A qué velocidad impactará en el suelo?

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 57-63, averiguar si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

57. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x} = 1$

58. $\lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$

59. Si $f(x) = g(x)$ para todos los números reales $x = 0$, y además

$$\lim_{x \to 0} f(x) = L$$

entonces

$$\lim_{x \to 0} g(x) = L$$

60. Si $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$, entonces $f(c) = L$.

61. Para las funciones polinómicas, los límites laterales existen siempre y son iguales.

62. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x \leqslant 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

63. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & x \leqslant 3 \\ -x^2 + 8x - 14, & x > 3 \end{cases}$$

64. Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{|x - 2|}\cdot$ Calcular los siguientes límites (si ello es posible).

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

65. Sea $f(x) = \sqrt{x(x - 1)}$.

a) Hallar el dominio de f.

b) Calcular $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

c) Calcular $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

Capítulo 2

MOTIVACIÓN DEL CAPÍTULO

EXPERIMENTOS CON LANZADERA ESPACIAL

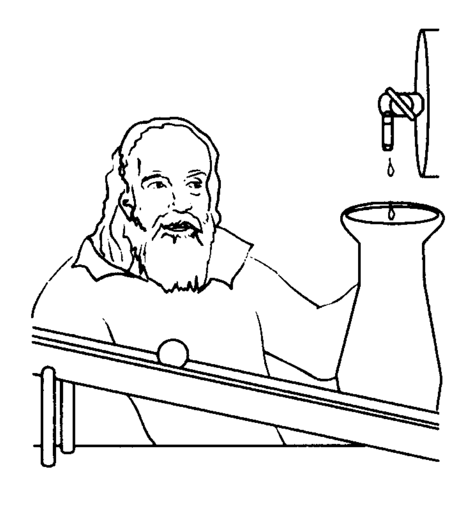
El 20 de octubre de 1995 el segundo laboratorio de microgravitación de los EE.UU. (USML-2) fue lanzado a bordo de la nave Columbia. Fue construido para aprovechar las condiciones de baja gravedad con el fin de investigar cómo influye un entorno casi vacío en el comportamiento de los fluidos, de la combustión, de la estructura de la materia y de los cristales de las proteínas.

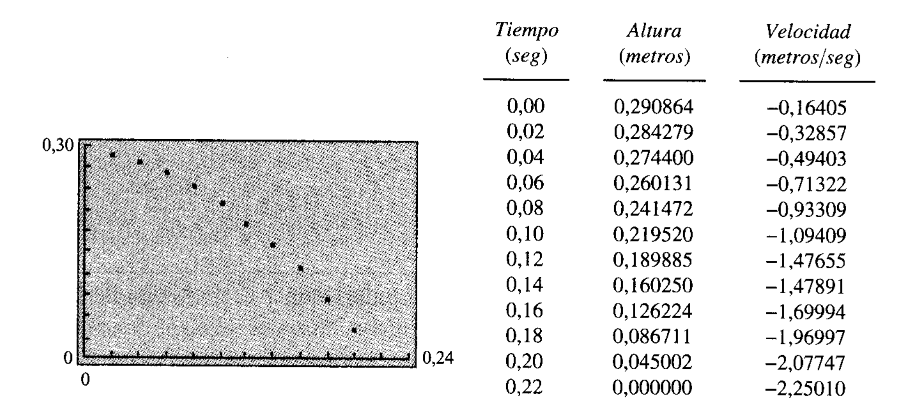
Gravitación: su búsqueda experimental

El estudio de la Dinámica se remonta al siglo XVI. Cuando la oscurantista Edad Media dejó paso al Renacimiento, Galileo Galilei (1564-1642) fue de los primeros en avanzar hacia la comprensión del movimiento de los objetos bajo la influencia de la gravedad.

Ya se sabía que un objeto se mueve cada vez más rápido en su caída, pero se ignoraba qué ley gobierna ese movimiento acelerado. Son movimientos demasiado rápidos para ser susceptibles de medidas precisas con los instrumentos existentes en esa época. Galileo resolvió este problema de un modo muy ingenioso. Argumentó que la gravedad quedaba «diluida» si, en lugar de dejar caer libremente una bola, se hace rodar la bola por un plano inclinado. Además, utilizó un reloj de agua, que medía el tiempo por medio de la cantidad de agua que salía por un pequeño orificio.

Hoy en día disponemos de instrumentos relativamente baratos, como el *Texas Instruments Calculator-Based Laboratory (CBL) System*, que permiten obtener datos precisos de la posición de un objeto en caída. Con uno de estos sistemas han sido obtenidos los datos de una bola en caída que se muestran en la próxima tabla, en intervalos de 0,02 segundos.





Tiempo (seg)	*Altura (metros)*	*Velocidad (metros/seg)*
0,00	0,290864	−0,16405
0,02	0,284279	−0,32857
0,04	0,274400	−0,49403
0,06	0,260131	−0,71322
0,08	0,241472	−0,93309
0,10	0,219520	−1,09409
0,12	0,189885	−1,47655
0,14	0,160250	−1,47891
0,16	0,126224	−1,69994
0,18	0,086711	−1,96997
0,20	0,045002	−2,07747
0,22	0,000000	−2,25010

CUESTIONES

1. Representar en la calculadora las posiciones de la bola al caer. ¿Qué tipo de modelo parece ajustar mejor? Usar regresión en la calculadora para hallar el modelo de ajuste óptimo.

2. Repetir el proceso para las velocidades de la bola en caída. Describir la relación entre ambos modelos.

3. En teoría, la posición de un objeto en caída libre en el vacío viene dada por $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$, donde g es la aceleración de la gravedad (metros por segundo por segundo, abreviado m/s^2), t es el tiempo (en segundos), v_0 es la velocidad inicial (en metros por segundo) y s_0 es la altura inicial (en metros). A partir del experimento anterior, estimar el valor de g. ¿Cree que su estimación es errónea por exceso o por defecto? Explique su razonamiento.

2

La derivada



CONTENIDO ▪
El problema de la recta tangente ▪
La derivada de una función ▪
Derivabilidad y continuidad ▪



ISAAC NEWTON (1642-1727)

Además del Cálculo, Newton aportó contribuciones a la Física tan revolucionarias como la Ley Universal de la Gravitación y sus tres leyes del movimiento.

2.1 La derivada y el problema de la recta tangente

El problema de la recta tangente

El Cálculo se desarrolló a la sombra de cuatro problemas sobre los que estaban trabajando los matemáticos europeos en el siglo XVII.

1. El problema de la recta tangente (Sección 1.1 y esta sección).
2. El problema de la velocidad y la aceleración (Secciones 2.2 y 2.3).
3. El problema de los máximos y mínimos (Sección 3.1).
4. El problema del área (Secciones 1.1 y 4.2).

Cada uno de ellos involucra la noción de límite y podría servir como introducción al Cálculo.

Vimos una breve introducción al problema de la recta tangente en la Sección 1.1. Aunque se habían dado soluciones parciales por parte de Pierre de Fermat (1601-1665), René Descartes (1596-1650), Christian Huygens (1629-1695), y Isaac Barrow (1630-1677), la primera solución general se suele atribuir a Isaac Newton (1642-1727) y a Gottfried Leibniz (1646-1716). El trabajo de Newton en este problema provenía de su interés por la refracción de la luz en Óptica.

¿Qué significa decir que una recta es tangente a una curva en un punto? Para un círculo, la recta tangente en un punto P es la recta perpendicular al radio que pasa por P, como indica la Figura 2.1.

Para una curva general, sin embargo, el problema es más difícil. Por ejemplo, ¿cómo podríamos definir las rectas tangentes de la Figura 2.2? Podríamos afirmar que una recta es tangente a una curva en un punto P si toca a la curva en P sin atravesarla. Tal definición sería correcta para la primera curva de la Figura 2.2, pero no para la segunda. También podríamos decir que una recta es tangente a una curva en P si la toca o la intersecta sólo en el punto P. Pero tampoco es válida en general, como sugiere la tercera curva de la Figura 2.2.

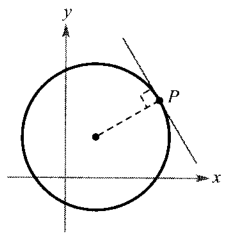


FIGURA 2.1
Recta tangente a un círculo.

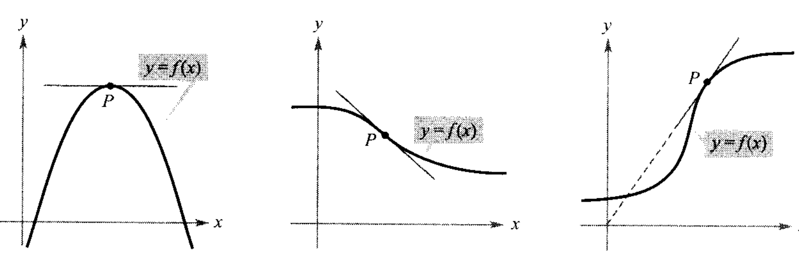


FIGURA 2.2
Recta tangente a una curva en un punto.

EXPLORACIÓN

Identificando una recta tangente Usar una calculadora para esbozar la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 5$. Representar sobre la misma pantalla las gráficas de $y = x - 5$, $y = 2x - 5$ e $y = 3x - 5$. ¿Alguna de estas rectas parece ser tangente a la gráfica de f en el punto $(0, -5)$? Explicar la respuesta.

EL PROBLEMA DE LA RECTA TANGENTE

En 1637 el matemático René Descartes escribía sobre el problema de la recta tangente:

«Y no tengo inconveniente en afirmar que éste no es sólo el problema de Geometría más útil y general entre los que yo conozco, sino incluso entre los que desearía conocer.»

Esencialmente, el problema de hallar la recta tangente en un punto P se reduce al de hallar su pendiente en ese punto. Podemos aproximar la pendiente de la recta tangente usando la recta secante que pasa por P y por otro punto cercano de la curva, como indica la Figura 2.3. Si $(c, f(c))$ es el punto de tangencia y $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$ es el otro punto de la gráfica de f, la pendiente de la recta secante que pasa por esos dos puntos viene dada sustituyendo en la fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{(c + \Delta x) - c} \qquad \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}$$

$$= \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \qquad \text{Pendiente de la recta secante}$$

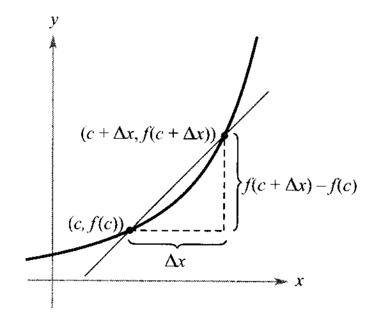


FIGURA 2.3
La recta secante que pasa por $(c, f(c))$ y $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$.

El miembro de la derecha en esta ecuación es un **cociente incremental** (o de incrementos). El denominador Δx es el **cambio** (o **incremento**) en x y el numerador $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c)$ es el cambio (o incremento) en y.

La belleza de este procedimiento estriba en que se pueden obtener aproximaciones más y más precisas de la pendiente de la recta tangente tomando puntos de la gráfica cada vez más próximos al punto P de tangencia, como muestra la Figura 2.4.

DEFINICIÓN DE LA RECTA TANGENTE CON PENDIENTE

Si f está definida en un intervalo abierto que contiene a c y además existe el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m$$

entonces, la recta que pasa por $(c, f(c))$ con pendiente m se llama **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$.

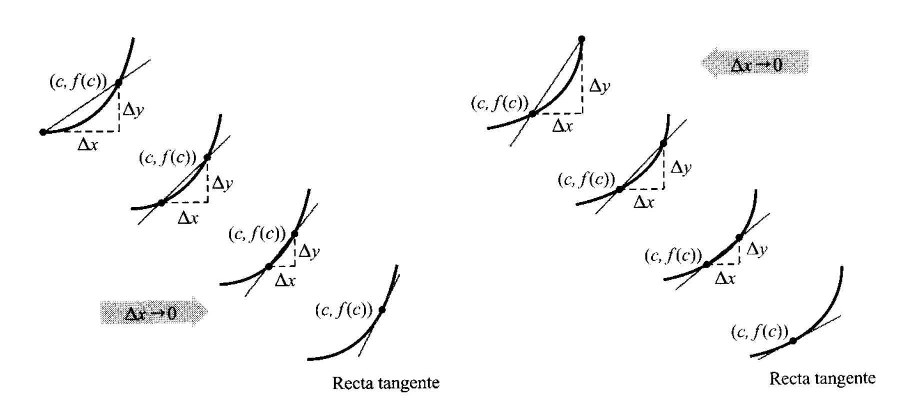


FIGURA 2.4
Aproximaciones a la recta tangente.

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$ se llama también **pendiente de la gráfica de f en $x = c$.**

EJEMPLO 1 La pendiente de la gráfica de una función lineal

Hallar la pendiente de la gráfica de $f(x) = 2x - 3$ en el punto (2, 1).

Solución: Para hallar la pendiente de la gráfica de f cuando $c = 2$, podemos aplicar la definición de la pendiente de una recta tangente como sigue:

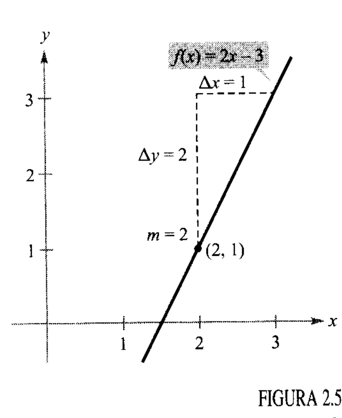


FIGURA 2.5
La pendiente de f en (2, 1) es $m = 2$.

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(2 + \Delta x) - 3] - [2(2) - 3]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 2\Delta x - 3 - 4 + 3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

La pendiente de f en (2, 1) es $m = 2$, como muestra la Figura 2.5. □

Nota. En el Ejemplo 1, la definición de la pendiente de f mediante límites coincide con la definición discutida en la Sección P.2.

La gráfica de una función lineal tiene la misma pendiente en todos sus puntos. Esto no es cierto para funciones no lineales, como se ve en el próximo ejemplo.

EJEMPLO 2 Rectas tangentes a la gráfica de una función no lineal

Calcular las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = x^2 + 1$ en los puntos (0, 1) y (−1, 2), que se ilustran en la Figura 2.6.

Solución: Sea $(x, f(x))$ un punto arbitrario de la gráfica de f. La pendiente de la recta tangente en él viene dada por

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) \\ &= 2x\end{aligned}$$

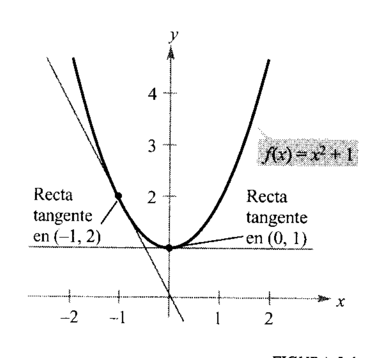
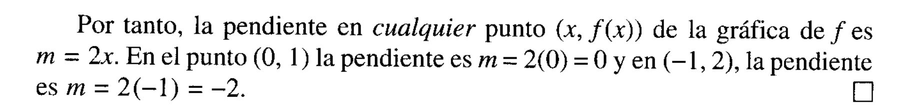
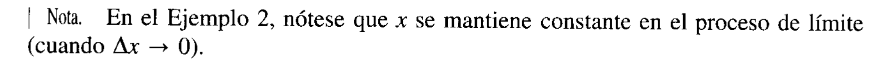


FIGURA 2.6
La pendiente de f en un punto cualquiera $(x, f(x))$ es $m = 2x$.



Por tanto, la pendiente en *cualquier* punto $(x, f(x))$ de la gráfica de f es $m = 2x$. En el punto (0, 1) la pendiente es $m = 2(0) = 0$ y en (−1, 2), la pendiente es $m = 2(-1) = -2$. □



Nota. En el Ejemplo 2, nótese que x se mantiene constante en el proceso de límite (cuando $\Delta x \to 0$).

La definición de recta tangente a una curva no cubre la posibilidad de una recta tangente vertical. Para éstas, podemos usar la siguiente definición. Si f es continua en c y

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \infty$$

o bien

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = -\infty$$

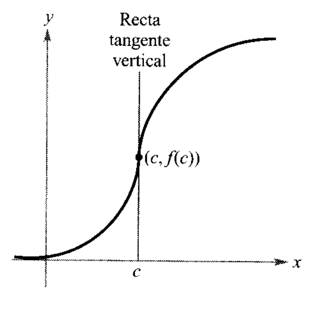
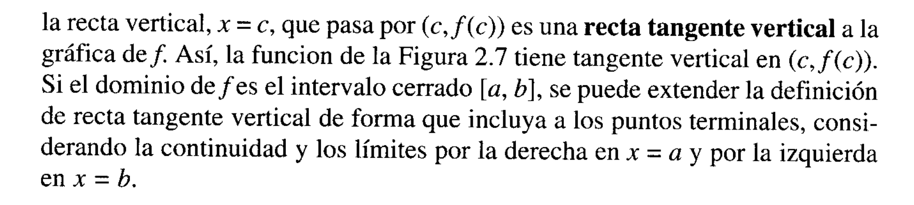


FIGURA 2.7
La gráfica de f tiene recta tangente vertical en $(c, f(c))$.



la recta vertical, $x = c$, que pasa por $(c, f(c))$ es una **recta tangente vertical** a la gráfica de f. Así, la funcion de la Figura 2.7 tiene tangente vertical en $(c, f(c))$. Si el dominio de f es el intervalo cerrado $[a, b]$, se puede extender la definición de recta tangente vertical de forma que incluya a los puntos terminales, considerando la continuidad y los límites por la derecha en $x = a$ y por la izquierda en $x = b$.

La derivada de una función

Hemos llegado a un punto crucial en el estudio del Cálculo. El límite utilizado en la definición de la pendiente de una recta tangente se usa también para definir una de las dos operaciones fundamentales del Cálculo: **la derivación**.

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN La derivada de f en x viene dada por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

supuesto que exista ese límite.

El proceso de hallar la derivada de una función se llama **derivación**. Una función es **derivable** (o **diferenciable**) en x si su derivada en x existe, y derivable en un intervalo abierto (a, b) si es derivable en todos y cada uno de los puntos de ese intervalo.

Además de $f'(x)$, que se lee «f prima de x», se usan otras notaciones para la derivada de $y = f(x)$. Las más comunes son

$$f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad y', \quad \frac{d}{dx}[f(x)], \quad D_x[y]$$

Notaciones para la derivada

La notación dy/dx se lee «derivada de y *con respecto a* x». Usando notaciones de límites, podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Cálculo de la derivada por el proceso de límite

Hallar la derivada de $f(x) = x^3 + 2x$.

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 + 2(x + \Delta x) - (x^3 + 2x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2x + 2\Delta x - x^3 - 2x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}[3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2]}{\cancel{\Delta x}} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} [3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2] \\ &= 3x^2 + 2 \end{aligned}$$

□

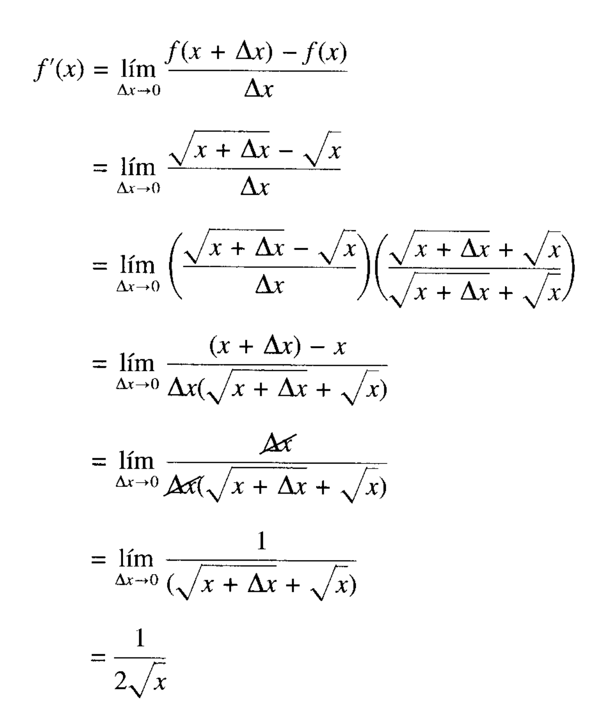
ADVERTENCIA Nótese que en los Ejemplos 1, 2 y 3, la condición clave para hallar la derivada de una función es reexpresar el cociente incremental, de manera que Δx no aparezca como factor del denominador.

Recordemos que la derivada de una función f es ella misma una función, que puede ser utilizada para hallar la pendiente de la recta tangente en el punto $(x, f(x))$ de la gráfica de f.

EJEMPLO 4 Uso de la derivada para calcular la pendiente en un punto

Hallar $f'(x)$ para $f(x) = \sqrt{x}$. Calcular a continuación la pendiente de la gráfica de f en los puntos (1, 1) y (4, 2). Discutir el comportamiento de f en (0, 0).

Solución: Racionalizando el numerador, como se explicó en la Sección 1.3.



$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}\right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

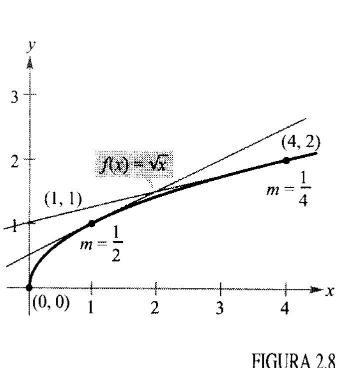


FIGURA 2.8
La pendiente de f en $(x, f(x))$, $x > 0$, es $m = 1/(2\sqrt{x})$.

En el punto (1, 1) la pendiente es $f'(1) = \frac{1}{2}$. En el punto (4, 2) la pendiente es $f'(4) = \frac{1}{4}$ (véase Figura 2.8). En el punto (0, 0) la pendiente no está definida. Además, al ser infinito el límite de $f'(x)$ cuando $x \to 0$ por la derecha, la gráfica de f tiene tangente vertical en (0, 0). □

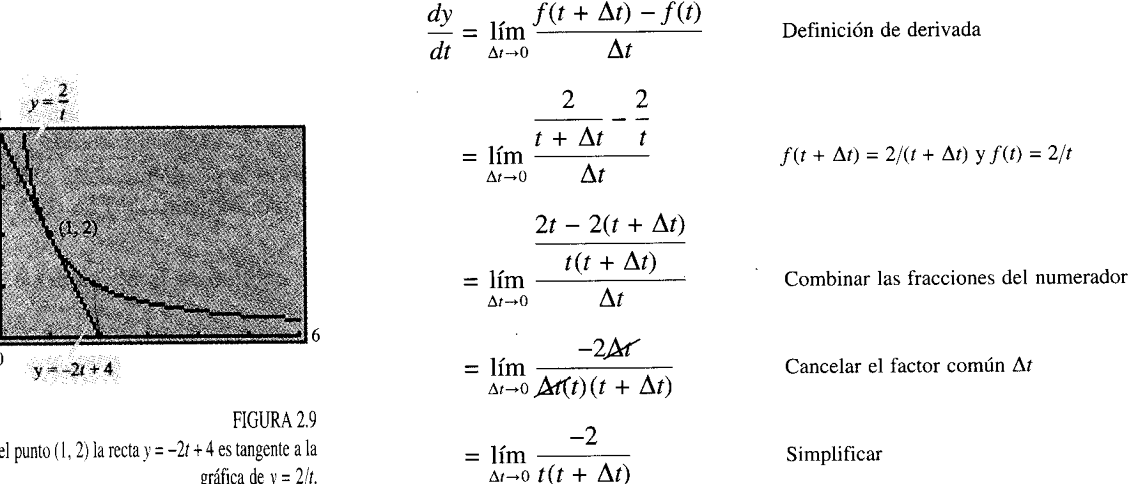
En muchas aplicaciones conviene usar una variable independiente distinta de x, como ocurre en el Ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Cálculo de la derivada de una función

Hallar la derivada respecto de t de la función $y = 2/t$.



Solución: Considerando $y = f(t)$ obtenemos



$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \qquad \text{Definición de derivada}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{2}{t + \Delta t} - \dfrac{2}{t}}{\Delta t} \qquad f(t + \Delta t) = 2/(t + \Delta t) \text{ y } f(t) = 2/t$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{2t - 2(t + \Delta t)}{t(t + \Delta t)}}{\Delta t} \qquad \text{Combinar las fracciones del numerador}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-2\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}(t)(t + \Delta t)} \qquad \text{Cancelar el factor común } \Delta t$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-2}{t(t + \Delta t)} \qquad \text{Simplificar}$$

$$= -\frac{2}{t^2} \qquad \text{Evaluar el límite para } \Delta t \to 0$$

□

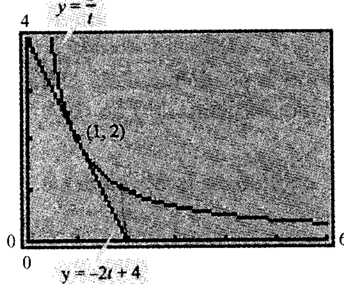


FIGURA 2.9
En el punto (1, 2) la recta $y = -2t + 4$ es tangente a la gráfica de $y = 2/t$.

Una calculadora corrobora el resultado del Ejemplo 5. Así, usando la fórmula $dy/dt = -2/t^2$, deducimos que la pendiente de la gráfica de $y = 2/t$ en el punto (1, 2) es $m = -2$. Esto implica que una ecuación de la recta tangente a la gráfica en (1, 2) es $y - 2 = -2(t - 1)$, o bien $y = -2t + 4$, como indica la Figura 2.9.

Derivabilidad y continuidad

La siguiente formulación alternativa como límite de la derivada es útil al investigar la relación entre derivabilidad y continuidad. La derivada de f en c es

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \qquad \text{Fórmula alternativa para la derivada}$$

supuesto que ese límite existe (véase Figura 2.10). (En el apéndice se demuestra la equivalencia de ambas fórmulas.) Obsérvese que la existencia del límite en esta formulación alternativa requiere que los límites unilaterales

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existan y sean iguales. Estos límites se llaman **derivadas por la izquierda y por la derecha**, respectivamente. Decimos que f es **derivable en un intervalo cerrado [*a*, *b*]** si es derivable en (a, b) y existen además la derivada por la derecha en a y la derivada por la izquierda en b.

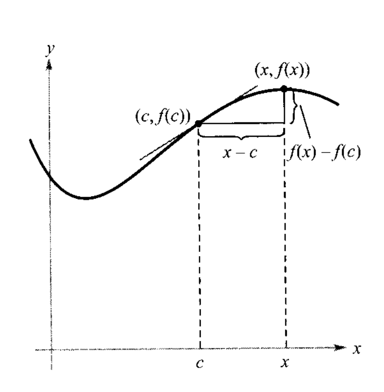


FIGURA 2.10
Cuando x tiende hacia c, la recta secante se aproxima a la recta tangente.

Si una función no es continua en $x = c$, no puede ser derivable en $x = c$. Por ejemplo, la función parte entera

$$f(x) = [\![x]\!]$$

no es continua en $x = 0$ y, en consecuencia, no es derivable en $x = 0$ (véase Figura 2.11). Podemos comprobarlo sin más que observar que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{[\![x]\!] - 0}{x} = \infty \qquad \text{Derivada por la izquierda}$$

y

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{[\![x]\!] - 0}{x} = 0 \qquad \text{Derivada por la derecha}$$

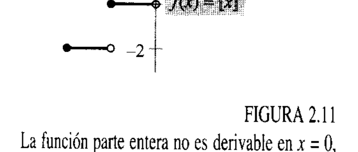


FIGURA 2.11
La función parte entera no es derivable en $x = 0$, ya que no es continua en $x = 0$.

Aunque es cierto que derivable implica continua (como demostraremos en el Teorema 2.1), el recíproco no es cierto. Esto es, puede ocurrir que una función sea continua en $x = c$ y no sea derivable en $x = c$. Los Ejemplos 6 y 7 ilustran tal posibilidad.

EJEMPLO 6 Una gráfica con un punto anguloso

La función $f(x) = |x - 2|$ que se muestra en la Figura 2.12 es continua en $x = 2$. Sin embargo, los límites unilaterales

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{|x - 2| - 0}{x - 2} = -1 \qquad \text{Derivada por la izquierda}$$

y

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{|x - 2| - 0}{x - 2} = 1 \qquad \text{Derivada por la derecha}$$

no son iguales. Por consiguiente, f no es derivable en $x = 2$ y la gráfica de f no tiene recta tangente en el punto (2, 0). □

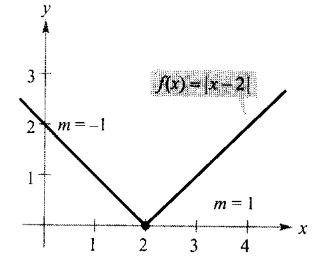
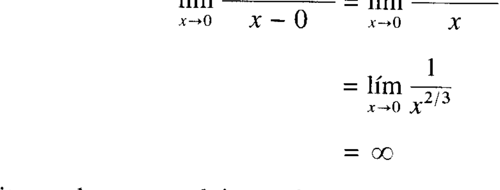


FIGURA 2.12
f no es derivable en $x = 2$, porque las derivadas laterales no son iguales.

EJEMPLO 7 Una gráfica con tangente vertical

La función $f(x) = x^{1/3}$ es continua en $x = 0$, como se ve en la Figura 2.13. Sin embargo, como el límite



$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{1/3} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = \infty$$

es infinito, podemos concluir que la recta tangente en $x = 0$ es vertical. Por tanto, f no es derivable en $x = 0$. □

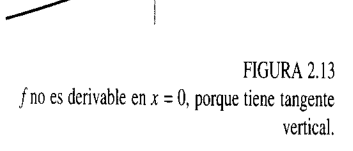


FIGURA 2.13
f no es derivable en $x = 0$, porque tiene tangente vertical.

De los Ejemplos 6 y 7 vemos que una función no es derivable en un punto donde su gráfica presente un punto anguloso o una tangente vertical.

TEOREMA 2.1 DERIVABLE IMPLICA CONTINUA

Si f es derivable en $x = c$, entonces f es continua en $x = c$.



Programas de ordenador como *Derive, Maple, Mathcad, Mathematica* o *TI-92* efectúan derivación simbólica. Otros hacen *derivación numérica*, calculando valores de la derivada mediante la fórmula

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

donde h es un número pequeño, digamos 0,001. ¿Ve alguna dificultad con esta definición? Por ejemplo, usándola ¿cuál sería la derivada de $f(x) = |x|$ en $x = 0$?

Demostración: Para probar que f es continua en $x = c$ bastará ver que $f(x)$ tiende a $f(c)$ cuando $x \to c$. A tal fin usaremos la derivabilidad de f en $x = c$ considerando el siguiente límite.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} [f(x) - f(c)] &= \lim_{x\to c} \left[(x-c)\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)\right] \\ &= \left[\lim_{x\to c} (x-c)\right]\left[\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right] \\ &= (0)[f'(c)] \\ &= 0\end{aligned}$$

Puesto que la diferencia $f(x) - f(c)$ tiende a cero cuando $x \to c$ concluimos que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Así pues, f es continua en $x = c$. □

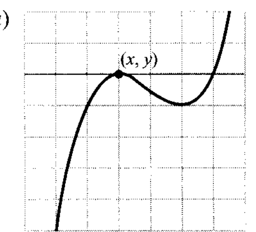
La relación entre derivabilidad y continuidad puede resumirse como sigue:

1. Si una función es derivable en $x = c$, entonces es continua en $x = c$. Es decir, derivable implica continua.
2. Es posible que una función sea continua en $x = c$ sin ser derivable. En otras palabras, continua no implica derivable.

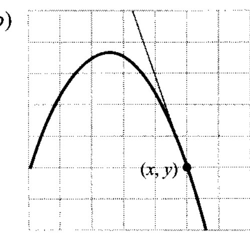
Ejercicios de la Sección 2.1

En los Ejercicios 1 y 2, estimar la pendiente de la curva en el punto (x, y).

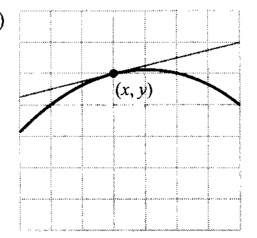
1. *a)*



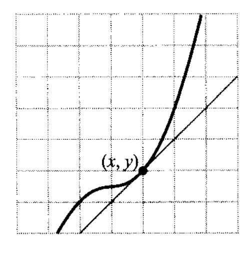
b)



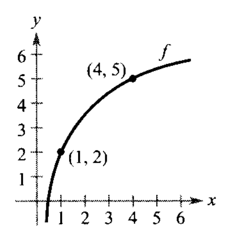
2. *a)*



b)



Para pensar En los Ejercicios 3 y 4, usar la gráfica adjunta.



3. Identificar o esbozar en la figura cada una de las cantidades siguientes.

a) $f(1)$ y $f(4)$ *b)* $f(4) - f(1)$

c) $y = \dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1}(x - 1) + f(1)$

4. Insertar un símbolo de desigualdad (< o >) entre estas cantidades.

a) $\dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$ ▒ $\dfrac{f(4) - f(3)}{4 - 3}$

b) $\dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$ ▒ $f'(1)$

En los Ejercicios 5-16, usar la definición de derivada para hallar $f'(x)$.

5. $f(x) = 3$ **6.** $f(x) = 3x + 2$

7. $f(x) = -5x$ **8.** $f(x) = 9 - \frac{1}{2}x$

9. $f(x) = 2x^2 + x - 1$ **10.** $f(x) = 1 - x^2$

11. $f(x) = x^3 - 12x$ **12.** $f(x) = x^3 + x^2$

13. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ **14.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

15. $f(x) = \sqrt{x-4}$ **16.** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

En los Ejercicios 17-22, *a*) hallar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto indicado, *b*) usar una calculadora para representar la gráfica y esa recta tangente, y *c*) confirmar los resultados en la propia calculadora.

17. $f(x) = x^2 + 1$
$(2, 5)$

18. $f(x) = x^2 + 2x + 1$
$(-3, 4)$

19. $f(x) = x^3$
$(2, 8)$

20 $f(x) = \sqrt{x}$
$(1, 1)$

21. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
$(1, 2)$

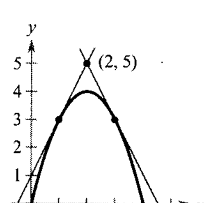
22. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$
$(0, 1)$

En los Ejercicios 23 y 24, hallar una ecuación de la recta que es tangente a la gráfica de f y paralela a la recta dada.

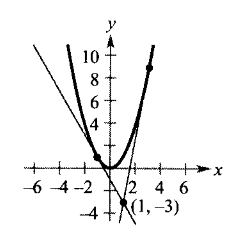
	Función	*Recta*
23.	$f(x) = x^3$	$3x - y + 1 = 0$
24.	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x + 2y - 6 = 0$

En los Ejercicios 25 y 26, hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto indicado.

25. $f(x) = 4x - x^2$

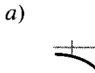
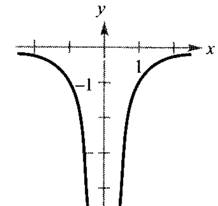


26. $f(x) = x^2$

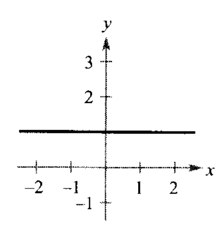


En los Ejercicios 27-32, usar las gráficas propuestas y la interpretación geométrica de la derivada para emparejar cada función con la gráfica de su derivada. No es preciso calcular la derivada de la función analíticamente.

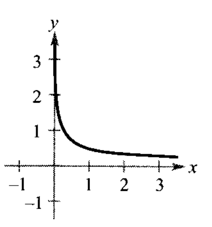
a)

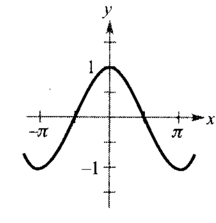
b)



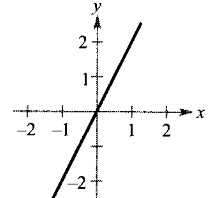
c)



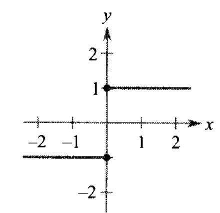
d)



e)



f)

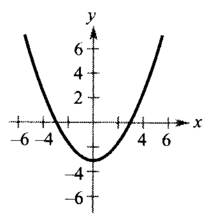


27. $f(x) = x$ **28.** $f(x) = x^2$

29. $f(x) = \sqrt{x}$ **30.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

31. $f(x) = |x|$ **32.** $f(x) = \text{sen } x$

33. ***Razonamiento gráfico*** La figura muestra la gráfica de g'.



a) $g'(0) =$

b) $g'(3) =$

c) ¿Qué se puede deducir acerca de la gráfica de g sabiendo que $g'(1) = -\frac{8}{3}$?

d) ¿Qué se puede deducir acerca de la gráfica de g sabiendo que $g'(-4) = \frac{7}{3}$?

e) $g(6) - g(4)$ ¿es negativo o positivo?

f) ¿Es posible hallar $g(2)$ a partir de la gráfica? ¿Por qué?

34. ***Razonamiento gráfico*** Representar en la calculadora cada función y sus rectas tangentes para $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$. Usando esos resultados, determinar si la pendiente de la recta tangente a una gráfica es necesariamente distinta para valores distintos de x.

a) $f(x) = x^2$ *b*) $g(x) = x^3$

35. ***Para pensar*** Dibujar una función cuya derivada sea siempre negativa.

36. ***Para pensar*** Dibujar una función cuya derivada sea siempre positiva.

Investigación numérica, gráfica y analítica En los Ejercicios 37 y 38, representar f en la calculadora sobre el intervalo $[-2, 2]$. Completar la tabla estimando *gráficamente* las pendientes de la gráfica en los puntos que se indican. Evaluar después las pendientes *analíticamente* y comparar los resultados.

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2
$f(x)$									
$f'(x)$									

37. $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ **38.** $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

Razonamiento gráfico En los Ejercicios 39 y 40, usar la calculadora para dibujar f y g en una misma ventana (pantalla), siendo

$$g(x) = \frac{f(x + 0{,}01) - f(x)}{0{,}01}$$

Describir la relación entre las dos gráficas.

39. $f(x) = 2x - x^2$ **40.** $f(x) = 3\sqrt{x}$

En los Ejercicios 41 y 42, usar una calculadora para representar la función y su derivada en la misma pantalla. Describir la relación entre ambas gráficas.

41. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ **42.** $f(x) = \frac{x^3}{4} - 3x$

Redacción En los Ejercicios 43 y 44, consideramos las funciones $f(x)$ y $S_{\Delta x}(x)$ donde

$$S_{\Delta x}(x) = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}(x - 2) + f(2)$$

a) Dibujar con la calculadora f y $S_{\Delta x}$ en la misma pantalla para $\Delta x = 1$, 0,5 y 0,1.

b) Redactar una descripción de las gráficas de S para los diferentes valores de Δx en la parte *a*).

43. $f(x) = 4 - (x - 3)^2$ **44.** $f(x) = x + \frac{1}{x}$

En los Ejercicios 45-50, usar la forma alternativa de la derivada para calcular la derivada en $x = c$ (si existe).

45. $f(x) = x^2 - 1, \quad c = 2$

46. $f(x) = x^3 + 2x, \quad c = 1$

47. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1, \quad c = -2$

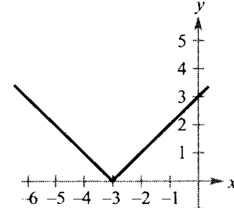
48. $f(x) = 1/x, c = 3$

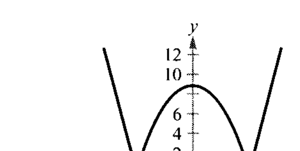
49. $f(x) = (x - 1)^{2/3}, \quad c = 1$

50. $f(x) = |x - 2|, \quad c = 2$

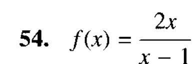
En los Ejercicios 51-60, describir los valores x para los que f es derivable.

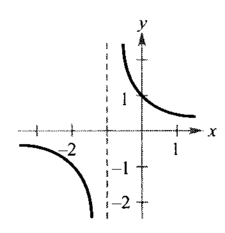
51. $f(x) = |x + 3|$ **52.** $f(x) = |x^2 - 9|$

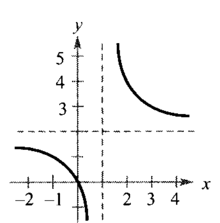




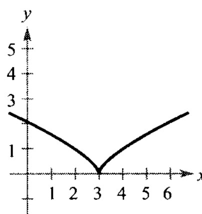
53. $f(x) = \frac{1}{x + 1}$ **54.** $f(x) = \frac{2x}{x - 1}$

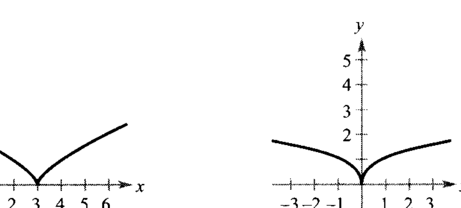




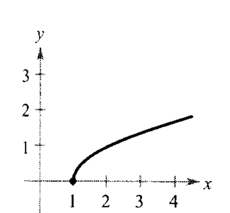


55. $f(x) = (x - 3)^{2/3}$ **56.** $f(x) = x^{2/5}$

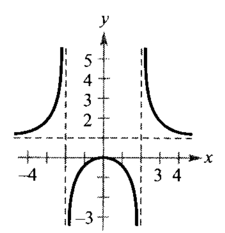




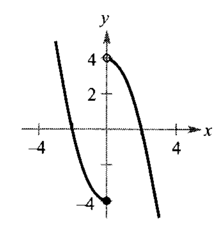
57. $f(x) = \sqrt{x - 1}$



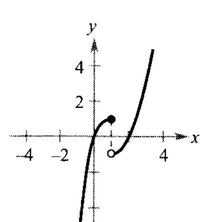
58. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$



59. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x > 0 \\ x^2 - 4, & x \leqslant 0 \end{cases}$



60. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x > 1 \\ x^3 - 3x^2 + 3x, & x \leqslant 1 \end{cases}$



En los Ejercicios 61-64, hallar las derivadas laterales en $x = 1$ (si existen). ¿Es derivable la función en $x = 1$?

61. $f(x) = |x - 1|$

62. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

63. $f(x) = \begin{cases} (x - 1)^3, & x \leqslant 1 \\ (x - 1)^2, & x > 1 \end{cases}$

64. $f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 2 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

En los Ejercicios 65 y 66, discutir si la función es derivable en $x = 2$.

65. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leqslant 2 \\ 4x - 3, & x > 2 \end{cases}$

66. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x < 2 \\ \sqrt{2x}, & x \geqslant 2 \end{cases}$

67. ***Razonamiento gráfico*** Una recta de pendiente m pasa por el punto (0, 4) y tiene ecuación $y = mx + 4$.
   a) Escribir la distancia d del punto (3, 1) a la recta como función de m.
   b) Usar una calculadora para dibujar la función d. A la vista de esta gráfica, ¿es esa función derivable para todo valor de m? Especificar dónde no lo es.

68. ***Para pensar*** Sabiendo que $f'(c) = 3$, calcular $f'(-c)$ supuesto que
   a) f es una función impar.
   b) f es una función par.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 69-71, decidir si es cierta cada afirmación. Para las que sean falsas, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.

69. Si una función f es continua en un punto, es derivable en él.

70. Si una función f tiene derivadas laterales por la derecha y por la izquierda en un punto, es derivable en él.

71. Si una función f es derivable en un punto, entonces es continua en él.

72. ***Conjetura*** Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$.
   a) Dibujar f y f' en unos mismos ejes.
   b) Dibujar g y g' en unos mismos ejes.
   c) Identificar cualquier relación entre las gráficas de f y g con las de sus derivadas respectivas. A continuación enunciar una conjetura sobre $h'(x)$ si $h(x) = x^n$, donde n es un entero y $n \geqslant 2$.
   d) Hallar $f'(x)$ si $f(x) = x^4$. Comparar el resultado con la conjetura anterior. ¿Demuestra esto la conjetura? Explicar la respuesta.

73. Sean

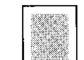
$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Probar que f es continua, pero no derivable, en $x = 0$. Demostrar que g es derivable en 0 y calcular $g'(0)$.

74. ***Redacción*** Representar en la calculadora $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = |x| + 1$ simultáneamente. Usar el efecto *zoom* para analizarlas cerca del punto (0, 1). ¿Qué se observa? ¿Qué función es derivable en ese punto? Escribir un párrafo breve describiendo el significado geométrico de la derivabilidad en un punto.



2.2 Reglas básicas de derivación y ritmos de cambio

CONTENIDO ▪
La regla de la constante ▪
La regla de las potencias ▪
La regla del múltiplo constante ▪
Las reglas de suma y diferencia ▪
Derivadas de las funciones seno y coseno ▪
Ritmos de cambio ▪

La regla de la constante

En la Sección 2.1 hemos usado la definición mediante límites para hallar derivadas. En ésta y en las dos próximas secciones presentamos varias «reglas de derivación» que permiten calcular derivadas sin el uso *directo* de la definición por límites.

TEOREMA 2.2 LA REGLA DE LA CONSTANTE

La derivada de una función constante es 0. Es decir, si c es un número real, entonces

$$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

Demostración: Si $f(x) = c$, de la definición de la derivada deducimos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[c] &= f'(x) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\ &= 0\end{aligned}$$ □

La pendiente de una recta horizontal es 0

$f(x) = c$

La derivada de una función constante es 0

FIGURA 2.14
La regla de la constante.

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla de la constante

	Función	*Derivada*
a)	$y = 7$	$\frac{dy}{dx} = 0$
b)	$f(x) = 0$	$f'(x) = 0$
c)	$s(t) = -3$	$s'(t) = 0$
d)	$y = k\pi^2$, k es constante	$y' = 0$

□

Nota. Observamos en la Figura 2.14 que la regla de la constante es equivalente a decir que la pendiente de una recta horizontal es 0. Esto ilustra la relación entre derivada y pendiente.

EXPLORACIÓN

Formulando una conjetura Utilizar la definición de derivada de la Sección 2.1 para hallar la derivada de las siguientes funciones. ¿Adivina alguna regla general? Observando sus resultados, formule una conjetura acerca de la derivada de $f(x) = x^n$.

a) $f(x) = x^1$ *b*) $f(x) = x^2$ *c*) $f(x) = x^3$
d) $f(x) = x^4$ *e*) $f(x) = x^{1/2}$ *f*) $f(x) = x^{-1}$

La regla de las potencias

Antes de demostrar la próxima regla, vamos a revisar el proceso de desarrollo de un binomio.

$$(x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$
$$(x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

El desarrollo para un entero positivo n arbitrario es

$$(x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \underbrace{\frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n}_{(\Delta x)^2 \text{ es factor común en estos términos}}.$$

Este desarrollo del binomio se va a utilizar para demostrar un caso especial de la regla de las potencias.

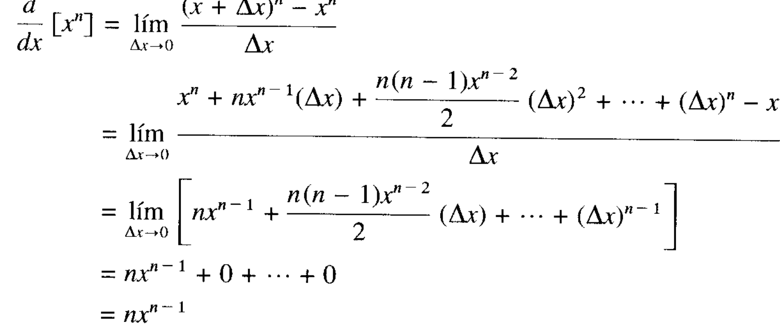
TEOREMA 2.3 LA REGLA DE LAS POTENCIAS

Si n es un número racional, la función $f(x) = x^n$ es derivable y

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

Para que f sea derivable en $x = 0$, n ha de ser un número tal que x^{n-1} esté definido en un intervalo que contenga a 0.

Demostración: Si n es un entero mayor que 1, del desarrollo del binomio resulta



$$\frac{d}{dx}[x^n] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x) + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right]$$

$$= nx^{n-1} + 0 + \cdots + 0$$

$$= nx^{n-1}$$

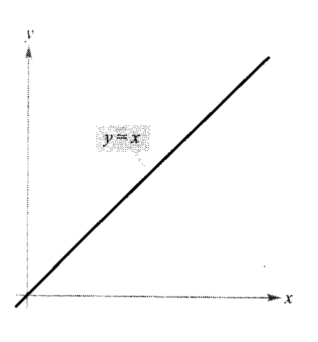


FIGURA 2.15
La pendiente de la recta $y = x$ es 1.

Esto demuestra el teorema para $n > 1$. Dejamos al lector la demostración del caso $n = 1$. El Ejercicio 59 de la Sección 2.5 demuestra el caso en que n es racional. (En la Sección 5.5 se extenderá la regla de las potencias a cualquier valor real de n). □

En la regla de las potencias, conviene separar el caso $n = 1$ como otra regla distinta de derivación, a saber

$$\boxed{\frac{d}{dx}[x] = 1}$$ Regla de las potencias para $n = 1$

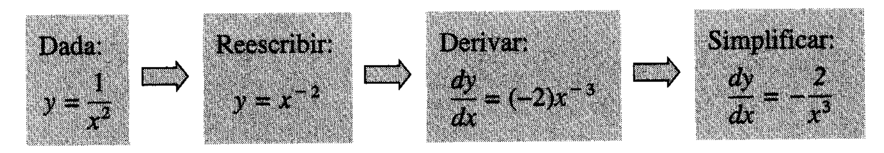
Esta regla es consistente con el hecho de que la pendiente de la recta $y = x$ es 1 (véase Figura 2.15).

EJEMPLO 2 Aplicación de la regla de las potencias

	Función	*Derivada*
a)	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
b)	$g(x) = \sqrt[3]{x}$	$g'(x) = \frac{d}{dx}[x^{1/3}] = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}}$
c)	$y = \frac{1}{x^2}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[x^{-2}] = (-2)x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

□

En el Ejemplo 2*c*, antes de derivar hemos reescrito $1/x^2$ como x^{-2}. Pues bien, en muchos problemas de derivación el primer paso es reescribir la función dada.



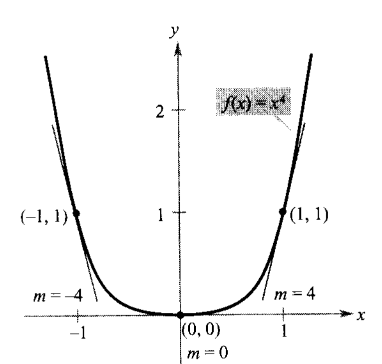


FIGURA 2.16
La pendiente de una gráfica en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

EJEMPLO 3 Pendiente de una gráfica

Calcular la pendiente de la gráfica de $f(x) = x^4$ cuando

a) $x = -1$ *b*) $x = 0$ *c*) $x = 1$.

Solución: La derivada de f es $f'(x) = 4x^3$.

a) Para $x = -1$, la pendiente es $f'(-1) = 4\,(-1)^3 = -4$.

b) Para $x = 0$, la pendiente es $f'(0) = 4\,(0)^3 = 0$.

c) Para $x = 1$, la pendiente es $f'(1) = 4(1)^3 = 4$.

Hagamos notar que en la Figura 2.16 la pendiente es negativa en el punto (−1, 1), cero en el (0, 0) y positiva en el (1, 1).

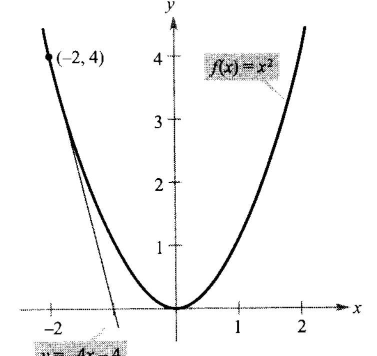


FIGURA 2.17
La recta tangente $y = -4x - 4$ es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto (−2, 4).

EJEMPLO 4 Ecuación de una recta tangente

Hallar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en $x = -2$.

Solución: Para hallar el punto sobre la gráfica de f evaluamos la función en $x = -2$.

$$(-2, f(-2)) = (-2, 4) \qquad \text{Punto de la gráfica}$$

Para calcular la pendiente de la gráfica en $x = -2$, evaluamos la derivada, $f'(x) = 2x$, en $x = -2$.

$$m = f'(-2) = -4 \qquad \text{Pendiente de la gráfica en } (-2, 4)$$

Ahora, usando la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, podemos escribir

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{Forma punto-pendiente}$$
$$y - 4 = -4[x - (-2)] \qquad \text{Sustituir } y_1, m, \text{ y } x_1$$
$$y = -4x - 4 \qquad \text{Simplificar}$$

(Véase Figura 2.17.)

La regla del múltiplo constante

TEOREMA 2.4 LA REGLA DEL MÚLTIPLO CONSTANTE

Si f es derivable y c un número real, entonces cf es también derivable y

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[cf(x)] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} c\left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] \\ &= c\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] \\ &= cf'(x)\end{aligned}$$

□

Esta regla viene a afirmar que las constantes se pueden sacar fuera de la derivada, incluso cuando aparecen en un denominador.

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[(\;)f(x)] = cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{c}\right] = \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{1}{c}\right)f(x)\right] = \left(\frac{1}{c}\right)\frac{d}{dx}[(\;)f(x)] = \left(\frac{1}{c}\right)f'(x)$$

EJEMPLO 5 Usando la regla del múltiplo constante

	Función	*Derivada*
a)	$y = \dfrac{2}{x}$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}[2x^{-1}] = 2\dfrac{d}{dx}[x^{-1}] = 2(-1)x^{-2} = -\dfrac{2}{x^2}$
b)	$f(t) = \dfrac{4t^2}{5}$	$f'(t) = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{4}{5}t^2\right] = \dfrac{4}{5}\dfrac{d}{dt}[t^2] = \dfrac{4}{5}(2t) = \dfrac{8}{5}t$
c)	$y = 2\sqrt{x}$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}[2x^{1/2}] = 2\left(\dfrac{1}{2}x^{-1/2}\right) = x^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

d) $y = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{2}x^{-2/3}\right] = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{2}{3}\right)x^{-5/3} = -\dfrac{1}{3x^{5/3}}$

e) $y = -\dfrac{3x}{2}$ $\qquad y' = \dfrac{d}{dx}\left[-\dfrac{3}{2}x\right] = -\dfrac{3}{2}(1) = -\dfrac{3}{2}$ □

| Nota. La regla del múltiplo constante y la de las potencias se pueden combinar en una sola como $D_x[cx^n] = cnx^{n-1}$.

EJEMPLO 6 Uso de paréntesis al derivar

	Función original	*Reescribir*	*Derivar*	*Simplificar*
a)	$y = \dfrac{5}{2x^3}$	$y = \dfrac{5}{2}(x^{-3})$	$y' = \dfrac{5}{2}(-3x^{-4})$	$y' = -\dfrac{15}{2x^4}$
b)	$y = \dfrac{5}{(2x)^3}$	$y = \dfrac{5}{8}(x^{-3})$	$y' = \dfrac{5}{8}(-3x^{-4})$	$y' = -\dfrac{15}{8x^4}$
c)	$y = \dfrac{7}{3x^{-2}}$	$y = \dfrac{7}{3}(x^2)$	$y' = \dfrac{7}{3}(2x)$	$y' = \dfrac{14x}{3}$
d)	$y = \dfrac{7}{(3x)^{-2}}$	$y = 63(x^2)$	$y' = 63(2x)$	$y' = 126x$ □

Las reglas de suma y diferencia

TEOREMA 2.5 LAS REGLAS DE SUMA Y DIFERENCIA

La derivada de la suma (o de la diferencia) de dos funciones derivables es la suma (o diferencia) de sus derivadas.

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x) \qquad \textbf{Regla de la suma}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x) \qquad \textbf{Regla de la diferencia}$$

Demostración: Una demostración de la regla de la suma se sigue del Teorema 1.2 (la de la diferencia se demuestra de manera análoga).

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

□

Las reglas de suma y diferencia admiten extensión inmediata a cualquier número finito de funciones. Así, si $F(x) = f(x) + g(x) - h(x) - k(x)$, entonces $F'(x) = f'(x) + g'(x) - h'(x) - k'(x)$.

EJEMPLO 7 Aplicación de las reglas de suma y diferencia

	Función	*Derivada*
a)	$f(x) = x^3 - 4x + 5$	$f'(x) = 3x^2 - 4$
b)	$g(x) = -\dfrac{x^4}{2} + 3x^3 - 2x$	$g'(x) = -2x^3 + 9x^2 - 2$

□

Derivadas de las funciones seno y coseno

PARA MÁS INFORMACIÓN El esbozo de una demostración geométrica de las derivadas de seno y coseno puede consultarse en el artículo «The Spider's Spacewalk Derivation of sin′ and cos′» de Tim Hesterberg en el volumen de marzo de 1995 de *The College Mathematics Journal.*

En la Sección 1.3 vimos los límites siguientes:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} = 0$$

Estos dos límites pueden utilizarse para demostrar las reglas de derivación de seno y coseno (las derivadas de las demás funciones trigonométricas serán objeto de estudio en la Sección 2.3).

TEOREMA 2.6 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x \qquad \frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos \Delta x + \cos x \operatorname{sen} \Delta x - \operatorname{sen} x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \operatorname{sen} \Delta x - (\operatorname{sen} x)(1 - \cos \Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[(\cos x)\left(\frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}\right) - (\operatorname{sen} x)\left(\frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x}\right) \right] \\
&= \cos x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \right) - \operatorname{sen} x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} \right) \\
&= (\cos x)(1) - (\operatorname{sen} x)(0) \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

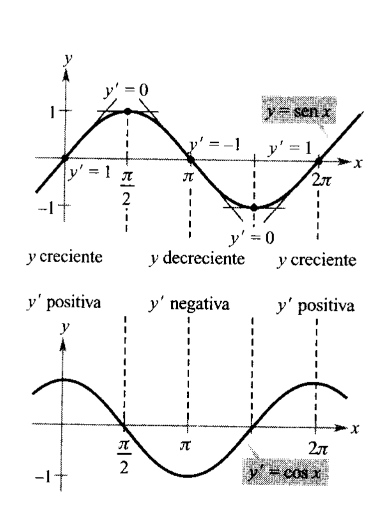


FIGURA 2.18
La derivada de la función seno es la función coseno.

Esta regla de derivación se ilustra en la Figura 2.18, en la que vemos que, para cada x, la *pendiente* de la curva seno es igual al *valor* del coseno. La demostración de la segunda regla se deja como ejercicio (véase Ejercicio 95). □



	Función	*Derivada*
a)	$y = 2 \text{ sen } x$	$y' = 2 \cos x$
b)	$y = \dfrac{\text{sen } x}{2} = \dfrac{1}{2} \text{ sen } x$	$y' = \dfrac{1}{2} \cos x = \dfrac{\cos x}{2}$
c)	$y = x + \cos x$	$y' = 1 - \text{sen } x$

□

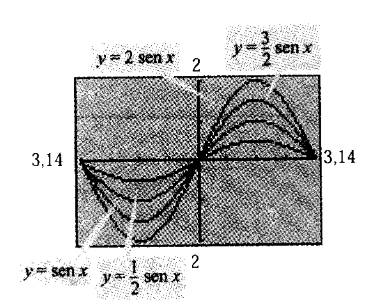


FIGURA 2.19
$\dfrac{d}{dx}[a \text{ sen } x] = a \cos x.$



Una calculadora permite visualizar la interpretación de una derivada. Por ejemplo, la Figura 2.19 muestra las gráficas de

$$y = a \text{ sen } x$$

para $a = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$, y 2. Estimar la pendiente de cada gráfica en el punto (0, 0). Verificar después esas estimaciones analíticamente calculando la derivada de cada función en $x = 0$.

Ritmos de cambio

Ya hemos visto que la derivada se puede usar para calcular pendientes. Pues bien, también sirve para determinar el ritmo de cambio de una variable con respecto a otra, lo que le confiere utilidad en una amplia variedad de situaciones. Por citar sólo algunas, son ejemplos los ritmos de crecimiento de poblaciones, los ritmos de producción, los de flujo de un líquido, la velocidad y la aceleración.

Un uso frecuente de los ritmos de cambio consiste en describir el movimiento de un objeto que se mueve en línea recta. En tales cuestiones, suele representarse la recta del movimiento en posición horizontal o vertical, con un cierto origen marcado en ella. Sobre tales rectas, el movimiento hacia la derecha (o hacia arriba) se considera de dirección positiva y el movimiento hacia la izquierda (o hacia abajo) de dirección negativa.

La función s que da la posición (relativa al origen) de un objeto como función del tiempo t se llama **función** (de) **posición**. Si durante un lapso de tiempo Δt el objeto cambia su posición en una cantidad $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$, por la fórmula conocida

$$\text{Razón} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

la velocidad media es

$$\boxed{\frac{\text{Cambio en distancia}}{\text{Cambio en tiempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.}$$ Velocidad media

EJEMPLO 9 Velocidad media de un objeto en su caída

Si se deja caer una bola desde una altura de 100 pies, su altura en el instante t viene dada por la función posición

$$s = -16t^2 + 100$$ Función posición

donde s se mide en pies y t en segundos. Hallar la velocidad media en cada uno de estos intervalos de tiempo.

a) [1, 2] *b*) [1, 1,5] *c*) [1, 1,1]

Solución:

a) En el intervalo [1, 2] el objeto cae desde una altura de $s(1) = -16(1)^2 + 100 = 84$ pies hasta una altura de $s(2) = -16(2)^2 + 100 = 36$ pies. La velocidad media es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{36 - 84}{2 - 1} = \frac{-48}{1} = -48 \text{ pies por segundo}$$

b) Durante el intervalo [1, 1,5] el objeto cae desde una altura de 84 pies hasta una altura de 64 pies. La velocidad media es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{64 - 84}{1{,}5 - 1} = \frac{-20}{0{,}5} = -40 \text{ pies por segundo}$$

c) Durante el intervalo [1, 1,1] el objeto cae desde una altura de 84 pies hasta una altura de 80,64 pies. La velocidad media es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{80{,}64 - 84}{1{,}1 - 1} = \frac{-3{,}36}{0{,}1} = -33{,}6 \text{ pies por segundo}$$

Nótese que las velocidades medias son negativas, lo que refleja el hecho de que el objeto se mueve hacia abajo. □

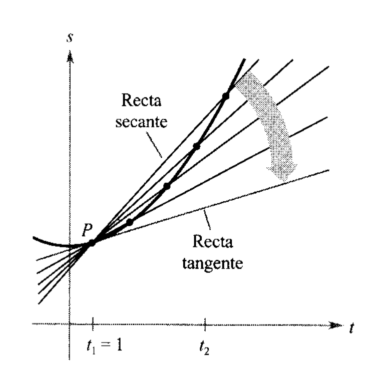


FIGURA 2.20
La velocidad media entre t_1 y t_2 es la pendiente de la recta secante. La velocidad instantánea en t_1 es la pendiente de la recta tangente.

Supongamos que en el ejemplo anterior deseáramos hallar la velocidad *instantánea* (o velocidad, sin más) del objeto cuando $t = 1$. Al igual que la pendiente de la recta tangente puede aproximarse por las pendientes de rectas secantes, podemos aproximar la velocidad en $t = 1$ por las velocidades medias sobre pequeños intervalos de tiempo $[1, 1 + \Delta t]$ (véase Figura 2.20). Tomando el límite cuando Δt tiende a cero obtenemos dicha velocidad. Intente hacerlo y comprobará que la velocidad cuando $t = 1$ es -32 pies por segundo.

En general, si $s = s(t)$ es la función posición de un objeto en movimiento rectilíneo, su **velocidad** en el instante t es

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t).$$
Función velocidad

En otras palabras, la función velocidad es la derivada de la función posición. (La velocidad puede ser positiva, cero o negativa. La **rapidez**, entendiendo por tal el valor absoluto de la velocidad, nunca es negativa.)

La posición de un objeto en caída libre (despreciando la resistencia del aire) bajo la influencia de la gravedad viene dada por la ecuación

$$s(t) = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + s_0$$
Función posición

donde s_0 es la altura inicial del objeto, v_0 la velocidad inicial y g la aceleración de la gravedad, que en la superficie terrestre viene a ser $-9{,}8$ m/s^2 (o sea, -32 pies/s^2).

EJEMPLO 10 Usando la derivada para calcular la velocidad

En el instante $t = 0$, un saltador se lanza desde un trampolín que está a 32 pies sobre el nivel del agua de la piscina (Figura 2.21). La posición del saltador viene dada por

$$s(t) = -16t^2 + 16t + 32$$

donde s se mide en pies y t en segundos.

a) ¿Cuánto tarda el saltador en llegar al agua?

b) ¿Cuál es su velocidad en el momento del impacto?

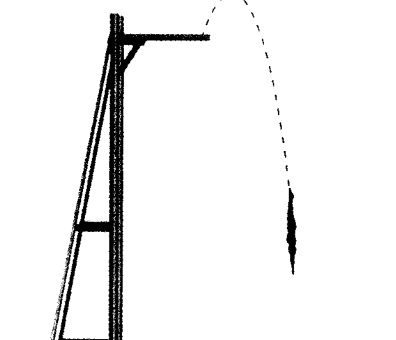


FIGURA 2.21
La velocidad es positiva cuando un objeto sube, y negativa cuando baja.

| Nota. En la Figura 2.21 debe observarse que el saltador sube durante el primer medio segundo, ya que su velocidad es positiva para $0 < t < \frac{1}{2}$. Cuando la velocidad es 0, el saltador ha alcanzado la máxima altura del salto.

Solución:

a) Para determinar el momento en que toca el agua hacemos $s = 0$ y despejamos t.

$$-16t^2 + 16t + 32 = 0$$
$$-16(t + 1)(t - 2) = 0$$
$$t = -1 \text{ o } 2$$

Como $t \geqslant 0$, escogemos el valor positivo, concluyendo que el saltador llega al agua en $t = 2$ segundos.

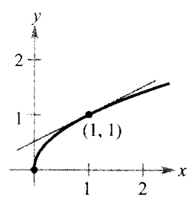
b) Su velocidad en el instante t viene dada por la derivada $s'(t) = -32t + 16$. En consecuencia, su velocidad en $t = 2$ es

$$s'(2) = -32(2) + 16 = -48 \text{ pies por segundo}$$ □

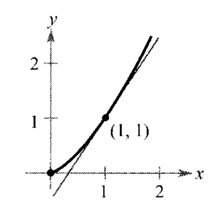
Ejercicios de la Sección 2.2

En los Ejercicios 1 y 2, hallar la pendiente de la recta tangente a $y = x^n$ en el punto (1, 1).

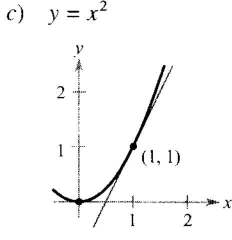
1. *a*) $y = x^{1/2}$



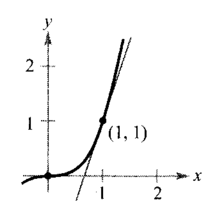
b) $y = x^{3/2}$



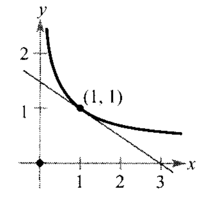
c) $y = x^2$



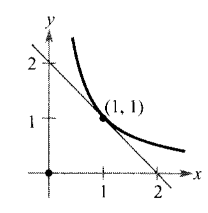
d) $y = x^3$



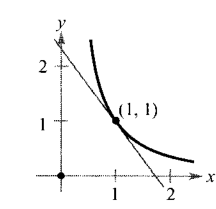
2. *a*) $y = x^{-1/2}$

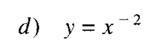


b) $y = x^{-1}$

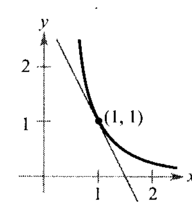


c) $y = x^{-3/2}$





d) $y = x^{-2}$



En los Ejercicios 3-16, hallar la derivada de la función dada.

3. $y = 3$

4. $f(x) = -2$

5. $f(x) = x + 1$

6. $g(x) = 3x - 1$

7. $g(x) = x^2 + 4$

8. $y = t^2 + 2t - 3$

9. $f(t) = -2t^2 + 3t - 6$

10. $y = x^3 - 9$

11. $s(t) = t^3 - 2t + 4$

12. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x$

13. $y = x^2 - \frac{1}{2}\cos x$

14. $y = 5 + \operatorname{sen} x$

15. $y = \dfrac{1}{x} - 3 \operatorname{sen} x$

16. $g(t) = \pi \cos t$

En los Ejercicios 17-22, completar la tabla, usando como modelo el Ejemplo 6.

	Función original	*Reescribir*	*Derivar*	*Simplificar*
17.	$y = \dfrac{1}{3x^3}$			
18.	$y = \dfrac{2}{3x^2}$			
19.	$y = \dfrac{1}{(3x)^3}$			
20.	$y = \dfrac{\pi}{(3x)^3}$			
21.	$y = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$			
22.	$y = \dfrac{4}{x^{-3}}$			

En los Ejercicios 23-30, calcular el valor de la derivada de la función en el punto indicado. Confirmar los resultados con una calculadora.

	Función	*Punto*
23.	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$(1, 1)$
24.	$f(t) = 3 - \dfrac{3}{5t}$	$(\frac{3}{5}, 2)$
25.	$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{7}{5}x^3$	$(0, -\frac{1}{2})$
26.	$y = 3x\left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right)$	$(2, 18)$
27.	$y = (2x + 1)^2$	$(0, 1)$
28.	$f(x) = 3(5 - x)^2$	$(5, 0)$
29.	$f(\theta) = 4 \operatorname{sen} \theta - \theta$	$(0, 0)$
30.	$g(t) = 2 + 3 \cos t$	$(\pi, -1)$

En los Ejercicios 31-42, hallar la derivada de cada función.

31. $f(x) = x^3 - 3x - 2x^{-4}$

32. $f(x) = x^2 - 3x - 3x^{-2}$

33. $g(t) = t^2 - \dfrac{4}{t}$

34. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$

35. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$

36. $h(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x}$

37. $y = x(x^2 + 1)$

38. $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$

39. $h(s) = s^{4/5}$

40. $f(t) = t^{1/3} - 1$

41. $f(x) = 4\sqrt{x} + 3 \cos x$

42. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$

En los Ejercicios 43-46, *a*) hallar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto indicado, *b*) representar la función y su recta tangente en una calculadora, y *c*) confirmar los resultados usando la calculadora para derivar.

	Función	*Punto*
43.	$y = x^4 - 3x^2 + 2$	$(1, 0)$
44.	$y = x^3 + x$	$(-1, -2)$
45.	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$	$(8, \frac{1}{4})$
46.	$y = (x^2 + 2x)(x + 1)$	$(1, 6)$

En los Ejercicios 47-52, localizar los puntos (si los hay) en los que la función tiene tangente horizontal.

47. $y = x^4 - 8x^2 + 2$

48. $y = x^3 + x$

49. $y = \dfrac{1}{x^2}$

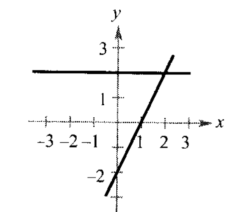
50. $y = x^2 + 1$

51. $y = x + \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x < 2\pi$

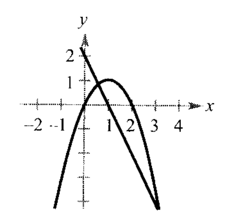
52. $y = \sqrt{3}x + 2 \cos x, \ 0 \leqslant x < 2\pi$

Redacción En los Ejercicios 53 y 54, se dan las gráficas de una función *f* y de su derivada *f'* sobre unos ejes comunes. Explicar en un breve párrafo las dos parejas de gráficas.

53.



54.



55. Dibujar las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$ e $y = -x^2 + 6x - 5$, así como las rectas que son tangentes a ambas gráficas. Hallar las ecuaciones de estas rectas.

56. Probar que las gráficas de $y = x$ e $y = 1/x$ tienen rectas tangentes perpendiculares entre sí en su punto de intersección.

En los Ejercicios 57 y 58, hallar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que pase por el punto (x_0, y_0), no perteneciente a la gráfica. Para determinar el punto de tangencia (x, y) en la gráfica de f, resolver la ecuación.

$$f'(x) = \frac{y_0 - y}{x_0 - x}$$

57. $f(x) = \sqrt{x}$

$(x_0, y_0) = (-4, 0)$

58. $f(x) = \frac{2}{x}$

$(x_0, y_0) = (5, 0)$

59. ***Aproximación lineal*** Consideremos la función $f(x) = x^{3/2}$ y el punto (4, 8) de su gráfica.

a) Dibujar la gráfica de f en la calculadora. Usar el *zoom* para ampliar el entorno del punto (4, 8). Tras varias ampliaciones, la gráfica aparecerá como una recta. Determinar las coordenadas de un punto de la gráfica próximo al (4, 8). Hallar una ecuación para la secante que une esos dos puntos.

b) Hallar la ecuación de la recta

$$T(x) = f'(4)(x - 4) + f(4)$$

tangente a la gráfica de f que pasa por el punto dado. ¿Por qué las funciones lineales S y T son casi la misma?

c) Representar en la misma ventana de la calculadora f y T. Observar que T es una «buena» aproximación de f cuando x es «próximo a» 4. ¿Qué ocurre con la precisión de esta aproximación cuando nos alejamos del punto de tangencia?

d) Ilustrar la conclusión del apartado *c*) completando la tabla.

Δx	−3	−2	−1	−0,5	−0,1	0
$f(x)$						
$T(x)$						

Δx	0,1	0,5	1	2	3
$f(x)$					
$T(x)$					

60. ***Aproximación lineal*** Repetir el Ejercicio 59 con $f(x) = x^3$, siendo ahora $T(x)$ la recta tangente en el punto (1, 1). Explicar por qué la precisión de la aproximación lineal decrece más deprisa que en el ejercicio anterior.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 61-64, decidir si el enunciado es cierto. En caso de ser falso, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

61. Si $f'(x) = g'(x)$, entonces $f(x) = g(x)$.

62. Si $f(x) = g(x) + c$, entonces $f'(x) = g'(x)$.

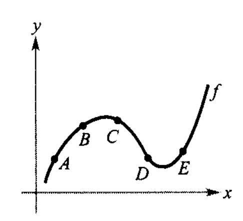
63. Si $y = \pi^2$, entonces $dy/dx = 2\pi$.

64. Si $y = x/\pi$, entonces $dy/dx = 1/\pi$.

En los Ejercicios 65-68, calcular el ritmo de cambio medio de la función en el intervalo dado. Compararlo con los ritmos instantáneos de cambio en los puntos terminales del intervalo.

	Función	*Intervalo*
65.	$f(t) = 2t + 7$	$[1, 2]$
66.	$f(t) = t^2 - 3$	$[2; 2{,}1]$
67.	$f(x) = \frac{-1}{x}$	$[1, 2]$
68.	$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

69. ***Para pensar*** Usar la gráfica de f para contestar las cuestiones.



a) ¿Entre qué par de puntos consecutivos es mayor el ritmo medio de cambio de f?

b) El ritmo de cambio medio de f entre A y B es mayor o menor que el ritmo instantáneo de cambio en B?

c) Trazar una recta tangente a la gráfica entre los puntos C y D cuya pendiente sea la misma que el ritmo de cambio medio de f entre C y D.

d) Dar dos puntos consecutivos en los que los ritmos de cambio de f sean aproximadamente iguales.

70. ***Para pensar*** Dibujar la gráfica de una función f con $f' > 0$ para todo x y tal que el ritmo de cambio de f sea decreciente.

Movimiento vertical En los Ejercicios 71 y 72, usar la función de posición $s(t) = -16t^2 + v_0t + s_0$ para objetos en caída libre.

71. Se deja caer una moneda desde lo alto del World Trade Center, que tiene una altura de 1.362 pies. Hallar

a) las funciones que describen la posición y la velocidad de la moneda.
b) su velocidad media en el intervalo [1, 2]
c) sus velocidades instantáneas cuando $t = 1$ y $t = 2$.
d) el tiempo que tarda en llegar al suelo
e) la velocidad al impactar en el suelo.

72. Se lanza hacia abajo una bola desde una altura de 220 pies con una velocidad inicial de -22 pies/s. ¿Cuál es su velocidad tras 3 segundos? ¿Y tras descender 108 pies?

Movimiento vertical En los Ejercicios 73 y 74, usar la función posición $s(t) = -16t^2 + v_0 t + s_0$ para objetos en caída libre.

73. Se lanza un proyectil hacia arriba desde la superficie terrestre con una velocidad inicial de 120 m/s. ¿Cuál es su velocidad tras 5 segundos? ¿Y tras 10 segundos?

74. Para estimar la altura de un edificio se deja caer una piedra desde lo más alto. Si la piedra golpea en el suelo 6,8 segundos después, ¿cuál es la altura del edificio?

Para pensar En los Ejercicios 75 y 76, se da la gráfica de una función posición. Representar la distancia, en millas, recorrida por un conductor que va a su trabajo en un tiempo de 10 minutos. Esbozar la correspondiente función velocidad.

75.

Tiempo (en minutos)

76.

Tiempo (en minutos)

Para pensar En los Ejercicios 77 y 78, se da la gráfica de una función velocidad, en millas por hora, de una persona que conduce durante 10 minutos para ir a su oficina. Esbozar la correspondiente función posición.

77.

Tiempo (en minutos)

78.

Tiempo (en minutos)

79. ***Un modelo matemático*** La distancia total de frenada de un automóvil que viaja a v, km/h, es la distancia que recorre durante el tiempo de reacción del conductor más la distancia B, en metros, que recorre después de ser accionados los frenos. La tabla muestra los resultados de un experimento sobre esta situación.

v	20	40	60	80	100
R	3,3	6,7	10,0	13,3	16,7
B	2,3	8,9	20,2	35,9	56,7

a) Usar regresión en la calculadora para obtener un modelo lineal para el tiempo de reacción.
b) Obtener análogamente un modelo cuadrático.
c) Determinar el polinomio que expresa la distancia total T recorrida hasta que el vehículo se detiene.
d) Dibujar las funciones R, B y T en una misma ventana de la calculadora.
e) Hallar la derivada de T y el ritmo de cambio de la distancia total de frenada para $v = 40$, $v = 80$ y $v = 100$.
f) A partir de los resultados de este ejercicio, sacar conclusiones acerca del comportamiento de la distancia total de frenada al crecer la velocidad.

80. ***Velocidad*** Comprobar que la velocidad media en el intervalo $[t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t]$ es la misma que la velocidad instantánea en $t = t_0$ para la función posición

$$s(t) = -\tfrac{1}{2}at^2 + c$$

81. ***Área*** El área de un cuadrado con lados de longitud s es $A = s^2$. Hallar el ritmo de cambio del área con respecto a s cuando $s = 4$ metros.

82. ***Volumen*** El volumen de un cubo de lado s es $V = s^3$. Hallar el ritmo de cambio del volumen con respecto a s cuando $s = 4$ centímetros.

83. ***Inventario*** El coste anual de inventario de un fabricante es

$$C = \frac{1.088.000}{Q} + 6{,}3Q$$

donde Q es el tamaño del pedido cuando se reponen existencias. Hallar el cambio del coste anual cuando Q crece de 350 a 351 y compararlo con el ritmo instantáneo de cambio para $Q = 350$.

84. ***Coste de combustible*** Un automóvil viaja 15.000 millas al año y recorre x millas por galón. Supongamos que el coste medio del combustible es \$1,25 por galón. Hallar el coste anual C del combustible consumido

como función de x y usar esta función para completar la tabla.

x	10	15	20	25	30	35	40
C							
$\frac{dC}{dx}$							

Discutir qué conductor se beneficiaría más de un aumento en 1 milla por galón en la eficiencia del vehículo: uno que hace 15 millas por galón o uno que hace 35 millas por galón? Explicar la respuesta.

85. ***Ley de enfriamiento de Newton*** Esta ley establece que el ritmo de cambio de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre su temperatura T y la temperatura ambiente T_a. Escribir una ecuación que describa esta ley.

86. Hallar una ecuación $y = ax^2 + bx + c$ para la parábola que pasa por (0, 1) y es tangente a la recta $y = x - 1$ en (1, 0).

87. Sea (a, b) un punto arbitrario de la gráfica de $y = 1/x$, $x > 0$. Demostrar que el área del triángulo formado por la recta tangente en (a, b) y los ejes coordenados es 2.

88. Hallar la recta o rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 9x$ en el punto (1, –9).

89. Hallar la ecuación de la recta o rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ en el punto dado.

a) $(0, a)$ *b*) $(a, 0)$

¿Hay alguna restricción sobre la constante a?

90. Hallar a y b de manera que

$$f(x) = \begin{cases} ax^3, & x \leqslant 2 \\ x^2 + b, & x > 2 \end{cases}$$

sea derivable en todos los puntos.

91. ¿Dónde son derivables las funciones $f_1(x) = |\text{sen } x|$ y $f_2(x) = \text{sen } |x|$?

92. Demostrar que $\frac{d}{dx}[\cos x] = -\text{sen } x$.

PARA MÁS INFORMACIÓN Una interpretación geométrica de las derivadas de las funciones trigonométricas puede verse en el artículo «Sines and Cosines of the Times», de Victor J. Katz, en *Math Horizons*, abril 1995.



2.3 Las reglas del producto y del cociente y derivadas de orden superior

CONTENIDO ▪
La regla del producto ▪
La regla del cociente ▪
Derivadas de las funciones trigonométricas ▪
Derivadas de orden superior ▪

La regla del producto

En la Sección 2.2 hemos visto que la derivada de una suma de dos funciones es la suma de sus derivadas. La regla para derivar un producto de dos funciones no es tan simple.

TEOREMA 2.7 LA REGLA DEL PRODUCTO

El producto de dos funciones derivables f y g es derivable. Su derivada es la primera función por la derivada de la segunda más la derivada de la primera por la segunda.

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Demostración: Algunas demostraciones, la de la regla de la suma entre ellas, son directas. Otras exigen pasos ingeniosos sin motivación aparente. Esta demostración presenta uno de esos pasos, sumar y restar una misma cantidad.

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$ □

La regla del producto se extiende a productos de más de dos factores. Así, si f, g y h son funciones derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

Por ejemplo, la derivada de $y = x^2 \text{ sen } x \cos x$ es

$$\frac{dy}{dx} = 2x \text{ sen } x \cos x + x^2 \cos x \cos x + x^2 \text{ sen } x(-\text{sen } x)$$

$$= 2x \text{ sen } x \cos x + x^2 (\cos^2 x - \text{sen}^2 x)$$

LA REGLA DEL PRODUCTO

Cuando Leibniz escribió originalmente una fórmula para la derivada del producto, su motivación fue la expresión

$$(x + dx)(y + dy) - xy$$

de la que restaba *dxdy* (como algo despreciable) obteniendo la forma diferencial $x\,dy + y\,dx$. Este argumento llevó a la forma tradicional de la regla del producto que hemos expuesto en la página anterior. (Fuente: *The History of Mathematics*, David M. Burton.)

Una versión que algunos prefieren es

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

que tiene la ventaja de ser fácil de generalizar a productos de tres o más factores.

La derivada del producto de dos funciones no viene dado, en general, por el producto de sus derivadas. Para convencerse de ello, basta comparar el producto de las derivadas de $f(x) = 3x - 2x^2$ y $g(x) = 5 + 4x$ con la derivada obtenida en el Ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Aplicando la regla del producto

Hallar la derivada de $h(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$.

Solución:

$$h'(x) = \overbrace{(3x - 2x^2)}^{\text{Primera}} \overbrace{\frac{d}{dx}[5 + 4x]}^{\text{Derivada de la segunda}} + \overbrace{(5 + 4x)}^{\text{Segunda}} \overbrace{\frac{d}{dx}[3x - 2x^2]}^{\text{Derivada de la primera}}$$

$$= (3x - 2x^2)(4) + (5 + 4x)(3 - 4x)$$

$$= (12x - 8x^2) + (15 - 8x - 16x^2)$$

$$= -24x^2 + 4x + 15$$ □

En el Ejemplo 1 se tiene la opción de calcular la derivada con o sin la regla del producto. Sin ella, haríamos

$$D_x[(3x - 2x^2)(5 + 4x)] = D_x[-8x^3 + 2x^2 + 15x]$$
$$= -24x^2 + 4x + 15.$$

En el próximo ejemplo, por el contrario, es necesario utilizar la regla del producto.

EJEMPLO 2 Aplicando la regla del producto

$$\frac{d}{dx}[x \text{ sen } x] = x\frac{d}{dx}[\text{sen } x] + \text{sen } x\frac{d}{dx}[x]$$
$$= x \cos x + (\text{sen } x)(1)$$
$$= x \cos x + \text{sen } x$$

□

EJEMPLO 3 Aplicando la regla del producto

Hallar la derivada de $y = 2x \cos x - 2 \text{ sen } x$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{(2x)\left(\frac{d}{dx}[\cos x]\right) + (\cos x)\left(\frac{d}{dx}[2x]\right)}^{\text{Regla del producto}} - \overbrace{2\frac{d}{dx}[\text{sen } x]}^{\text{Regla del múltiplo constante}}$$
$$= (2x)(-\text{sen } x) + (\cos x)(2) - 2(\cos x)$$
$$= -2x \text{ sen } x$$

□

Nota. Observemos que en el Ejemplo 3 se usa la regla del producto cuando ambos factores son variables, y la del múltiplo constante cuando uno de ellos es constante.

La regla del cociente

TEOREMA 2.8 LA REGLA DEL COCIENTE

El cociente f/g de dos funciones derivables f y g es derivable en todos los valores de x en los que $g(x) \neq 0$. Además, su derivada es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo ello dividido por el cuadrado del denominador.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \qquad g(x) \neq 0$$

Demostración: Al igual que en la del Teorema 2.7, el truco consiste en sumar y restar una misma cantidad.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)f(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x)g(x+\Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)f(x+\Delta x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x)g(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}}{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} [g(x)g(x+\Delta x)]}$$

$$= \frac{g(x)\left[\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] - f(x)\left[\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]}{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} [g(x)g(x+\Delta x)]}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$ □

En una calculadora se pueden comparar las gráficas de una función y de su derivada. Así, en la Figura 2.22 aparece la gráfica de la función del Ejemplo 4, que presenta dos puntos con tangente horizontal. ¿Cuáles son los valores de y' en esos dos puntos?

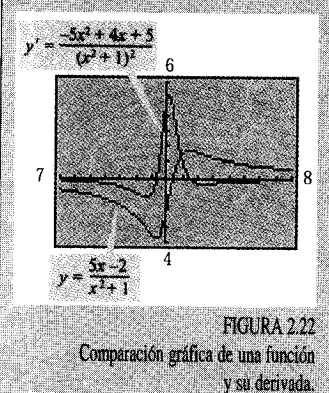


FIGURA 2.22
Comparación gráfica de una función y su derivada.

EJEMPLO 4 Usando la regla del cociente

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{5x-2}{x^2+1}\right] = \frac{(x^2+1)\dfrac{d}{dx}[5x-2] - (5x-2)\dfrac{d}{dx}[x^2+1]}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(x^2+1)(5) - (5x-2)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(5x^2+5) - (10x^2-4x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-5x^2+4x+5}{(x^2+1)^2}$$ □

Obsérvese el uso de los paréntesis en el Ejemplo 4. Es recomendable usar paréntesis en todos los problemas de derivación. Por ejemplo, cuando se usa la regla del cociente es conveniente encerrar cada factor y cada derivada en un paréntesis y prestar especial atención a la resta exigida en el numerador.

Al introducir las reglas de derivación en la sección precedente, hicimos énfasis en la necesidad de reescribir antes de derivar. El próximo ejemplo ilustra este aspecto en relación con la regla del cociente.

EJEMPLO 5 Reescribiendo antes de derivar

Hallar la derivada de $y = \dfrac{3-(1/x)}{x+5}$.

Solución:

$$y = \frac{3 - (1/x)}{x + 5}$$ Función original

$$= \frac{(3x - 1)/x}{x + 5}$$

$$= \frac{3x - 1}{x(x + 5)}$$

$$= \frac{3x - 1}{x^2 + 5x}$$ Reescribir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 5x)(3) - (3x - 1)(2x + 5)}{(x^2 + 5x)^2}$$ Regla del cociente

$$= \frac{(3x^2 + 15x) - (6x^2 + 13x - 5)}{(x^2 + 5x)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 2x + 5}{(x^2 + 5x)^2}$$ Simplificar □

No todo cociente requiere ser derivado mediante la regla del cociente. Sin ir más lejos, cada uno de los cocientes del ejemplo siguiente puede ser considerado como el producto de una constante por una función, de modo que es más sencillo aplicar la regla del múltiplo constante.

EJEMPLO 6 Usando la regla del múltiplo constante

	Función original	*Reescribir*	*Derivar*	*Simplificar*
a)	$y = \frac{x^2 + 3x}{6}$	$y = \frac{1}{6}(x^2 + 3x)$	$y' = \frac{1}{6}(2x + 3)$	$y' = \frac{2x + 3}{6}$
b)	$y = \frac{5x^4}{8}$	$y = \frac{5}{8}x^4$	$y' = \frac{5}{8}(4x^3)$	$y' = \frac{5}{2}x^3$
c)	$y = \frac{-3(3x - 2x^2)}{7x}$	$y = -\frac{3}{7}(3 - 2x)$	$y' = -\frac{3}{7}(-2)$	$y' = \frac{6}{7}$
d)	$y = \frac{9}{5x^2}$	$y = \frac{9}{5}(x^{-2})$	$y' = \frac{9}{5}(-2x^{-3})$	$y' = -\frac{18}{5x^3}$ □

Nota. Para comprender la ventaja de la regla del múltiplo constante en ciertos cocientes, intente hallar las derivadas del Ejemplo 6 mediante la regla del cociente. Llegará al mismo resultado, pero con un esfuerzo mucho mayor.

En la Sección 2.2 se demostró la regla de las potencias sólo para exponentes enteros mayores que 1. El próximo ejemplo extiende esa demostración a exponentes enteros negativos.

EJEMPLO 7 Demostración de la regla de las potencias (exponentes enteros negativos)

Si n es un entero negativo, existe un entero positivo k tal que $n = -k$. Por tanto, usando la regla del cociente, obtenemos

$$\frac{d}{dx}[x^n] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^k}\right]$$

$$= \frac{x^k(0) - (1)(kx^{k-1})}{(x^k)^2} \qquad \text{Regla del cociente}$$

$$= \frac{0 - kx^{k-1}}{x^{2k}}$$

$$= -kx^{-k-1}$$

$$= nx^{n-1} \qquad n = -k$$

Así pues, la regla de las potencias

$$D_x[x^n] = nx^{n-1} \qquad \text{Regla de las potencias}$$

es válida para cualquier entero. (En el Ejercicio 59 de la Sección 2.5 se pedirá demostrarla para cualquier potencia racional.) □

Derivadas de las funciones trigonométricas

Conocidas las derivadas de las funciones seno y coseno, la regla del cociente permite hallar las de las cuatro restantes funciones trigonométricas.

TEOREMA 2.9 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\frac{d}{dx}[\text{tg } x] = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}[\text{ctg } x] = -\text{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \text{ tg } x \qquad \frac{d}{dx}[\text{cosec } x] = -\text{cosec } x \text{ ctg } x$$

Demostración: Considerando $\text{tg } x = (\text{sen } x)/(\cos x)$ y aplicando la regla del cociente se ve que

$$\frac{d}{dx}[\text{tg } x] = \frac{(\cos x)(\cos x) - (\text{sen } x)(-\text{sen } x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x$$

La demostración de las otras tres se pide en el Ejercicio 69.

EJEMPLO 8 Derivación de funciones trigonométricas

Función	*Derivada*
a) $y = x - \operatorname{tg} x$	$\dfrac{dy}{dx} = 1 - \sec^2 x$
b) $y = x \sec x$	$y' = x(\sec x \operatorname{tg} x) + (\sec x)(1)$ $= (\sec x)(1 + x \operatorname{tg} x)$

□

Nota. A causa de las identidades trigonométricas, la derivada de una función trigonométrica puede adoptar diversas formas. Esto supone una dificultad cuando se trata de comparar las soluciones obtenidas por el lector con las propuestas al final del libro.

EJEMPLO 9 Diferentes formas de una derivada

Derivar ambas formas de $y = \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x$.

Solución:

Primera forma: $y = \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$

$$y' = \frac{(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x) - (1 - \cos x)(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Segunda forma: $y = \operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x$

$$y' = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x + \operatorname{cosec}^2 x$$

Para probar que las dos derivadas son idénticas, basta escribir

$$\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) = \operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x$$ □

El resumen que sigue muestra que gran parte del trabajo requerido para llegar a una forma simplificada de una derivada se ha de hacer *después* de derivar. Nótese que dos características de una forma simplificada son la ausencia de exponentes negativos y el agrupamiento de términos análogos.

	$f'(x)$ **tras derivar**	$f'(x)$ **tras simplificar**
Ejemplo 1	$(3x - 2x^2)(4) + (5 + 4x)(3 - 4x)$	$-24x^2 + 4x + 15$
Ejemplo 3	$(2x)(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(2) - 2(\cos x)$	$-2x \operatorname{sen} x$
Ejemplo 4	$\dfrac{(x^2 + 1)(5) - (5x - 2)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$	$\dfrac{-5x^2 + 4x + 5}{(x^2 + 1)^2}$
Ejemplo 5	$\dfrac{(x^2 + 5x)(3) - (3x - 1)(2x + 5)}{(x^2 + 5x)^2}$	$\dfrac{-3x^2 + 2x + 5}{(x^2 + 5x)^2}$
Ejemplo 9	$\dfrac{(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x) - (1 - \cos x)(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}$	$\dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

Derivadas de orden superior

Así como derivando una función posición se obtiene una función velocidad, derivando esta última se obtiene una función aceleración. En otras palabras, derivando *dos veces* la función posición se llega a la función aceleración.

$$s(t) \qquad \text{Función posición}$$

$$v(t) = s'(t) \qquad \text{Función velocidad}$$

$$a(t) = v'(t) = s''(t) \qquad \text{Función aceleración}$$

La función $a(t)$ es la **segunda derivada** de $s(t)$ y se denota por $s''(t)$.

La segunda derivada es un ejemplo de **derivada de orden superior**. Podemos definir derivadas de cualquier orden entero positivo. Por ejemplo, la **tercera derivada** es la derivada de la segunda derivada. Las derivadas de orden superior se denotan como sigue.

Primera derivada:	y',	$f'(x)$,	$\dfrac{dy}{dx}$,	$\dfrac{d}{dx}[f(x)]$,	$D_x[y]$
Segunda derivada:	y'',	$f''(x)$,	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$,	$\dfrac{d^2}{dx^2}[f(x)]$,	$D_x^2[y]$
Tercera derivada:	y''',	$f'''(x)$,	$\dfrac{d^3y}{dx^3}$,	$\dfrac{d^3}{dx^3}[f(x)]$,	$D_x^3[y]$
Cuarta derivada:	$y^{(4)}$,	$f^{(4)}(x)$,	$\dfrac{d^4y}{dx^4}$,	$\dfrac{d^4}{dx^4}[f(x)]$,	$D_x^4[y]$
⋮					
n-ésima:	$y^{(n)}$,	$f^{(n)}(x)$,	$\dfrac{d^ny}{dx^n}$,	$\dfrac{d^n}{dx^n}[f(x)]$,	$D_x^n[y]$

EJEMPLO 10 Aceleración debida a la gravedad

Puesto que la Luna carece de atmósfera, un objeto al caer en la Luna no encuentra resistencia del aire. En 1971, el astronauta David Scott verificó que una pluma de ave y un martillo caen a la misma velocidad. La función posición para cada uno de ellos viene dada por

$$s(t) = -0{,}81t^2 + 2$$

donde $s(t)$ es la altura en metros y t el tiempo en segundos. ¿Cuál es la razón entre la fuerza de gravedad en la Tierra y en la Luna?

Solución: Para hallar la aceleración derivamos dos veces la función posición

$$s(t) = -0{,}81t^2 + 2 \qquad \text{Función posición}$$

$$s'(t) = -1{,}62t \qquad \text{Función velocidad}$$

$$s''(t) = -1{,}62 \qquad \text{Función aceleración}$$

LA LUNA

La masa de la Luna es de 7.354×10^{22} kg y la de la Tierra 5.979×10^{24} kg. El radio de la Luna es 1.738 km y el de la Tierra 6.371 km. Como la fuerza de gravedad de un planeta es directamente proporcional a su masa e inversamente proporcional al cuadrado de su radio, la razón entre las fuerzas de gravedad en la Luna y en la Tierra es

$$\frac{(5.979 \times 10^{24})/6.371^2}{(7.354 \times 10^{22})/1.738^2} \approx 6{,}05$$

En consecuencia, la fuerza de la gravedad en la Luna es $-1{,}62$ m/s^2. Como en la Tierra es $-9{,}8$ m/s^2, la razón entre ellas es

$$\frac{\text{Fuerza gravitacional de la Tierra}}{\text{Fuerza gravitacional de la Luna}} = \frac{-9{,}8}{-1{,}62} \approx 6{,}05$$ □

Ejercicios de la Sección 2.3

En los Ejercicios 1-6, hallar $f'(x)$ y $f'(c)$.

Función	*Valor de c*
1. $f(x) = \frac{1}{3}(2x^3 - 4)$	$c = 0$
2. $f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x^3 - 1)$	$c = 1$
3. $f(x) = (x^3 - 3x)(2x^2 + 3x + 5)$	$c = 0$
4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$	$c = 2$
5. $f(x) = x \cos x$	$c = \dfrac{\pi}{4}$
6. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$	$c = \dfrac{\pi}{6}$

En los Ejercicios 7-12, completar la tabla sin usar la regla del cociente (véase Ejemplo 6).

Función	*Reescribir*	*Derivar*	*Simplificar*
7. $y = \dfrac{x^2 + 2x}{x}$			
8. $y = \dfrac{4x^{3/2}}{x}$			
9. $y = \dfrac{7}{3x^3}$			
10. $y = \dfrac{4}{5x^2}$			
11. $y = \dfrac{3x^2 - 5}{7}$			
12. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$			

En los Ejercicios 13-26, hallar la derivada de la función algebraica propuesta.

13. $f(x) = \dfrac{3x - 2}{2x - 3}$

14. $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x + 2}{x^2 - 1}$

15. $f(x) = \dfrac{3 - 2x - x^2}{x^2 - 1}$

16. $f(x) = x^4\left(1 - \dfrac{2}{x + 1}\right)$

17. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$

18. $f(x) = \sqrt[3]{x + 3)}$

19. $h(s) = (s^3 - 2)^2$

20. $h(x) = (x^2 - 1)^2$

21. $h(t) = \dfrac{t + 1}{t^2 + 2t + 2}$

22. $f(x) = \dfrac{x(x^2 - 1)}{x + 3}$

23. $f(x) = (3x^3 + 4x)(x - 5)(x + 1)$

24. $f(x) = (x^2 - x)(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$

25. $f(x) = \dfrac{x^2 + c^2}{x^2 - c^2}$, c es una constante

26. $f(x) = \dfrac{c^2 - x^2}{c^2 + x^2}$, c es una constante

En los Ejercicios 27-42, hallar la derivada de la función trigonométrica que se indica.

27. $f(t) = t^2 \operatorname{sen} t$

28. $f(\theta) = (\theta + 1) \cos \theta$

29. $f(t) = \dfrac{\cos t}{t}$

30. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

31. $f(x) = -x + \operatorname{tg} x$

32. $y = x + \operatorname{ctg} x$

33. $g(t) = \sqrt{t} + 4 \sec t$

34. $h(s) = \dfrac{1}{s} - 10 \operatorname{cosec} s$

35. $y = 5x \operatorname{cosec} x$

36. $y = \dfrac{\sec x}{x}$

37. $y = -\operatorname{cosec} x - \operatorname{sen} x$

38. $y = x \operatorname{sen} x + \cos x$

39. $y = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x$

40. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$

41. $f()x) = x^2 \operatorname{tg} x$

42. $h(\theta) = 5 \sec \theta + \operatorname{tg} \theta$

En los Ejercicios 43-46, usar un programa de derivación simbólica para derivar las funciones dadas.

43. $g(x) = \left(\dfrac{x + 1}{x + 2}\right)(2x - 5)$

44. $f(x) = \left(\dfrac{x^2 - x - 3}{x^2 + 1}\right)(x^2 + x + 1)$

45. $g(\theta) = \dfrac{\theta}{1 - \operatorname{sen} \theta}$

46. $f(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta}$

En los Ejercicios 47-50, evaluar la derivada de la función en el punto que se indica. Verificar el resultado con la calculadora.

	Función	*Punto*
47.	$y = \dfrac{1 + \operatorname{cosec} x}{1 - \operatorname{cosec} x}$	$\left(\dfrac{\pi}{6}, -3\right)$
48.	$f(x) = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$	$(1, 1)$
49.	$h(t) = \dfrac{\sec t}{t}$	$\left(\pi, -\dfrac{1}{\pi}\right)$
50.	$f(x) = \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x + \cos x)$	$\dfrac{\pi}{4}, 1$

En los Ejercicios 51-56, *a*) hallar una ecuación para la recta tangente a la gráfica de f en el punto que se indica, *b*) representar en la calculadora la gráfica de f y la de la recta tangente en ese punto, y *c*) comprobar los resultados usando cálculo simbólico.

	Función	*Punto*
51.	$f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$	$(2, 2)$
52.	$f(x) = (x - 1)(x^2 - 2)$	$(0, 2)$
53.	$f(x) = (x^3 - 3x + 1)(x + 2)$	$(1, -3)$
54.	$f(x) = \dfrac{(x - 1)}{(x + 1)}$	$\left(2, \dfrac{1}{3}\right)$
55.	$f(x) = \operatorname{tg} x$	$\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$
56.	$f(x) = \sec x$	$\left(\dfrac{\pi}{3}, 2\right)$

En los Ejercicios 57 y 58, determinar el punto o puntos donde la gráfica tiene tangente horizontal.

57. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ **58.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

Para pensar En los Ejercicios 59-62, calcular $f'(2)$ sabiendo que

$g(2) = 3$ y $g'(2) = -2$
$h(2) = -1$ y $h'(2) = 4$

59. $f(x) = 2g(x) + h(x)$ **60.** $f(x) = 4 - h(x)$

61. $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ **62.** $f(x) = g(x)h(x)$

En los Ejercicios 63 y 64, hallar la derivada de f para $n = 1$, 2, 3 y 4. Usar los resultados para escribir una fórmula general para $f'(x)$ en términos de n.

63. $f(x) = x^n \operatorname{sen} x$ **64.** $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^n}$

65. ***Reposición de inventario*** El coste C de pedido y transporte de las componentes utilizadas en la fabricación de un producto es

$$C = 100\left(\frac{200}{x} + \frac{x}{x + 30}\right), \quad 1 \leqslant x$$

donde C se mide en miles de dólares y x es el tamaño del pedido en cientos. Hallar el ritmo de cambio de C con respecto a x cuando *a*) $x = 10$, *b*) $x = 15$, y *c*) $x = 20$. ¿Qué implican estos ritmos de cambio para cuando el tamaño del pedido aumenta?

66. ***Ley de Boyle*** Esta ley establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Usar la derivada para demostrar que el ritmo de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen.

67. ***Crecimiento de población*** Una población de 500 bacterias se introduce en un cultivo y aumenta de número de acuerdo con la ecuación

$$P(t) = 500\left(1 + \frac{4t}{50 + t^2}\right)$$

donde t se mide en horas. Hallar el ritmo de cambio al que está creciendo la población cuando $t = 2$.

68. ***Ritmo de cambio*** Determinar si existe algún valor de x en el intervalo $[0, 2\pi)$ tal que los ritmos de cambio de $f(x) = \sec x$ y de $g(x) = \operatorname{cosec} x$ sean iguales.

69. Probar las siguientes fórmulas de derivación.

a) $\dfrac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \operatorname{tg} x$

b) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{cosec} x] = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x$

c) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{ctg} x] = -\operatorname{cosec}^2 x$

70. ***Para pensar*** Dibujar la gráfica de una función derivable f tal que $f > 0$ y $f' < 0$ para todos los números reales x.

71. ***Para pensar*** Dibujar la gráfica de una función derivable f tal que $f(2) = 0$, $f' < 0$ para $-\infty < x < 2$, y $f' > 0$ para $2 < x < \infty$.

72. ***Un modelo matemático*** La presión fiscal *per capita* en EE.UU. viene recogida en la tabla de la página siguiente. *(Fuente: U.S. Internal Revenue Service.)*

Año	1984	1985	1986	1987	1988
Cantidad	\$2.738	\$2.982	\$3.090	\$3.414	\$3.598

Año	1989	1990	1991	1992	1993
Cantidad	\$3.884	\$4.026	\$4.064	\$4.153	\$4.382

Año	1994	1995
Cantidad	\$4.728	\$4.996

Si T denota la presión fiscal *per capita* y t el tiempo en años, un modelo para T viene dado por $T = (2.231.291 + 110.636t)/(1.000 - 1.400t)$, donde $t = 4$ corresponde a 1984.

a) Hallar T' y representarla en la calculadora.

b) Interpretar la gráfica resultante suponiendo que este modelo será utilizado para predecir la presión fiscal hasta el año 2000.

c) Usar el modelo para predecir la presión fiscal *per capita* en el año 2000.

En los Ejercicios 73-78, hallar la segunda derivada de la función.

73. $f(x) = 4x^{3/2}$

74. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$

75. $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

76. $f(x) = x + \dfrac{32}{x^2}$

77. $f(x) = 3 \text{ sen } x$

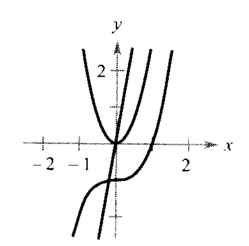
78. $f(x) = \sec x$

En los Ejercicios 79-82, hallar la derivada de orden superior que se indica.

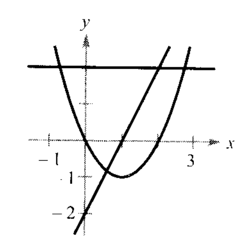
	Dada	*Hallar*
79.	$f'(x) = x^2$	$f''(x)$
80.	$f''(x) = 2 - \dfrac{2}{x}$	$f'''(x)$
81.	$f'''(x) = 2\sqrt{x}$	$f^{(4)}(x)$
82.	$f^{(4)}(x) = 2x + 1$	$f^{(6)}(x)$

Para pensar En los Ejercicios 83 y 84 se muestran las gráficas de f, f' y f'' en unos mismos ejes coordenados. ¿Cuál es cuál?


83.




84.



85. ***Una fórmula general*** Sea la función $f(x) = g(x)h(x)$.

a) Usando la regla del producto, hallar $f''(x), f'''(x)$, y $f^{(4)}(x)$.

b) A partir de los resultados obtenidos, escribir una fórmula general para $f^{(n)}$.

86. ***Una fórmula general*** Obtener una fórmula general para $f^{(n)}(x)$ si

a) $f(x) = x^n$ y *b*) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

87. ***Aceleración*** La velocidad de un objeto, en m/s, es

$$v(t) = 36 - t^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 6$$

Hallar su velocidad y su aceleración cuando $t = 3$. ¿Qué se puede decir acerca de la rapidez del objeto cuando velocidad y aceleración tienen signos opuestos?

88. ***Aceleración*** La velocidad de un automóvil que parte del reposo es

$$v(t) = \frac{100t}{2t + 15}$$

donde v se mide en pies/s. Hallar su aceleración en cada uno de estos instantes.

a) 5 segundos *b*) 10 segundos *c*) 20 segundos

89. ***Distancia de frenada*** Un vehículo viaja a 66 pies/s (45 millas/h) cuando se accionan sus frenos. La función posición del vehículo es

$$s(t) = -8{,}25t^2 + 66t$$

donde s se mide en pies y t en segundos. Usar esta función para completar la tabla y hallar la velocidad media durante cada intervalo de tiempo

t	0	1	2	3	4
s(t)					
v(t)					
a(t)					

90. ***Aceleración en la Luna*** Un astronauta lanza en la Luna una piedra al aire. La altura de la piedra viene dada por

$$s = -\frac{27}{10}t^2 + 27t + 6$$

donde s se mide en pies y t en segundos.

a) Hallar expresiones para la velocidad y la aceleración de la piedra.
b) Hallar el instante en que alcanza su máxima altura igualando su velocidad a cero. ¿A qué altura se encuentra en ese momento?
c) Comparar la aceleración de esa piedra con la aceleración debida a la gravedad en la Tierra.

Aproximaciones lineal y cuadrática Las aproximaciones lineal y cuadrática de una función f en $x = a$ son

$$P_1(x) = f'(a)(x - a) + f(a) \quad \text{y}$$

$$P_2(x) = \tfrac{1}{2} f''(a)(x - a)^2 + f'(a)(x - a) + f(a)$$

En los Ejercicios 91 y 92, *a*) hallar las aproximaciones lineal y cuadrática específicas de f, *b*) usar una calculadora para representar las gráficas de f y de sus aproximaciones, *c*) determinar cuál de las dos es mejor aproximación, y *d*) estudiar cómo varía la precisión cuando nos alejamos de $x = a$.

91. $f(x) = \cos x$

$a = \dfrac{\pi}{3}$

92. $f(x) = \operatorname{tg} x$

$a = \dfrac{\pi}{4}$

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 93-98, determinar si la afirmación es verdadera o no. En caso de que sea falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

93. Si $y = f(x)g(x)$, entonces $dy/dx = f'(x)g'(x)$.

94. Si $y = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$, entonces $d^5y/dx^5 = 0$.

95. Si $f'(c)$ y $g'(c)$ son cero y $h(x) = f(x)g(x)$, entonces $h'(c) = 0$.

96. Si $f(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $f^{(n+1)}(x) = 0$.

97. La segunda derivada representa el ritmo de cambio de la primera derivada.

98. Si la velocidad de un objeto es constante, su aceleración es cero.

99. Calcular la derivada de la función $f(x) = x|x|$. ¿Existe $f''(0)$?

100. ***Para pensar*** Sean f y g funciones cuyas primeras y segundas derivadas existen en un intervalo I. ¿Cuál de estas fórmulas es correcta?
a) $fg'' - f''g = (fg' - f'g)'$
b) $fg'' + f''g = (fg)''$



2.4 La regla de la cadena

CONTENIDO
- La regla de la cadena
- La regla general de las potencias
- Simplificación de derivadas
- Funciones trigonométricas y la regla de la cadena

La regla de la cadena

Vamos a presentar ahora una de las reglas de derivación más potentes: **la regla de la cadena**. Afecta a las funciones compuestas y dota a la derivación de una ersatilidad sorprendente. A título de ejemplo, compárense las siguientes funciones. Las de la izquierda pueden ser derivadas sin la regla de la cadena, mientras que a las de la derecha conviene aplicarles esa regla.

Sin la regla de la cadena	*Con la regla de la cadena*
$y = x^2 + 1$	$y = \sqrt{x^2 + 1}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y = \operatorname{sen} 6x$
$y = 3x + 2$	$y = (3x + 2)^5$
$y = x + \operatorname{tg} x$	$y = x + \operatorname{tg} x^2$

En esencia, la regla de la cadena establece que si y cambia dy/du veces más rápido que u, y además u cambia du/dx veces más rápido que x, entonces y cambia $(dy/du)(du/dx)$ veces más rápido que x.

EJEMPLO 1 La derivada de una función compuesta

Un juego de ruedas dentadas está construido, como muestra la Figura 2.23, de manera tal que la segunda y la tercera giran sobre un eje común. Cuando la primera gira, arrastra a la segunda y ésta a su vez a la tercera. Sean y, u, x los números de revoluciones por minuto del primero, segundo y tercer ejes. Hallar dy/du, du/dx y dy/dx, y verificar que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

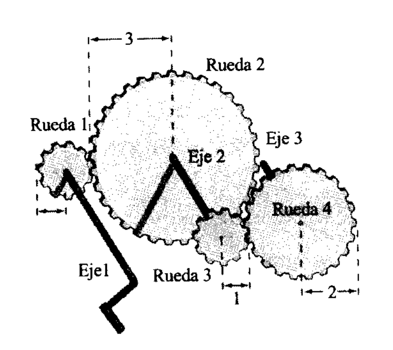


FIGURA 2.23
Eje 1: y revoluciones por minuto
Eje 2: u revoluciones por minuto
Eje 3: x revoluciones por minuto.

Solución: Como la circunferencia de la segunda rueda es tres veces mayor que la de la primera, el primer eje debe dar tres vueltas para que el segundo complete una. Análogamente, el segundo eje ha de dar dos vueltas para que el tercero complete una. Podemos escribir

$$\frac{dy}{du} = 3 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx} = 2$$

Combinando estos dos resultados, sabemos que el primer eje da seis vueltas por cada una del tercer eje. Así pues,

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\text{Razón de cambio del primer eje con respecto al segundo eje}} \cdot \boxed{\text{Razón de cambio del segundo eje con respecto al tercer eje}}$$

$$= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3 \cdot 2 = 6$$

$$= \boxed{\text{Razón de cambio del primer eje con respecto al tercer eje}}$$

En otras palabras, el ritmo de cambio de y respecto de x es el producto del ritmo de cambio de y respecto de u por el de u respecto de x. □

El Ejemplo 1 ilustra un caso simple de la regla de la cadena. Su enunciado general es el siguiente.

TEOREMA 2.10 LA REGLA DE LA CADENA

Si $y = f(u)$ es una función derivable de u, y si además $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces $y = f(g(x))$ es una función derivable, con

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

o sea, en otra notación,

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

Demostración: Denotemos $h(x) = f(g(x))$. Usando la forma alternativa de la derivada, hemos de demostrar, para $x = c$, que

$$h'(c) = f'(g(c))g'(c)$$

EXPLORACIÓN

Usando la regla de la cadena Las funciones que se indican a continuación pueden ser derivadas utilizando las reglas de derivación de las Secciones 2.2 y 2.3. Hallarlas por ese método. Comparar con el cálculo de esas derivadas efectuado mediante la regla de la cadena. ¿Cuál de los dos métodos es más sencillo?

a) $\dfrac{2}{3x+1}$

b) $(x+2)^3$

c) $\operatorname{sen} 2x$

Un aspecto importante en esta demostración es el comportamiento de g cuando x tiende a c. Se plantea una dificultad si existen valores de x, distintos de c, en los que $g(x) = g(c)$. En el apéndice explicamos cómo solventar esta dificultad gracias al carácter derivable de f y g. Supondremos, por tanto, que $g(x) \neq g(c)$ para valores de x distintos de c. En las demostraciones de las reglas del producto y del cociente sumamos y restamos una misma cantidad. Ahora recurriremos a un truco similar, multiplicaremos y dividiremos por una misma cantidad (no nula). Nótese que al ser g derivable, es continua, luego $g(x) \to g(c)$ cuando $x \to c$.

$$\begin{aligned}
h'(c) &= \lim_{x\to c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c} \\
&= \lim_{x\to c} \left[\frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c}\right], \; g(x) \neq g(c) \\
&= \left[\lim_{x\to c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)}\right]\left[\lim_{x\to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}\right] \\
&= f'(g(c))g'(c)
\end{aligned}$$

□

Al aplicar la regla de la cadena es útil ver la funcion $f \circ g$ compuesta como constituida por dos partes: una interior y otra exterior.

Función exterior

$$y = f(g(x)) = f(u)$$

Función interior

La derivada de $y = f(u)$ es la derivada de la función exterior (en la función interior u) *multiplicada por* la derivada de la función interior.

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

EJEMPLO 2 Descomposición de una función compuesta

	$y = f(g(x))$	$u = g(x)$	$y = f(u)$
a)	$y = \dfrac{1}{x+1}$	$u = x + 1$	$y = \dfrac{1}{u}$
b)	$y = \operatorname{sen} 2x$	$u = 2x$	$y = \operatorname{sen} u$
c)	$y = \sqrt{3x^2 - x + 1}$	$u = 3x^2 - x + 1$	$y = \sqrt{u}$
d)	$y = \operatorname{tg}^2 x$	$u = \operatorname{tg} x$	$y = u^2$

□

EJEMPLO 3 Usando la regla de la cadena

Hallar dy/dx para $y = (x^2 + 1)^3$.

Solución: Para esta función podemos tomar como función interior $u = x^2 + 1$. Por la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{3(x^2 + 1)^2}_{\frac{dy}{du}}\underbrace{(2x)}_{\frac{du}{dx}} = 6x(x^2 + 1)^2$$

□

ADVERTENCIA Podríamos haber resuelto el Ejemplo 3 sin hacer uso de la regla de la cadena, sin más que observar que

$$y = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$$

y, por tanto,

$$y' = 6x^5 + 12x^3 + 6x$$

Comprobar que esta derivada es la misma que la del Ejemplo 3. ¿Qué método sería preferible para hallar

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 1)^{50}?$$

La regla general de las potencias

La función del Ejemplo 3 es uno de los tipos más comunes de funciones compuestas, $y = [u(x)]^n$. La regla para derivar tales funciones se llama **regla general de las potencias**, y no es sino un caso particular de la reglas de la cadena.

TEOREMA 2.11 LA REGLA GENERAL DE LAS POTENCIAS

Si $y = [u(x)]^n$, donde u es una función derivable de x y n es un número racional, entonces

$$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}$$

o, en forma equivalente,

$$\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$$

Demostración: Como $y = u^n$, basta aplicar la regla de la cadena para ver que

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$
$$= \frac{d}{du}[u^n]\frac{du}{dx}.$$

Por la regla (simple) de las potencias de la Sección 2.2, se tiene $D_u[u^n] = nu^{n-1}$, y se sigue que $dy/dx = n[u(x)]^{n-1}(du/dx)$. □

EJEMPLO 4 Aplicación de la regla general de las potencias

Hallar la derivada de $f(x) = (3x - 2x^2)^3$.

Solución: Sea $u = 3x - 2x^2$. Entonces

$$f(x) = (3x - 2x^2)^3 = u^3$$

y de la regla general de las potencias se deduce que

$$f'(x) = \overset{n}{3}\overbrace{(3x - 2x^2)^2}^{u^{n-1}} \overbrace{\frac{d}{dx}[3x - 2x^2]}^{u'}$$ Aplicar la regla general de las potencias

$$= 3(3x - 2x^2)^2(3 - 4x)$$ Derivar $3x - 2x^2$

□

EJEMPLO 5 Derivación de funciones con radicales

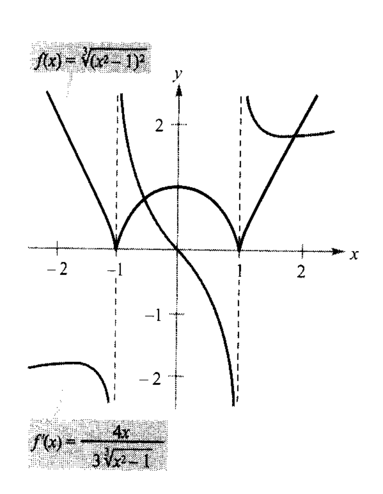


FIGURA 2.24
La derivada de f es 0 en $x = 0$ y no está definida en $x = \pm 1$.

Hallar los puntos de la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$ en los que $f'(x) = 0$ y aquellos en los que $f'(x)$ no existe.

Solución: Empezamos reexpresando la función como

$$f(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$$

Aplicando ahora la regla general de las potencias (con $u = x^2 - 1$) se obtiene

$$f'(x) = \overset{n}{\frac{2}{3}}\overbrace{(x^2 - 1)^{-1/3}}^{u^{n-1}}\overbrace{(2x)}^{u'}$$ Aplicar la regla general de las potencias

$$= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$ Expresar en forma radical

Así pues, $f'(x) = 0$ en $x = 0$ y $f'(x)$ no existe en $x = \pm 1$, como se indica en la Figura 2.24.

EJEMPLO 6 Derivación de cocientes con numeradores constantes

Derivar $g(t) = \dfrac{-7}{(2t - 3)^2}$.

| Nota. Intente derivar la función del Ejemplo 6 usando la regla del cociente. El resultado será el mismo, pero el método es menos eficiente que la regla general de las potencias.

Solución: Para empezar, reescribimos la función como

$$g(t) = -7(2t - 3)^{-2}$$

Y ahora la regla general de las potencias establece que

$$g'(t) = \underbrace{(-7)}_{\text{Regla del múltiplo constante}}\overbrace{(-2)}^{n}\overbrace{(2t - 3)^{-3}}^{u^{n-1}}\overbrace{(2)}^{u'}$$ Aplicar la regla general de las potencias

$$= 28(2t - 3)^{-3}$$ Simplificar

$$= \frac{28}{(2t - 3)^3}.$$ Expresar con exponente positivo

□

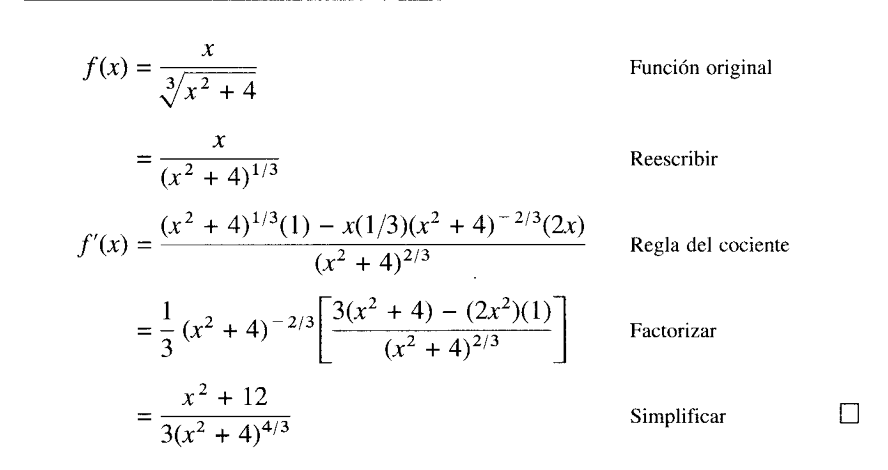
Simplificación de derivadas

Los tres ejemplos próximos ponen de manifiesto algunas técnicas para simplificar las derivadas de funciones que involucran productos, cocientes y composiciones.

EJEMPLO 7 Simplificando por factorización de la potencia mínima

$$f(x) = x^2\sqrt{1 - x^2} \qquad \text{Función original}$$
$$= x^2(1 - x^2)^{1/2} \qquad \text{Reescribir}$$
$$f'(x) = x^2 \frac{d}{dx}[(1 - x^2)^{-1/2}] + (1 - x^2)^{1/2} \frac{d}{dx}[x^2] \qquad \text{Regla del producto}$$
$$= x^2 \left[\frac{1}{2}(1 - x^2)^{-1/2}(-2x)\right] + (1 - x^2)^{1/2}(2x) \qquad \text{Regla general de las potencias}$$
$$= -x^3(1 - x^2)^{-1/2} + 2x(1 - x^2)^{1/2} \qquad \text{Simplificar}$$
$$= x(1 - x^2)^{-1/2}[-x^2(1) + 2(1 - x^2)] \qquad \text{Factorizar}$$
$$= \frac{x(2 - 3x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{Simplificar}$$

EJEMPLO 8 Simplificación de la derivada de un cociente



$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 4}} \qquad \text{Función original}$$
$$= \frac{x}{(x^2 + 4)^{1/3}} \qquad \text{Reescribir}$$
$$f'(x) = \frac{(x^2 + 4)^{1/3}(1) - x(1/3)(x^2 + 4)^{-2/3}(2x)}{(x^2 + 4)^{2/3}} \qquad \text{Regla del cociente}$$
$$= \frac{1}{3}(x^2 + 4)^{-2/3}\left[\frac{3(x^2 + 4) - (2x^2)(1)}{(x^2 + 4)^{2/3}}\right] \qquad \text{Factorizar}$$
$$= \frac{x^2 + 12}{3(x^2 + 4)^{4/3}} \qquad \text{Simplificar}$$

□



Las calculadoras son capaces de derivar, usando programas de cálculo simbólico, funciones muy complicadas. No obstante, suelen presentar el resultado en forma no simplificada. Puede comprobarlo hallando en su calculadora las derivadas de las funciones de los Ejemplos 7, 8 y 9, y comparando los resultados con los del texto.

EJEMPLO 9 Simplificación de la derivada de una potencia

$$y = \left(\frac{3x - 1}{x^2 + 3}\right)^2 \qquad \text{Función original}$$
$$y' = \underbrace{2}_{n}\underbrace{\left(\frac{3x - 1}{x^2 + 3}\right)}_{u^{n-1}}\underbrace{\frac{d}{dx}\left[\frac{3x - 1}{x^2 + 3}\right]}_{u'} \qquad \text{Regla general de las potencias}$$

$$= \left[\frac{2(3x-1)}{x^2+3}\right]\left[\frac{(x^2+3)(3)-(3x-1)(2x)}{(x^2+3)^2}\right] \qquad \text{Regla del cociente}$$

$$= \frac{2(3x-1)(3x^2+9-6x^2+2x)}{(x^2+3)^3} \qquad \text{Multiplicar}$$

$$= \frac{2(3x-1)(-3x^2+2x+9)}{(x^2+3)^3} \qquad \text{Simplificar}$$

□

Funciones trigonométricas y la regla de la cadena

La versión, en términos de la regla de la cadena, de las derivadas de las funciones trigonométricas es la siguiente:

$$\frac{d}{dx}[\text{sen } u] = (\cos u)\, u' \qquad \frac{d}{dx}[\cos u] = -(\text{sen } u)\, u'$$

$$\frac{d}{dx}[\text{tg } u] = (\sec^2 u)u' \qquad \frac{d}{dx}[\text{ctg } u] = -(\text{cosec}^2\, u)\, u'$$

$$\frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \text{ tg } u)\, u' \qquad \frac{d}{dx}[\text{cosec } u] = -\, (\text{cosec } u \text{ ctg } u)\, u'$$

EJEMPLO 10 Aplicación de la regla de la cadena a funciones trigonométricas

a) $y = \text{sen } \overbrace{2x}^{u}$ $\qquad y' = \overbrace{\cos 2x}^{\cos u}\, \overbrace{\frac{d}{dx}[2x]}^{u'} = (\cos 2x)(2) = 2 \cos 2x$

b) $y = \cos (x-1)$ $\qquad y' = -\text{sen}(x-1)$

c) $y = \text{tg } 3x$ $\qquad y' = 3 \sec^2 3x$

Asegúrese de entender los convenios matemáticos relativos a paréntesis y funciones trigonométricas. Así, en el Ejemplo 10*a*, se escribe sen $2x$ para significar sen $(2x)$.

EJEMPLO 11 Paréntesis y funciones trigonométricas

a) $y = \cos 3x^2 = \cos (3x^2)$ $\qquad y' = (-\text{sen } 3x^2)(6x) = -6x \text{ sen } 3x^2$

b) $y = (\cos 3)x^2$ $\qquad y' = (\cos 3)(2x) = 2x \cos 3$

c) $y = \cos (3x)^2 = \cos (9x^2)$ $\qquad y' = (-\text{sen } 9x^2)(18x) = -18x \text{ sen } 9x^2$

d) $y = \cos^2 x = (\cos x)^2$ $\qquad y' = 2(\cos x)(-\text{sen } x)$

$\qquad = -2 \cos x \text{ sen } x$

□

Para calcular la derivada de una función de la forma $k(x) = f(g(h(x)))$, es necesario aplicar la regla de la cadena dos veces, como se ilustra a continuación.

EJEMPLO 12 Aplicación reiterada de la regla de la cadena

$f(t) = \operatorname{sen}^3 4t$	Función original
$= (\operatorname{sen} 4t)^3$	Reescribir
$f'(t) = 3(\operatorname{sen} 4t)^2 \dfrac{d}{dt}[\operatorname{sen} 4t]$	Aplicar la regla de la cadena
$= 3(\operatorname{sen} 4t)^2(\cos 4t) \dfrac{d}{dt}[4t]$	Aplicar la regla de la cadena otra vez
$= 3(\operatorname{sen} 4t)^2(\cos 4t)(4)$	
$= 12 \operatorname{sen}^2 4t \cos 4t$	Simplificar

□

Concluimos esta sección con un resumen de las reglas de derivación ya estudiadas. Con el fin de adquirir familiaridad con la derivación es recomendable aprenderlas de memoria.

Resumen de reglas de derivación

Reglas generales de derivación

Sean u y v funciones derivables de x.

Regla del múltiplo constante:

$$\frac{d}{dx}[cu] = cu'$$

Regla de la suma (o diferencia):

$$\frac{d}{dx}[u \pm v] = u' \pm v'$$

Regla del producto:

$$\frac{d}{dx}[uv] = uv' + vu'$$

Regla del cociente:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Derivadas de funciones algebraicas

Regla de la constante:

$$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

Regla simple de las potencias:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}, \quad \frac{d}{dx}[x] = 1$$

Derivadas de funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{tg} x] = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \operatorname{tg} x$$

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{ctg} x] = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{cosec} x] = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x$$

Regla de la cadena

Regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u)\, u'$$

Regla general de las potencias:

$$\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$$

ADVERTENCIA Como ayuda para la memoria, nótese que las cofunciones (coseno, cotangente y cosecante) llevan un signo negativo en sus derivadas.

Ejercicios de la Sección 2.4

En los Ejercicios 1-6, completar la tabla usando como modelo el Ejemplo 2.

	$y = f(g(x))$	$u = g(x)$	$y = f(u)$
1.	$y = (6x - 5)^4$		
2.	$y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}$		
3.	$y = \sqrt{x^2 - 1}$		
4.	$y = \text{tg }(\pi x + 1)$		
5.	$y = \text{cosec}^3\, x$		
6.	$y = \cos \dfrac{3x}{2}$		

En los Ejercicios 7-30, hallar la derivada de cada función algebraica.

7. $y = (2x - 7)^3$

8. $y = (3x^2 + 1)^4$

9. $g(x) = 3(4 - 9x)^4$

10. $f(x) = 2(1 - x^2)^3$

11. $f(x) = (9 - x^2)^{2/3}$

12. $f(t) = (9t + 2)^{2/3}$

13. $f(t) = \sqrt{1 - t}$

14. $g(x) = \sqrt{3 - 2x}$

15. $y = \sqrt[3]{9x^2 + 4}$

16. $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

17. $y = 2\sqrt{4 - x^2}$

18. $f(x) = -3\sqrt[4]{2 - 9x}$

19. $y = \dfrac{1}{x - 2}$

20. $s(t) = \dfrac{1}{t^2 + 3t - 1}$

21. $f(t) = \left(\dfrac{1}{t - 3}\right)^2$

22. $y = -\dfrac{4}{(t + 2)^2}$

23. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$

24. $g(t) = \sqrt{\dfrac{1}{t^2 - 2}}$

25. $f(x) = x^2(x - 2)^4$

26. $f(x) = x(3x - 9)^3$

27. $y = x\sqrt{1 - x^2}$

28. $y = x^2\sqrt{9 - x^2}$

29. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

30. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^9 + 9}}$

En los Ejercicios 31-40, usar una calculadora para hallar la primera derivada de la función. A continuación, representar las gráficas de f y de f' en unos mismos ejes. Describir el comportamiento de la función en cada punto donde se anule su derivada.

31. $y = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x^2 + 1}$

32. $y = \sqrt{\dfrac{2x}{x + 1}}$

33. $g(t) = \dfrac{3t^2}{\sqrt{t^2 + 2t - 1}}$

34. $f(x) = \sqrt{x}(2 - x)^2$

35. $y = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x}}$

36. $y = (t^2 - 9)\sqrt{t + 2}$

37. $s(t) = \dfrac{-2(2 - t)\sqrt{1 + t}}{3}$

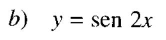
38. $g(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1}$

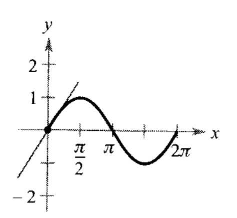
39. $y = \dfrac{\cos \pi x + 1}{x}$

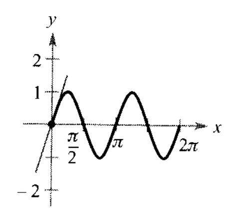
40. $y = x^2 \text{ tg } \dfrac{1}{x}$

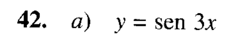
En los Ejercicios 41 y 42, hallar la pendiente de la recta tangente a la función seno en el origen. Comparar este valor con el número de ciclos completos en el intervalo $[0, 2\pi]$.

41. *a)* $y = \text{sen } x$

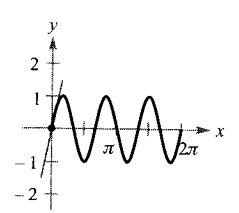


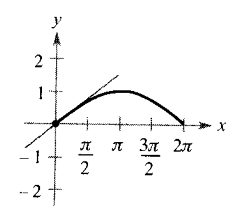




42.


b) $y = \text{sen } \dfrac{x}{2}$





En los ejercicios 43-52, hallar la primera derivada de la función.

43. $y = \cos 3x$

44. $y = \operatorname{sen} \pi x$

45. $g(x) = 3 \operatorname{tg} 4x$

46. $h(x) = \sec x^2$

47. $f(\theta) = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 2\theta$

48. $g(t) = 5 \cos^2 \pi t$

49. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} (2x)^2$

50. $y = 3x - 5 \cos (\pi x)^2$

50. $y = \operatorname{sen} (\cos x)$

52. $y = \operatorname{sen} \sqrt{x} + \sqrt{\operatorname{sen} x}$

En los Ejercicios 53-60, evaluar la derivada de la función en el punto indicado. Comprobar el resultado en una calculadora.

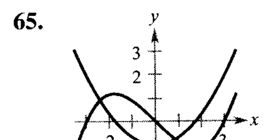
	Función	*Punto*
53.	$s(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 8}$	$(2, 4)$
54.	$y = \sqrt[5]{3x^3 + 4x}$	$(2, 2)$
55.	$f(x) = \dfrac{3}{x^3 - 4}$	$\left(-1, -\dfrac{3}{5}\right)$
56.	$f(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 3x)^2}$	$\left(4, \dfrac{1}{16}\right)$
57.	$f(t) = \dfrac{3t + 2}{t - 1}$	$(0, -2)$
58.	$f(x) = \dfrac{x + 1}{2x - 3}$	$(2, 3)$
59.	$y = 37 - \sec^3 (2x)$	$(0, 36)$
60.	$y = \dfrac{1}{x} + \sqrt{\cos x}$	$\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2}{\pi}\right)$

En los Ejercicios 61-64, *a*) hallar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto que se indica, *b*) representar en la calculadora las gráficas de f y de la recta tangente en ese punto, y *c*) comprobar los resultados usando derivación simbólica en la calculadora.

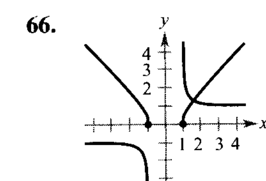
	Función	*Punto*
61.	$f(x) = \sqrt{3x^2 - 2}$	$(3, 5)$
62.	$f(x) = \frac{1}{3}x\sqrt{x^2 + 5}$	$(2, 2)$
63.	$f(x) = \operatorname{sen} 2x$	$(\pi, 0)$
64.	$f(x) = \operatorname{tg}^2 x$	$\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$

Redacción En los Ejercicios 65-68, se dan las gráficas de f y f'. Identificarlas en cada caso y escribir un breve párrafo aclarando los criterios por los que se ha llegado a esa decisión.

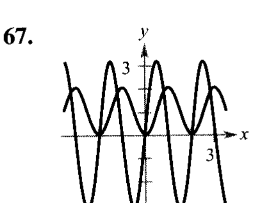
65.



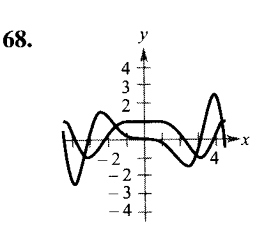
66.



67.



68.



En los Ejercicios 69-72, hallar la segunda derivada de la función.

69. $f(x) = 2(x^2 - 1)^3$

70. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

71. $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

72. $f(x) = \sec^2 \pi x$

73. ***Para pensar*** Sabiendo que $g(5) = -3$, $g'(5) = 6$, $h(5) = 3$, y $h'(5) = -2$, calcular $f'(5)$, si es posible, para cada una de las funciones que siguen. Si ello no fuera posible, especificar qué información adicional sería necesaria.

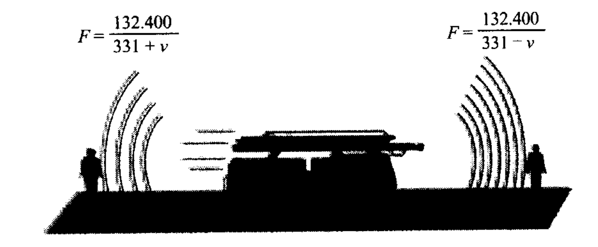
74. *a*) Hallar, por dos vías diferentes, la derivada de $g(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$.
b) Dadas $f(x) = \sec^2 x$ y $g(x) = \operatorname{tg}^2 x$, probar que $f'(x) = g'(x)$.

75. ***Efecto Doppler*** La frecuencia F de la sirena de un coche de bomberos oída por un observador en reposo viene dada por

$$F = \frac{132.400}{331 \pm v}$$

donde $\pm v$ representa la velocidad del coche de bomberos (véase figura). Calcular el ritmo de cambio de F respecto de v cuando

a) El coche se acerca a 30 m/s (usar $-v$).
b) El coche se aleja a 30 m/s (usar $+v$).



76. ***Movimiento armónico*** El desplazamiento de su posición de equilibrio para un objeto en movimiento armónico situado al extremo de un muelle es

$$y = \frac{1}{3}\cos 12t - \frac{1}{4}\text{ sen } 12t$$

donde y se mide en pies y t en segundos. Determinar la posición y la velocidad del objeto cuando $t = \pi/8$.

77. ***Péndulo*** Un péndulo de 15 cm se mueve según la ecuación

$$\theta = 0{,}2 \cos 8t$$

donde θ es el desplazamiento angular de la vertical en radianes y t es el tiempo en segundos. Calcular el máximo desplazamiento angular y el ritmo de cambio de θ cuando $t = 3$.

78. ***Movimiento ondulatorio*** Una boya oscila con movimiento armónico simple dado por

$$y = A \cos \omega t$$

conforme las olas pasan por ella. La boya se mueve verticalmente, desde el punto más bajo hasta el más alto, un total de 3,5 pies. Cada 10 segundos regresa a su punto de máxima altura.

a) Escribir una ecuación que describa el movimiento de esa boya si está en su máxima altura cuando $t = 0$.

b) Calcular la velocidad de la boya en función de t.

79. ***Sistema circulatorio*** La velocidad S de la sangre que está a r cm del centro en una arteria viene dada por

$$S = C(R^2 - r^2)$$

donde C es una constante, R es el radio de la arteria y S se mide en cm/s. Se administra un fármaco y la arteria empieza a dilatarse a un ritmo dR/dt. A una distancia constante r, hallar el ritmo de cambio de S con respecto a t para $C = 1{,}76 \times 10^5$, $R = 1{,}2 \times 10^{-2}$, y $dR/dt = 10^{-5}$.

80. ***Un modelo matemático*** La tabla recoge la temperatura máxima media, en grados Fahrenheit, en Denver, Colorado. *(Fuente: National Oceanic and Atmosphere Administration.)*

Mes	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.
Temperatura	43,2	46,6	52,2	61,8	70,8	81,4

Mes	Jul.	Ag.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
Temperatura	88,2	85,8	76,9	66,3	52,5	44,5

a) Representar los datos en la pantalla de una calculadora y hallar un modelo para esos datos de la forma

$$T(t) = a + b\text{ sen }(\pi t/6 - c)$$

donde T es la temperatura y t el tiempo en meses, con $t = 1$ correspondiendo a enero.

b) Representar el modelo en la calculadora. ¿Ajusta bien los datos?

c) Hallar T' y representarla en la calculadora.

d) Según la gráfica de la derivada, ¿cuándo cambia la temperatura de manera más rápida? ¿Y más lenta? ¿Coinciden las respuestas con sus observaciones experimentales? Explicar la contestación.

81. ***Para pensar*** La tabla recoge varios valores de la derivada de una función f desconocida. Completar la tabla hallando, si ello es posible, la derivada de cada una de las siguientes transformaciones de f.

a) $g(x) = f(x) - 2$ *b*) $h(x) = 2f(x)$

c) $r(x) = f(-3x)$ *d*) $s(x) = f(x + 2)$

x	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	4	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-2	-4
$g'(x)$						
$h'(x)$						
$r'(x)$						
$s'(x)$						

82. ***Una fórmula general*** Sea $f(x) = \text{sen } \beta x$, donde β denota una constante.

a) Calcular las cuatro primeras derivadas de f.

b) Verificar que la función y su segunda derivada satisfacen la ecuación $f''(x) + \beta^2 f(x) = 0$.

c) Usando los resultados del apartado *a*), escribir fórmulas generales para las derivadas pares y para las impares

$$f^{(2k)}(x) \text{ y } f^{(2k-1)}(x)$$

[*Ayuda:* $(-1)^k$ es positivo si k es par y negativo si k es impar.]

83. ***Conjetura*** Sea f una función derivable de período p.

a) ¿Es periódica f'? Verificar la respuesta.

b) Consideremos la función $g(x) = f(2x)$. ¿Es periódica $g'(x)$? Verificar la respuesta.

84. Probar que la derivada de una función impar es par. Esto es, si $f(-x) = -f(x)$, entonces $f'(-x) = f'(x)$.

85. La media geométrica de x y $x + n$ es $g = \sqrt{x(x+n)}$ y la media aritmética es $a = [x + (x+n)]/2$. Demostrar que

$$\frac{dg}{dx} = \frac{a}{g}$$

86. Sea u una función derivable de x. Usar el hecho de que $|u| = \sqrt{u^2}$ para comprobar que

$$\frac{d}{dx}[|u|] = u'\frac{u}{|u|}, \quad u \neq 0$$

En los Ejercicios 87-90, utilizar el resultado del Ejercicio 86 para hallar la derivada de la función propuesta.

87. $g(x) = |2x - 3|$ **88.** $f(x) = |x^2 - 4|$

89. $h(x) = |x| \cos x$ **90.** $f(x) = |\text{sen } x|$

Aproximaciones lineal y cuadrática Las aproximaciones lineal y cuadrática de una función f en $x = a$ son

$$P_1(x) = f'(a)(x-a) + f(a) \quad \text{y}$$
$$P_2(x) = \tfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + f'(a)(x-a) + f(a)$$

En los Ejercicios 91 y 92, *a*) hallar las aproximaciones lineal y cuadrática específicas de f, *b*) usar una calculadora para representar las gráficas de f y de sus aproximaciones, *c*) determinar cuál de las dos es mejor aproximación, y *d*) estudiar cómo varía la precisión cuando nos alejamos de $x = a$.

91. $f(x) = \text{sen } \dfrac{x}{2}$, $a = \pi$ **92.** $f(x) = \sec 2x$, $a = \dfrac{\pi}{6}$

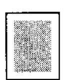
¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 93-95, determinar si la afirmación es verdadera o no. En caso de que sea falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

93. Si $y = (1-x)^{1/2}$, entonces $y' = \frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}$.

94. Si $f(x) = \text{sen}^2(2x)$, entonces $f'(x) = 2(\text{sen } 2x)(\cos 2x)$.

95. Si y es una función derivable de u, u es función derivable de v, y v es función derivable de x, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$



2.5 Derivación implícita

CONTENIDO ▪
Funciones explícitas e implícitas ▪
Derivación implícita ▪

Funciones explícitas e implícitas

Hasta aquí la mayor parte de las funciones aparecidas en el texto estaban expresadas en **forma explícita**, como por ejemplo en la ecuación

$$y = 3x^2 - 5 \qquad \text{Forma explícita}$$

donde la variable y está escrita explícitamente como función de x. Algunas funciones, por el contrario, están implícitas en una ecuación. Así, la función $y = 1/x$ viene definida **implícitamente** por la ecuación $xy = 1$. Supongamos que se nos pide hallar la derivada dy/dx para esta ecuación. Podemos empezar escribiendo y como función explícita de x, derivando a continuación.

Forma implícita	*Forma explícita*	*Derivada*
$xy = 1$	$y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$\dfrac{dy}{dx} = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

Esta estrategia funciona siempre que seamos capaces de despejar y en la ecuación. Pero si no se logra despejar y, no es factible este método. Por ejemplo, ¿cómo hallar dy/dx para la ecuación

$$x^2 - 2y^3 + 4y = 2$$

EXPLORACIÓN

La gráfica de una ecuación implícita ¿Cómo representar en una calculadora la gráfica de la ecuación

$$x^2 - 2y^3 + 4y = 2?$$

He aquí dos procedimientos posibles:

a) Despejar x en la ecuación. Intercambiar los papeles de x e y, representar la gráfica resultante y se obtendrá una rotación de 90° de la gráfica buscada.

b) Poner la calculadora en modo paramétrico y representar las ecuaciones

$$x = -\sqrt{2t^3 - 4t + 2}$$
$$y = t$$

y

$$x = \sqrt{2t^3 - 4t + 2}$$
$$y = t$$

¿Se puede saber, en alguno de estos métodos, si la gráfica tiene recta tangente en el punto (0, 1)? Explicar la respuesta.

donde resulta muy difícil despejar y como función explícita de x? En tales situaciones se debe usar la llamada **derivación implícita**.

Para comprender esta técnica, es preciso tener en cuenta que la derivación se efectúa *con respecto a x*. Esto quiere decir que cuando hayamos de derivar términos que sólo contienen a x, la derivación será la habitual. Sin embargo, cuando tengamos que derivar un término donde aparezca la y, será necesario aplicar la regla de la cadena, ya que se está suponiendo que y viene definida implícitamente como función de x.

EJEMPLO 1 Derivación respecto de x

a) $\dfrac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$ — Las variables coinciden: usar la regla simple de las potencias

Las variables coinciden

b) $\dfrac{d}{dx}[\underbrace{y^3}_{u^n}] = \underbrace{3y^2}_{nu^{n-1}}\underbrace{\dfrac{dy}{dx}}_{u'}$ — Las variables no coinciden: usar la regla de la cadena

Las variables no coinciden

c) $\dfrac{d}{dx}[x + 3y] = 1 + 3\dfrac{dy}{dx}$ — Regla de la cadena: $\dfrac{d}{dx}[3y] = 3y'$

d) $\dfrac{d}{dx}[xy^2] = x\dfrac{d}{dx}[y^2] + y^2\dfrac{d}{dx}[x]$ — Regla del producto

$= x\left(2y\dfrac{dy}{dx}\right) + y^2(1)$ — Regla de la cadena

$= 2xy\dfrac{dy}{dx} + y^2$ — Simplificar □

Derivación implícita

Estrategia para la derivación implícita

1. Derivar ambos lados de la ecuación *respecto de x*.
2. Agrupar todos los términos en que aparezca dy/dx en el lado izquierdo de la ecuación y pasar todos los demás a la derecha.
3. Sacar factor común dy/dx en la izquierda.
4. Despejar dy/dx, dividiendo la ecuación por su factor acompañante en la parte izquierda.

EJEMPLO 2 Derivación implícita

Hallar dy/dx sabiendo que $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$.

Solución:

1. Derivamos los dos miembros de la ecuación respecto de x.

$$\frac{d}{dx}[y^3 + y^2 - 5y - x^2] = \frac{d}{dx}[-4]$$

$$\frac{d}{dx}[y^3] + \frac{d}{dx}[y^2] - \frac{d}{dx}[5y] - \frac{d}{dx}[x^2] = \frac{d}{dx}[-4]$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

2. Agrupamos los términos con dy/dx en la parte izquierda.

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} = 2x$$

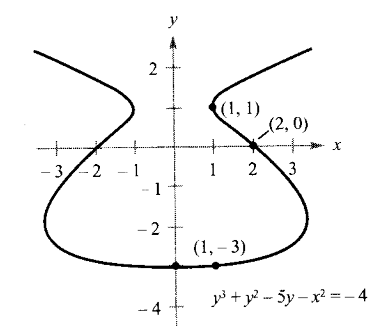
3. Factorizamos dy/dx en la parte izquierda.

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 + 2y - 5) = 2x$$

4. Despejamos dy/dx dividiendo por $(3y^2 + 2y - 5)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$

Nótese que la derivación implícita puede llevar a una expresión para dy/dx en la que aparezcan a la vez x e y. □



Puntos en la gráfica	Pendiente de la gráfica
(2, 0)	$-\frac{4}{5}$
(1, −3)	$\frac{1}{8}$
$x = 0$	0
(1, 1)	No definida

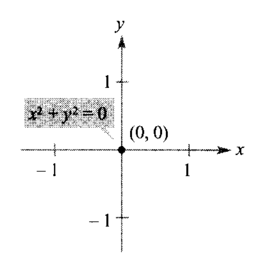
FIGURA 2.25
La ecuación implícita $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$ tiene derivada $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$

Para ver cómo usar la derivación implícita, consideremos la gráfica de la Figura 2.25. En ella se puede observar que y no es una función de x. A pesar de ello, la derivada hallada en el Ejemplo 2 da una fórmula para la pendiente de la recta tangente en un punto de esta gráfica. Debajo de la gráfica se han indicado las pendientes en varios puntos de la gráfica.

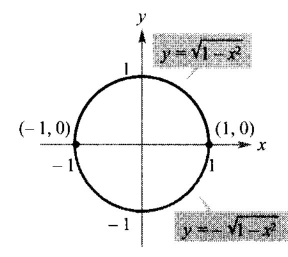
En la mayoría de las calculadoras es fácil representar la gráfica de una función dada explícitamente por una ecuación. Por el contrario, representar las gráficas asociadas a otras ecuaciones requiere cierto ingenio las más de las veces. Así, intente representar la gráfica asociada a la ecuación del Ejemplo 2 poniendo la calculadora en modo paramétrico y dibujando las gráficas dadas por las ecuaciones $x = \sqrt{t^3 + t^2 - 5t + 4}$, $y = t$ y $x = -\sqrt{t^3 + t^2 - 5t + 4}$, $y = t$, para $-5 \leqslant t \leqslant 5$. Compare el resultado con la gráfica que recoge la Figura 2.25.

En una ecuación que carece de puntos solución, tal como ocurre con $x^2 + y^2 = -4$ no tiene sentido despejar dy/dx. Sin embargo, si una porción de una gráfica puede representarse por una función derivable, dy/dx tendrá sentido como pendiente en cada punto de esa porción. Recordemos que una función no es derivable en (1) puntos con tangente vertical y (2) puntos en los que la función no es continua.

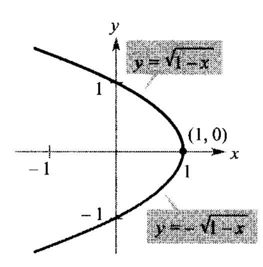
EJEMPLO 3 Representación de una gráfica mediante funciones derivables



a)



b)



c)

FIGURA 2.26
Algunas porciones de gráficas pueden representarse por funciones derivables.

Si es posible, representar y como función derivable de x (véase Figura 2.26).

a) $x^2 + y^2 = 0$ *b)* $x^2 + y^2 = 1$ *c)* $x + y^2 = 1$

Solución:

a) La gráfica de esta ecuación consta de un único punto. Por tanto, no define y como función derivable de x.

b) La gráfica de esta ecuación es el círculo unidad, centrado en (0, 0). El semicírculo superior viene dado por la función derivable

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \ -1 < x < 1$$

y el inferior por la función derivable

$$y = -\sqrt{1 - x^2}, \ -1 < x < 1$$

En los puntos (−1, 0) y (1, 0), la pendiente no está definida.

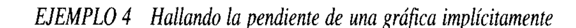
c) La mitad superior de esta parábola viene dada por la función derivable

$$y = \sqrt{1 - x}, \ x < 1$$

y la inferior por la función derivable

$$y = -\sqrt{1 - x}, \ x < 1$$

En el punto (1, 0) la pendiente no está definida. □



EJEMPLO 4 Hallando la pendiente de una gráfica implícitamente

Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $x^2 + 4y^2 = 4$ en el punto $(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. (Véase Figura 2.27.)

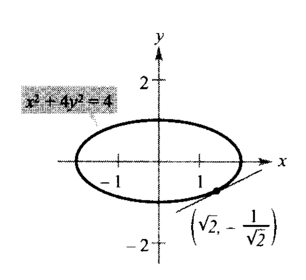
Solución: Por derivación implícita de la ecuación $x^2 + 4y^2 = 4$ respecto de x se obtiene

$$2x + 8y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{8y} = \frac{-x}{4y}$$

Por tanto, en $(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, la pendiente es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{2}}{-4/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$ □



La pendiente de la recta tangente es $\frac{1}{2}$

FIGURA 2.27

| Nota. Para comprender la ventaja de la derivación implícita, intente rehacer el Ejemplo 4 manejando la función explícita $y = -\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$.

EJEMPLO 5 Hallando la pendiente de una gráfica implícitamente

Calcular la pendiente de la gráfica de $3(x^2 + y^2)^2 = 100xy$ en el punto (3, 1).

Solución:

$$\frac{d}{dx}[3(x^2 + y^2)^2] = \frac{d}{dx}[100xy]$$

$$3(2)(x^2 + y^2)\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right) = 100\left[x\frac{dy}{dx} + y(1)\right]$$

$$12y(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} - 100x\frac{dy}{dx} = 100y - 12x(x^2 + y^2)$$

$$[12y(x^2 + y^2) - 100x]\frac{dy}{dx} = 100y - 12x(x^2 + y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{100y - 12x(x^2 + y^2)}{-100x + 12y(x^2 + y^2)}$$

$$= \frac{25y - 3x(x^2 + y^2)}{-25x + 3y(x^2 + y^2)}$$

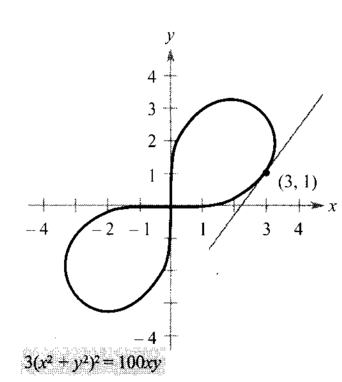


FIGURA 2.28
Lemniscata.

En el punto (3, 1), la pendiente de la gráfica es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{25(1) - 3(3)(3^2 + 1^2)}{-25(3) + 3(1)(3^2 + 1^2)} = \frac{25 - 90}{-75 + 30} = \frac{-65}{-45} = \frac{13}{9}$$

como muestra la Figura 2.28. Esta gráfica se llama **lemniscata**. □

EJEMPLO 6 Determinación de una función derivable

Hallar dy/dx implícitamente para la ecuación sen $y = x$. A continuación, determinar el mayor intervalo de la forma $-a < y < a$ en el que y sea una función derivable de x (véase Figura 2.29).

Solución:

$$\frac{d}{dx}[\text{sen } y] = \frac{d}{dx}[x]$$

$$\cos y\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

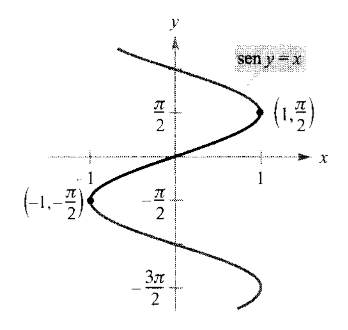


FIGURA 2.29
La derivada es $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

El mayor intervalo centrado en el origen en el que y es función derivable de x es $-\pi/2 < y < \pi/2$. En efecto, cos y es positiva en ese intervalo y 0 en sus puntos terminales. Si nos restringimos a ese intervalo, es posible escribir dy/dx explícitamente como función de x. Para ello, podemos usar

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}$$

$$= \sqrt{1 - x^2}, \; -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

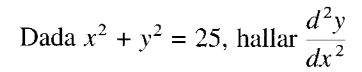
y concluimos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

□

Al usar la derivación implícita, la forma de la derivada puede simplificarse a menudo utilizando adecuadamente la ecuación *original*, como en el Ejemplo 6. Otro tanto cabe decir de las derivadas de orden superior calculadas por derivación implícita.

EJEMPLO 7 Cálculo implícito de la segunda derivada



Dada $x^2 + y^2 = 25$, hallar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$



ISAAC BARROW (1630-1677)

La gráfica del Ejemplo 8 se llama **curva kappa** porque recuerda la forma de la letra griega κ del mismo nombre. La solución general para la recta tangente a esta curva fue descubierta por el matemático inglés Isaac Barrow. Newton fue alumno de Barrow y ambos contribuyeron de forma decisiva en los inicios del Cálculo.

Solución: Derivando los dos términos respecto de x obtenemos

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Derivando otra vez respecto de x vemos que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(y)(1) - (x)(dy/dx)}{y^2} \qquad \text{Regla del cociente}$$

$$= -\frac{y - (x)(-x/y)}{y^2} \qquad \text{Sustituir } \frac{dy}{dx} \text{ por } -x/y$$

$$= -\frac{y^2 + x^2}{y^3}$$

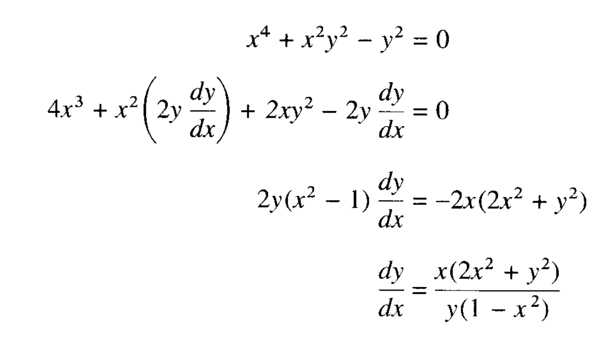
$$= -\frac{25}{y^3} \qquad \text{Sustituir } x^2 + y^2 \text{ por } 25$$

□

EJEMPLO 8 Recta tangente a una gráfica

Hallar la recta tangente a la gráfica dada por $x^2(x^2 + y^2) = y^2$ en el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, que aparece esbozada en la Figura 2.30.

Solución: Reescribiendo y derivando implícitamente, resulta



$$x^4 + x^2y^2 - y^2 = 0$$

$$4x^3 + x^2\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + 2xy^2 - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} = -2x(2x^2 + y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(2x^2 + y^2)}{y(1 - x^2)}$$

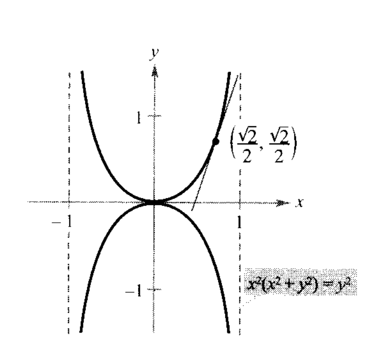


FIGURA 2.30
La curva kappa.

En el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, la pendiente es

$$m = \frac{(\sqrt{2}/2)[2(1/2) + (1/2)]}{(\sqrt{2}/2)[1 - (1/2)]} = \frac{3/2}{1/2} = 3$$

y la ecuación de la recta tangente en ese punto es

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$y = 3x - \sqrt{2}$$

□

Ejercicios de la Sección 2.5

En los Ejercicios 1-16, hallar dy/dx por derivación implícita.

1. $x^2 + y^2 = 16$
2. $x^2 - y^2 = 16$
3. $x^{1/2} + y^{1/2} = 9$
4. $x^3 + y^3 = 8$
5. $x^3 - xy + y^2 = 4$
6. $x^2y + y^2x = -2$
7. $x^3y^3 - y = x$
8. $\sqrt{xy} = x - 2y$
9. $x^3 - 2x^2y + 3xy^2 = 38$
10. $2 \operatorname{sen} x \cos y = 1$
11. $\operatorname{sen} x + 2\cos 2y = 1$
12. $(\operatorname{sen} \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$
13. $\operatorname{sen} x = x(1 + \operatorname{tg} y)$
14. $\operatorname{ctg} y = x - y$
15. $y = \operatorname{sen}(xy)$
16. $x = \sec \frac{1}{y}$

En los Ejercicios 17-24, hallar dy/dx por derivación implícita y calcular la derivada en el punto indicado.

	Ecuación	*Punto*
17.	$xy = 4$	$(-4, -1)$
18.	$x^2 - y^3 = 0$	$(1, 1)$
19.	$y^2 = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 9}$	$(3, 0)$
20.	$(x + y)^3 = x^3 + y^3$	$(-1, 1)$
21.	$x^{2/3} + y^{2/3} = 5$	$(8, 1)$
22.	$x^3 + y^3 = 2xy$	$(1, 1)$
23.	$\operatorname{tg}(x + y) = x$	$(0, 0)$
24.	$x \cos y = 1$	$\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

En los Ejercicios 25 y 26, representar la ecuación en la calculadora. Hallar una ecuación para la recta tangente a la gráfica en el punto indicado y representarla gráficamente.

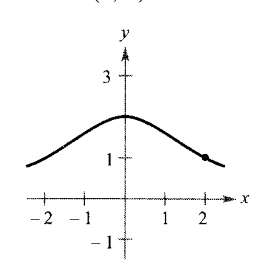
25. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \quad (4, 1)$
26. $y^2 = \frac{x - 1}{x^2 + 1}, \quad \left(2, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

En los Ejercicios 27-30, calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto propuesto.

27. Hechicera de Agnesi:

$(x^2 + 4)y = 8$

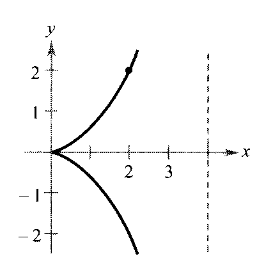
Punto: $(2, 1)$



28. Cisoide

$(4 - x)y^2 = x^3$

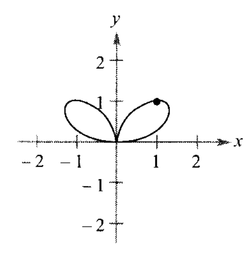
Punto: $(2, 2)$



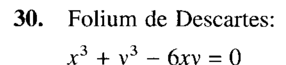
29. Bifolio

$(x^2 + y^2)^2 = 4x^2y$

Punto: $(1, 1)$

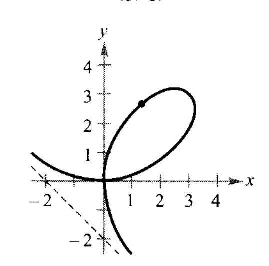


30. Folium de Descartes:



$x^3 + y^3 - 6xy = 0$

Punto: $(\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$



En los Ejercicios 31-34, *a*) hallar dos funciones explícitas despejando y en términos de x, *b*) dibujar la gráfica de la ecuación, indicando la parte que corresponde a cada una de esas dos funciones, *c*) derivar las funciones explícitas, y *d*) hallar dy/dx implícitamente y probar que el resultado es equivalente al de la parte *c*).

31. $x^2 + y^2 = 16$

32. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$

33. $9x^2 + 16y^2 = 144$

34. $4y^2 - x^2 = 4$

En los Ejercicios 35-40, hallar d^2y/dx^2 en términos de x e y.

35. $x^2 + xy = 5$

36. $x^2y^2 - 2x = 3$

37. $x^2 - y^2 = 16$

38. $1 - xy = x - y$

39. $y^2 = x^3$

40. $y^2 = 4x$

En los Ejercicios 41 y 42, hallar ecuaciones para la recta tangente y para la *recta normal* (perpendicular a la tangente) al círculo en el punto indicado. Representar la ecuación, la recta tangente y la normal en la calculadora.

41. $x^2 + y^2 = 5$

$(4, 3), (-3, 4)$

42. $x^2 + y^2 = 9$

$(0, 3), (2, \sqrt{5})$

43. Demostrar que la recta normal al círculo $x^2 + y^2 = r^2$ en cualquiera de sus puntos pasa por el origen.

44. Hay dos círculos de radio 4 tangentes a la gráfica de $y^2 = 4x$ en el punto $(1, 2)$. Escribir las ecuaciones de esos dos círculos.

En los Ejercicios 45 y 46, localizar los puntos en los que la gráfica de la ecuación tiene recta tangente horizontal o vertical.

45. $25x^2 + 16y^2 + 200x - 160y + 400 = 0$

46. $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$

Trayectorias ortogonales En los Ejercicios 47-50, usar la calculadora para representar las gráficas de las ecuaciones y probar que en sus intersecciones son ortogonales. (Dos gráficas son *ortogonales* en un punto de intersección si sus rectas tangentes en ese punto son perpendiculares entre sí.)

47. $2x^2 + y^2 = 6$

$y^2 = 4x$

48. $y^2 = x^3$

$2x^2 + 3y^2 = 5$

49. $x + y = 0$

$x = \text{sen } y$

50. $x^3 = 3(y - 1)$

$x(3y - 29) = 3$

Trayectorias ortogonales En los Ejercicios 51 y 52, verificar que las dos familias de curvas son ortogonales, siendo C y K números reales. Representar en la calculadora ambas familias para dos valores de C y dos valores de K.

51. $xy = C$

$x^2 - y^2 = K$

52. $x^2 + y^2 = C^2$

$y = Kx$

En los Ejercicios 53-56, derivar *a)* con respecto a x (y es una función de x) y *b)* con respecto a t (x e y son funciones de t).

53. $2y^2 - 3x^4 = 0$

54. $x^2 - 3xy^2 + y^3 = 10$

55. $\cos \pi y - 3 \operatorname{sen} \pi x = 1$

56. $4 \operatorname{sen} x \cos y = 1$

57. Consideremos la ecuación $x^4 = 4(4x^2 - y^2)$.
a) Representarla en la calculadora.
b) Hallar y representar las cuatro rectas tangentes a la curva en $y = 3$.
c) Calcular las coordenadas exactas del punto de intersección de las dos rectas tangentes en el primer cuadrante.

58. Tomar como modelo el Ejemplo 6 para calcular dy/dx implícitamente para la ecuación $\operatorname{tg} y = x$, y determinar el mayor intervalo de la forma $-a < y < a$ en el que y es función derivable de x. A continuación, expresar dy/dx como función de x.

59. Demostrar (Teorema 2.3) que

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

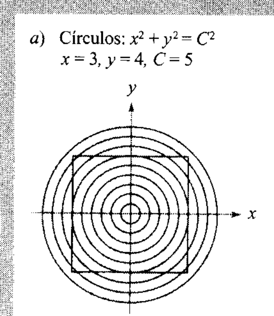
para el caso en que n es un número racional. (*Ayuda:* Escribir $y = x^{p/q}$ en la forma $y^q = x^p$ y derivar implícitamente. Supóngase que p y q son enteros, con $q > 0$.)

60. Demostrar que si L es cualquier recta tangente a la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ la suma de los segmentos que determina L sobre los dos ejes coordenados es c.

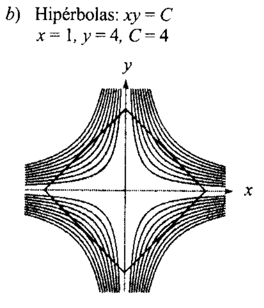
PROYECTO PARA LA SECCIÓN

Ilusiones ópticas En cada una de las gráficas de aquí abajo, se crea una ilusión óptica en las intersecciones de rectas con las curvas de ciertas familias. En cada caso, las rectas parecen estar curvadas. Calcular el valor de dy/dx para los valores de x e y que se indican.

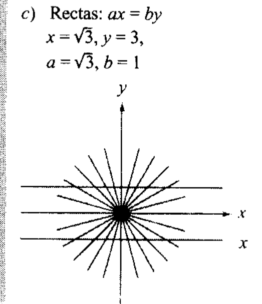
a) Círculos: $x^2 + y^2 = C^2$
$x = 3, y = 4, C = 5$



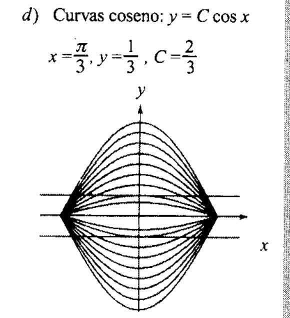
b) Hipérbolas: $xy = C$
$x = 1, y = 4, C = 4$



c) Rectas: $ax = by$
$x = \sqrt{3}, y = 3,$
$a = \sqrt{3}, b = 1$



d) Curvas coseno: $y = C \cos x$
$x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{1}{3}, C = \frac{2}{3}$



PARA MÁS INFORMACIÓN Véase el artículo «Descriptive Models for Perception of Optical Illusions» de David A. Smith en el volumen 2 de 1985 del *UMAP Journal.*

2.6 Ritmos relacionados

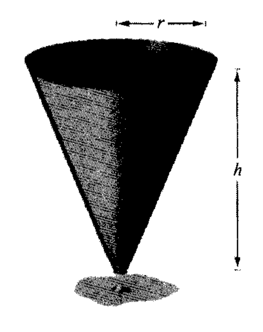
CONTENIDO ▪
Cálculo de ritmos relacionados ▪
Resolución de problemas con ritmos relacionados ▪

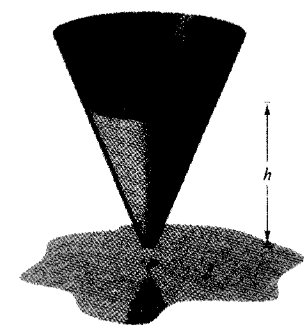
Cálculo de ritmos relacionados

Hemos aprendido a usar la regla de la cadena para hallar dy/dx implícitamente. Otra aplicación relevante de la regla de la cadena consiste en el cálculo de ritmos de cambio de dos o más variables relacionadas que están cambiando en el tiempo.

A título de ejemplo, si de un depósito cónico está saliendo agua (Figura 2.31), el volumen V, el radio r y la altura h del nivel del agua son todos funciones de t. Sabiendo que estas magnitudes variables están relacionadas por la ecuación

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$





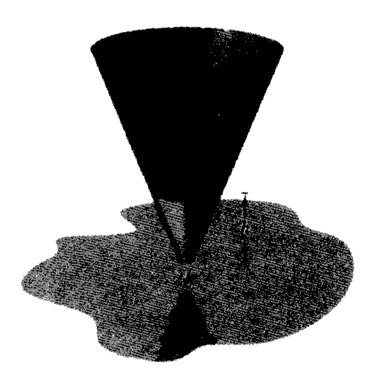


FIGURA 2.31
El volumen está relacionado con el radio y con la altura.

podemos derivar implícitamente con respecto a t obteniendo así la ecuación de ritmos relacionados

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left[r^2 \frac{dh}{dt} + h\left(2r\frac{dr}{dt}\right)\right]$$
$$= \frac{\pi}{3}\left(r^2 \frac{dh}{dt} + 2rh\frac{dr}{dt}\right)$$

De ella se sigue que el ritmo de cambio de V está relacionado con los ritmos de cambio de h y de r.

EXPLORACIÓN

Cálculo de un ritmo relacionado En el depósito cónico de la Figura 2.31, supongamos que la altura está cambiando a razón de −0,2 pies/min y el radio a razón de −0,1 pies/min. ¿Cuál es el ritmo de cambio de V cuando el radio es $r = 1$ pie y la altura es $h = 2$ pies? ¿Depende el ritmo de cambio del volumen de los valores de h y r? Explicar la respuesta.

EJEMPLO 1 Dos ritmos de cambio relacionados

Sean x e y dos funciones derivables relacionadas por la ecuación

$$y = x^2 + 3$$

Calcular dy/dx para $x = 1$, sabiendo que $dx/dt = 2$ en $x = 1$.

Solución: Derivamos ambos lados *con respecto a t*, utilizando la regla de la cadena.

$y = x^2 + 3$	Ecuación original
$\frac{d}{dt}[y] = \frac{d}{dt}[x^2 + 3]$	Derivar con respecto a t
$\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$	Regla de la cadena

Cuando $x = 1$ y $dx/dt = 2$, se tiene

$$\frac{dy}{dt} = 2(1)(2) = 4$$ □

Resolución de problemas con ritmos relacionados

En el Ejemplo 1 se daba una ecuación que relacionaba las variables x e y, y se pedía hallar el ritmo de cambio de y para $x = 1$.

Ecuación: $y = x^2 + 3$

Ritmo dado: $\frac{dx}{dt} = 2$ cuando $x = 1$

Hallar: $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 1$

Los ejemplos restantes de esta sección exigen crear un modelo matemático a partir de una descripción en palabras.

EJEMPLO 2 Ondas en un lago

Se deja caer una piedra en un lago en calma, lo que provoca ondas y círculos. El radio r del círculo exterior está creciendo a un ritmo constante de 1 pie/s. Cuando el radio es 4 pies, ¿a qué ritmo está cambiando el área A de la región circular perturbada?

Solución: Las variables r y A están relacionadas por $A = \pi r^2$. El ritmo de cambio del radio r es $dr/dt = 1$

Ecuación: $A = \pi r^2$

Ritmo dado: $\dfrac{dr}{dt} = 1$

Hallar: $\dfrac{dA}{dt}$ cuando $x = 4$

Con esta información, podemos proceder como en el Ejemplo 1.

$$\frac{d}{dt}[A] = \frac{d}{dt}[\pi r^2] \qquad \text{Derivar con respecto a } t$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt} \qquad \text{Regla de la cadena}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(4)(1) = 8\pi \qquad \text{Sustituir } dr/dt \text{ y } r$$

Cuando $r = 4$, el área está cambiando a razón de 8π pies cuadrados por segundo. □

Nota. En esta estrategia, es imprescindible asegurarse de que el paso 4 no se realiza hasta que el paso 3 esté terminado. De lo contrario, se produciría como resultado final una derivada errónea.

Estrategia para resolver problemas de ritmos relacionados

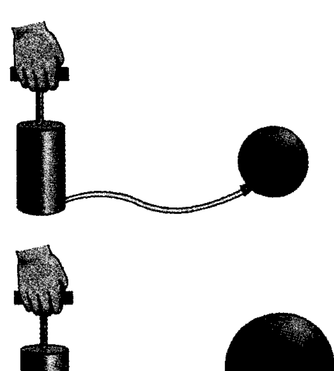
1. Identificar las magnitudes dadas y las magnitudes *a determinar*. Asignar símbolos a esas cantidades.
2. Escribir una ecuación que contenga a las variables cuyos ritmos de cambio son dados o han de ser determinados.
3. Usando la regla de la cadena, derivar implícitamente ambos lados de la ecuación *con respecto al tiempo t*.
4. *Después* de completar el paso 3, sustituir en la ecuación resultante todos los valores conocidos de las variables y de los ritmos de cambio. A continuación, despejar el ritmo de cambio que se deseaba calcular.

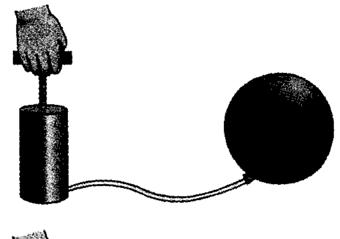
La tabla de la página siguiente recoge una lista de ejemplos de modelos matemáticos que involucran ritmos de cambio. Así, el ritmo de cambio del primer ejemplo es la velocidad del automóvil.

Enunciado en palabras	Modelo matemático
La velocidad de un automóvil tras una hora de viaje es de 50 millas/h	x = distancia recorrida $\frac{dx}{dt} = 50$ cuando $t = 1$
Se introduce agua en una piscina a razón de 10 metros cúbicos por hora	V = volumen de agua en la piscina $\frac{dV}{dt} = 10\ \text{m}^3/\text{h}$
Una rueda gira a 25 revoluciones por minuto (1 rev = 2π radianes)	θ = ángulo de giro $\frac{d\theta}{dt} = 25(2\pi)$ rad/min

EJEMPLO 3 Inflando un globo

Se bombea aire en el interior de un globo (Figura 2.32) a razón de 4,5 pulgadas cúbicas por minuto. Calcular el ritmo de cambio del radio del globo cuando el radio es 2 pulgadas.





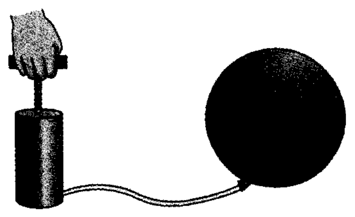


FIGURA 2.32
Globo en expansión.

Solución: Sea V el volumen del globo y r su radio. Como el volumen está creciendo a razón de 4,5 pulgadas cúbicas por minuto, sabemos que en el instante t el ritmo de cambio del volumen es $dV/dt = \frac{9}{2}$. Así pues, el problema admite la siguiente formulación.

Ritmo dado: $\frac{dV}{dt} = \frac{9}{2}$ (ritmo constante)

Hallar: $\frac{dr}{dt}$ cuando $r = 2$

Para calcular el ritmo de cambio del radio, hemos de encontrar una ecuación que relacione el radio r con el volumen V.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \text{Volumen de una esfera}$$

Por derivación implícita respecto de t obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \qquad \text{Derivar con respecto a } t$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\left(\frac{dV}{dt}\right) \qquad \text{Despejar } dr/dt$$

Finalmente, cuando $r = 2$ el ritmo de cambio del radio resulta ser

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{16\pi}\left(\frac{9}{2}\right) \approx 0{,}09 \text{ pulgadas por minuto.}$$

□

Nótese que en el Ejemplo 3 el volumen está creciendo a ritmo *constante*, pero el radio cambia a ritmo *variable*. El hecho de que dos ritmos estén relacionados no implica que sean proporcionales. En este caso particular, el radio crece más y más lentamente con el paso del tiempo. ¿Ve por qué sucede así?

EJEMPLO 4 La velocidad de un avión detectado por radar

Un avión vuela por una trayectoria que le llevará a la vertical de una estación de radar, como muestra la Figura 2.33. Si s está decreciendo a razón de 400 millas/h cuando $s = 10$ millas, ¿cuál es la velocidad del avión?

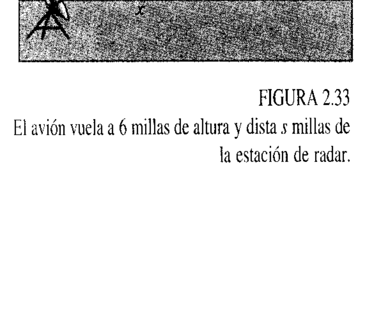
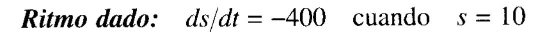


FIGURA 2.33
El avión vuela a 6 millas de altura y dista s millas de la estación de radar.

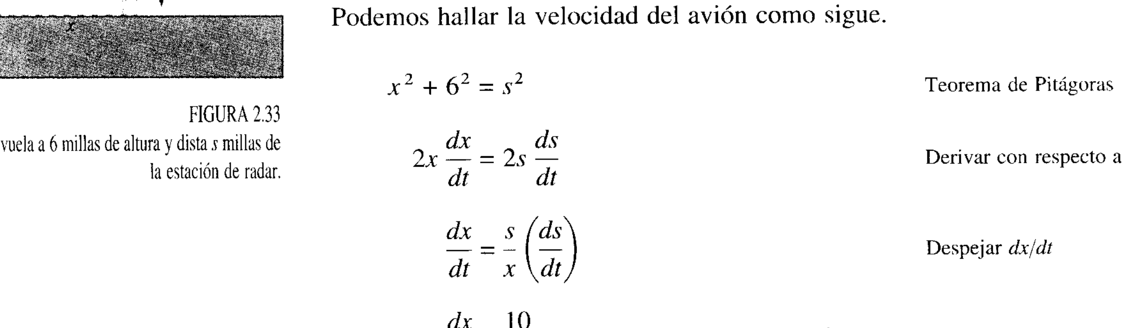
Solución: Sea x la distancia horizontal al radar (Figura 2.33). Observemos que cuando $s = 10$, $x = \sqrt{10^2 - 36} = 8$.



Ritmo dado: $ds/dt = -400$ cuando $s = 10$

Hallar: dx/dt cuando $s = 10$ y $x = 8$

Podemos hallar la velocidad del avión como sigue.



$$x^2 + 6^2 = s^2$$ Teorema de Pitágoras

$$2x\frac{dx}{dt} = 2s\frac{ds}{dt}$$ Derivar con respecto a t

$$\frac{dx}{dt} = \frac{s}{x}\left(\frac{ds}{dt}\right)$$ Despejar dx/dt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{10}{8}(-400) = -500 \text{ millas por hora}$$ Sustituir s, x, y ds/dt

Como la velocidad es −500 millas/h, la rapidez (o «velocidad» en sentido coloquial) es 500 millas/h. □

EJEMPLO 5 Ángulo de elevación variable

Calcular el ritmo de cambio del ángulo de elevación θ de la cámara de la Figura 2.34 diez segundos después del despegue.

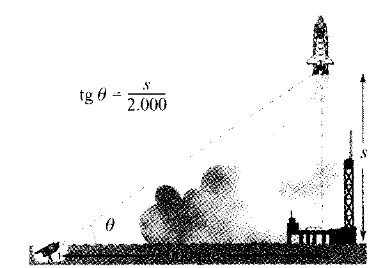


FIGURA 2.34
Una cámara de televisión, situada a ras de suelo, está filmando el despegue de un cohete espacial, que se mueve verticalmente de acuerdo con la ecuación $s = 50t^2$, donde s se mide en pies y t en segundos. La cámara dista 2.000 pies del punto de lanzamiento.

Solución: Cuando $t = 10$, la altura s del cohete es $s = 50t^2 = 50(10^2) = 5.000$ pies.

Ritmo dado: $ds/dt = 100t$ = velocidad del cohete

Hallar: $d\theta/dt$ cuando $t = 10$ y $s = 5.000$

De la Figura 2.34 vemos que s y θ están relacionadas por la ecuación $\operatorname{tg}\theta = s/2.000$.

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{s}{2.000}$	Véase Figura 2.34
$(\sec^2\theta)\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{2.000}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)$	Derivar con respecto a t
$\dfrac{d\theta}{dt} = \cos^2\theta\,\dfrac{100t}{2.000}$	Sustituir $100t$ por ds/dt
$= \left(\dfrac{2.000}{\sqrt{s^2+2.000^2}}\right)^2 \dfrac{100t}{2.000}$	$\cos\theta = 2.000/\sqrt{s^2+2.000^2}$
$\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{2.000(100)(10)}{5.000^2+2.000^2}$	Sustituir s y t
$= \dfrac{2}{29}$ radianes por segundo	Simplificar

Cuando $t = 10$, θ está cambiando a razón de $\frac{2}{29}$ radianes por segundo. □

EJEMPLO 6 La velocidad de un pistón

En el motor de la Figura 2.35, una varilla de 7 pulgadas está conectada a un cigüeñal de 3 pulgadas de radio que gira, en sentido contrario al de las agujas de un reloj, a 200 revoluciones por minuto. Calcular la velocidad del pistón cuando $\theta = \pi/3$.

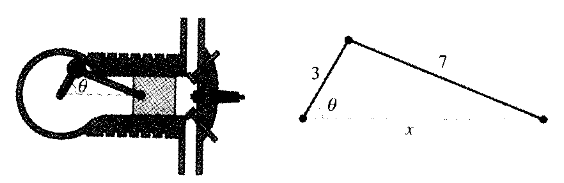


FIGURA 2.35
La velocidad del pistón está relacionada con el ángulo del cigüeñal.

Solución: Puesto que una revolución completa corresponde a 2π radianes, se sigue que $d\theta/dt = 200(2\pi) = 400\pi$ rad/min.

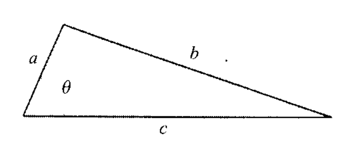


FIGURA 2.36
Ley de los cosenos:
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta$.

Ritmo dado: $\dfrac{d\theta}{dt} = 400\pi$ (ritmo constante)

Hallar: $\dfrac{dx}{dt}$ cuando $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

Podemos usar la ley de los cosenos (Figura 2.36) para hallar una ecuación que relacione x con θ.

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 2(3)(x)\cos\theta$$

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} - 6\left(-x\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt} + \cos\theta\frac{dx}{dt}\right)$$

$$(6\cos\theta - 2x)\frac{dx}{dt} = 6x\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6x\operatorname{sen}\theta}{6\cos\theta - 2x}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

Cuando $\theta = \pi/3$, se puede hallar x así:

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 2(3)(x)\cos\frac{\pi}{3}$$

$$49 = 9 + x^2 - 6x\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$0 = x^2 - 3x - 40$$

$$0 = (x - 8)(x + 5)$$

$$x = 8 \qquad \text{Elegir la solución positiva}$$

Así pues, cuando $x = 8$ y $\theta = \pi/3$ la velocidad del pistón es

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6(8)(\sqrt{3}/2)}{6(1/2) - 16}(400\pi)$$

$$= \frac{9.600\pi\sqrt{3}}{-13}$$

$$\approx -4.018 \text{ pulgadas por minuto}$$ □

Nota. La velocidad en el Ejemplo 6 es negativa porque x representa una distancia que está decreciendo.

Ejercicios de la Sección 2.6

En los Ejercicios 1-4, supóngase que x e y son funciones derivables de t y hállense los valores requeridos de dy/dt y dx/dt

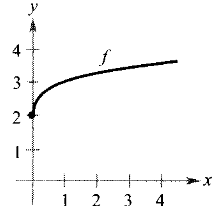
	Ecuación	*Hallar*	*Dado*
1.	$y = \sqrt{x}$	*a*) $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 4$	$\frac{dx}{dt} = 3$
		b) $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 25$	$\frac{dy}{dt} = 2$
2.	$y = x^2 - 3x$	*a*) $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 3$	$\frac{dx}{dt} = 2$
		b) $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 1$	$\frac{dy}{dt} = 5$
3.	$xy = 4$	*a*) $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 8$	$\frac{dx}{dt} = 10$
		b) $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 1$	$\frac{dy}{dt} = -6$
4.	$x^2 + y^2 = 25$	*a*) $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 3, y = 4$	$\frac{dx}{dt} = 8$
		b) $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 4, y = 3$	$\frac{dy}{dt} = -2$

En los Ejercicios 5-8, un punto se está moviendo sobre la gráfica de la función, de modo que dx/dt es 2 cm/s. Calcular dy/dt para los valores indicados de x.

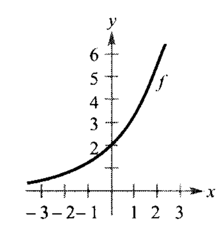
	Función	*Valores de x*	
5.	$y = x^2 + 1$	*a*) $x = -1$	*b*) $x = 0$
		c) $x = 1$	*d*) $x = 3$
6.	$y = \frac{1}{1 + x^2}$	*a*) $x = -2$	*b*) $x = 0$
		c) $x = 2$	*d*) $x = 10$
7.	$y = \operatorname{tg} x$	*a*) $x = -\frac{\pi}{3}$	*b*) $x = -\frac{\pi}{4}$
		c) $x = 0$	*d*) $x = 1$
8.	$y = \operatorname{sen} x$	*a*) $x = \frac{\pi}{6}$	*b*) $x = \frac{\pi}{4}$
		c) $x = \frac{\pi}{3}$	*d*) $x = \frac{\pi}{2}$

Para pensar En los Ejercicios 9 y 10, usando la gráfica de f, *a*) determinar si dy/dt crece o decrece para x creciente y dx/dt constante, y *b*) decidir si dx/dt crece o decrece para y creciente y dy/dt constante.

9.



10.



11. Hallar el ritmo de cambio de la distancia entre el origen y un punto que se mueve por la gráfica de $y = x^2 + 1$ si $dx/dt = 2$ cm/s.

12. Hallar el ritmo de cambio de la distancia entre el origen y un punto que se mueve sobre la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ si $dx/dt = 2$ cm/s.

13. ***Área*** El radio r de un círculo está creciendo a razón de 2 cm/min. Calcular el ritmo de cambio del área cuando *a*) $r = 6$ cm y *b*) $r = 24$ cm.

14. ***Área*** Sea A el área de un círculo de radio r variable con el tiempo. Si dr/dt es constante, ¿es constante dA/dt? Explicar la respuesta.

15. ***Área*** El ángulo entre los dos lados iguales, de longitud s, de un triángulo isósceles es θ.

a) Probar que el área del triángulo viene dada por $A = \frac{1}{2} s^2 \operatorname{sen} \theta$.

b) Si θ está creciendo a razón de 0,5 rad/min, hallar el ritmo de cambio del área cuando $\theta = \pi/6$ y cuando $\theta = \pi/3$.

c) Explicar por qué el ritmo de cambio del área del triángulo no es constante, a pesar de que $d\theta/dt$ es constante.

16. ***Volumen*** El radio de una esfera está creciendo a razón de 2 pulgadas/min.

a) Calcular el ritmo de cambio del volumen cuando $r = 6$ y cuando $r = 12$ pulgadas.

b) Explicar por qué el ritmo de cambio del área del triángulo no es constante, a pesar de que dr/dt es constante.

17. ***Volumen*** Un globo esférico se hincha con gas a razón de 500 cm^3/min. ¿A qué ritmo está creciendo su radio cuando el radio es *a*) 30 cm y *b*) 60 cm?

18. ***Volumen*** Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 3 cm/s. ¿A qué ritmo está creciendo el volumen cuando cada arista mide *a*) 1 cm y *b*) 10 cm?

19. ***Área de la superficie*** Bajo las condiciones del problema anterior, determinar el ritmo al que cambia el *área de la superficie* cuando cada arista mide *a*) 1 cm y *b*) 10 cm.

20. ***Volumen*** El volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Calcular el ritmo de cambio del volumen si dr/dt es 2 pulgadas/min y $h = 3r$, cuando *a*) $r = 6$ y *b*) $r = 24$ pulgadas.

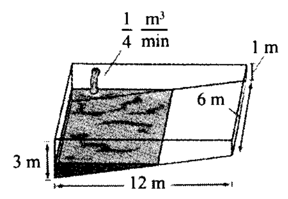
21. ***Volumen*** Por una cinta transportadora está cayendo arena sobre un montón de forma cónica, a razón de 10 pies cúbicos por minuto. El diámetro de la base del montón es unas tres veces la altura. ¿A qué ritmo cambia la altura del montón cuando su altura es 15 pies?

22. ***Profundidad*** Un depósito cónico (con el vértice abajo) mide 10 pies de anchura en su parte más alta y tiene 12 pies de profundidad. Si se echa agua en él a razón de 10 pies cúbicos/min, calcular el ritmo de cambio de la profundidad del agua cuando la profundidad es 8 pies.

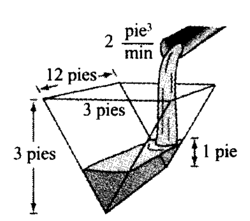
23. ***Profundidad*** Una piscina tiene 12 metros de largo, 6 de ancho, y profundidad entre 1 y 3 m, como muestra la figura adjunta. Se bombea agua en ella a razón de 0,25 m^3/min y hay 1 m de agua en el extremo más profundo.

a) ¿Qué tanto por ciento del volumen de la piscina se ha llenado?

b) ¿A qué ritmo está subiendo el nivel del agua?



24. ***Profundidad*** Una artesa, con las medidas de la figura, acaba en forma de triángulo isósceles. Si se echa agua en ella a razón de 2 pies cúbicos por minuto, ¿a qué ritmo está subiendo el nivel del agua cuando hay 1 pie de profundidad de agua?

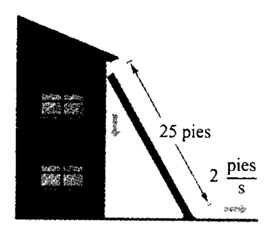


25. ***Escalera deslizante*** Una escalera de 25 pies de longitud está apoyada sobre una pared (véase figura). Su base desliza por el suelo a razón de 2 pies/s.

a) ¿A qué ritmo está bajando su extremo superior por la pared cuando la base dista de ella 7, 15 y 24 pies?

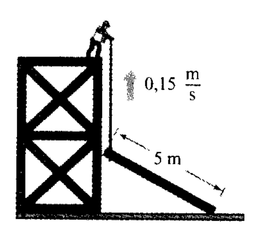
b) Hallar el ritmo al que cambia el área del triángulo formado por la escalera, el suelo y la pared, cuando la base está a 7 pies del muro.

c) Calcular el ritmo de cambio del ángulo entre la escalera y la pared cuando la base está a 7 pies del muro.

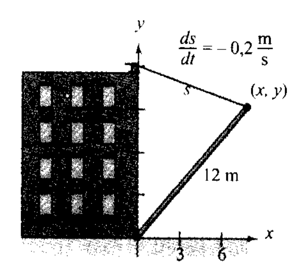


PARA MÁS INFORMACIÓN Véase el artículo «The Falling Ladder Paradox» de Paul Scholten y Andrew Simoson, en el número de enero de 1996 en *The College Mathematics Journal.*

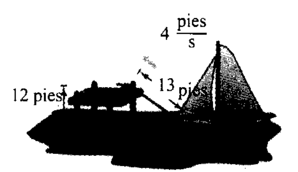
26. ***Construcción*** Un obrero levanta, con ayuda de una soga, un tablón hasta lo alto de un edificio en construcción (véase figura). Supongamos que el otro extremo del tablón sigue una trayectoria perpendicular a la pared y que el obrero mueve el tablón a razón de 0,15 m/s. ¿A qué ritmo desliza por el suelo el extremo cuando está a 2,5 m de la pared?



27. ***Construcción*** Una polea situada en lo alto de un edificio de 12 metros levanta una viga de la misma longitud hasta colocarla en posición vertical, como indica la figura. La cuerda se recoge a razón de –0,2 m/s. Calcular los ritmos de cambio vertical y horizontal del extremo de la viga cuando $y = 6$.



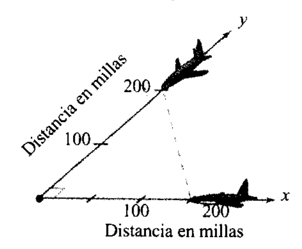
28. ***Atraque de un velero*** Un velero es arrastrado hacia el muelle por medio de una polea situada a una altura de 12 pies, tal como se muestra en la figura adjunta. La cuerda se recoge a razón de 4 pies/s. Calcular la velocidad del velero cuando quedan 13 pies de cuerda sin recoger. ¿Qué ocurre con la velocidad del velero cuando se acerca mucho al muelle?



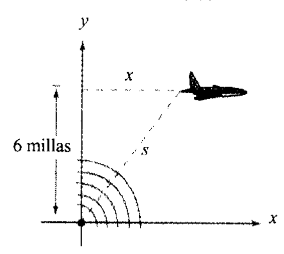
29. ***Control de tráfico aéreo*** Un controlador observa dos aviones que vuelan en trayectorias perpendiculares y a la misma altura (véase figura). Uno de ellos dista 150 millas y se mueve a 450 millas/h. El otro está a 200 millas y se desplaza a 600 millas/h.

a) ¿A qué ritmo decrece la distancia entre ellos?

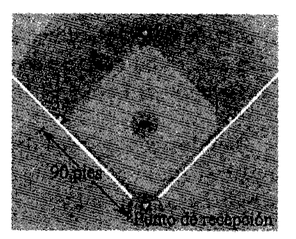
b) ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para modificar la trayectoria de uno de ellos?



30. ***Control de tráfico aéreo*** Un avión vuela a 6 millas de altura y pasa exactamente por encima de una antena de radar (véase figura). Cuando el avión está a 10 millas ($s = 10$), el radar detecta que la distancia s está cambiando a una velocidad de 240 millas/h. ¿Cuál es la velocidad del avión?



31. Un campo de béisbol tiene la forma de un cuadrado de 90 pies de lado (véase figura). Un jugador que dista 30 pies de la tercera base está corriendo a 28 pies/s. ¿A qué ritmo está cambiando su distancia al punto de recepción?

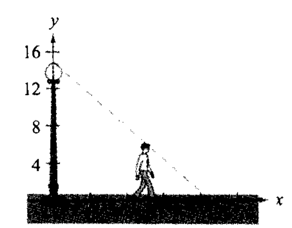


32. En el campo de béisbol del ejercicio anterior, supongamos que el jugador corre desde la primera hasta la segunda base a 28 pies/s. Hallar el ritmo de cambio de su distancia al punto de recepción cuando el jugador se encuentra a 30 pies de la segunda base.

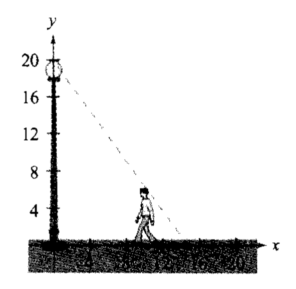
33. ***Longitud de una sombra*** Un hombre de 6 pies de altura camina a 5 pies/s alejándose de una farola cuya bombilla está a 15 pies de altura sobre el suelo (véase figura). Cuando el hombre está a 10 pies de la base de la farola,

a) ¿A qué velocidad se mueve el extremo de su sombra?

b) ¿A qué ritmo está cambiando la longitud de su sombra?



34. ***Longitud de una sombra*** Repetir el ejercicio anterior, supuesto que ese mismo hombre camina hacia la farola, y que la bombilla de ésta se halla situada a 20 pies de altura.



35 ***Diseño de máquinas*** Los puntos extremos de una varilla móvil de 1 m de longitud tienen coordenadas $(x, 0)$ y $(0, y)$ (véase figura). La posición del extremo que se apoya en el eje x viene dada por

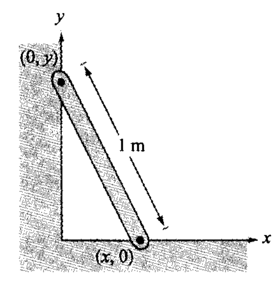
$$x(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{6}$$

donde t se mide en segundos.

a) ¿Cuánto tarda en completar un ciclo?

b) ¿Cuál es el punto más bajo que alcanza el otro extremo de la varilla?

c) Calcular la velocidad del extremo que se mueve por el eje y cuando el otro se halla en $(\frac{1}{4}, 0)$.



36. ***Diseño de máquinas*** Repetir el ejercicio anterior para una función de posición $x(t) = \frac{3}{5} \operatorname{sen} \pi t$. Usar el punto $(\frac{3}{10}, 0)$ para la parte *c*).

37. ***Evaporación*** Al caer, una gota esférica alcanza una capa de aire seco y comienza a evaporarse a un ritmo proporcional a su área superficial ($S = 4\pi r^2$). Probar que el radio de la gota decrece a ritmo constante.

38. ***Electricidad*** El efecto combinado de dos resistencias R_1 y R_2, conectadas en paralelo, es una resistencia R dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

donde R, R_1 y R_2 se miden en ohmios. R_1 y R_2 están creciendo a razón de 1 y 1,5 ohmios/s, respectivamente. ¿A qué ritmo está cambiando R cuando $R_1 = 50$ y $R_2 = 75$ ohmios?

39. ***Expansión adiabática*** Cuando cierto gas poliatómico sufre una expansión adiabática, su presión p y su volumen v satisfacen la ecuación

$$pv^{1,3} = k$$

donde k es una constante. Hallar la relación entre los ritmos dp/dt y dv/dt.

40. ***Diseño de autopistas*** Un tramo de autopista es circular de radio r. Con el fin de mejorar la toma de la curva, se construye ese tramo con un ángulo de inclinación q sobre la horizontal. Este ángulo satisface la ecuación

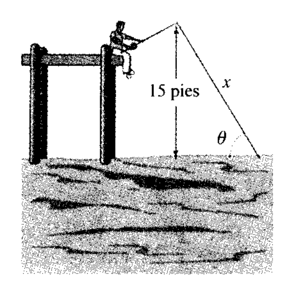
$$rg \operatorname{tg} \theta = v^2$$

donde v es la velocidad de los automóviles y $g = 32$ pies/s^2 es la aceleración de la gravedad. Hallar la relación entre los ritmos dv/dt y $d\theta/dt$.

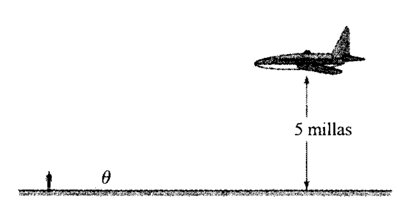
41. ***Ángulo de elevación*** Un globo asciende a 3 m/s desde un punto del suelo distante 30 m de un observador. Calcular el ritmo de cambio del ángulo de elevación del globo cuando está a una altura de 30 m.

42. ***Ángulo de elevación*** El pescador de la figura recoge hilo par∪σa capturar su pieza a razón de 1 pie/s. ¿A

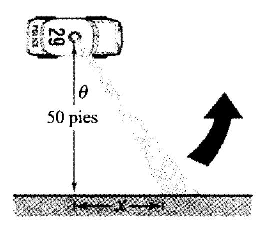
qué ritmo cambia el ángulo θ entre el sedal y el agua cuando quedan sin recoger 25 m de hilo?



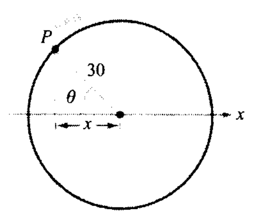
43. ***Ángulo de elevación*** Un avión vuela a 5 millas de altitud, y a una velocidad de 600 millas/h, hacia un punto situado exactamente en la vertical de un observador (véase figura). ¿A qué ritmo está cambiando el ángulo de elevación θ cuando el ángulo es *a*) $\theta = 30°$, *b*) $\theta = 60°$ y *c*) $\theta = 75°$?



44. ***Velocidad lineal y velocidad angular*** El coche patrulla de la figura, aparcado a 50 m de un largo muro, tiene una luz que gira a 30 revoluciones por minuto. ¿A qué velocidad se está moviendo la luz a lo largo del muro cuando el haz forma ángulos de *a*) $\theta = 30°$, *b*) $\theta = 60°$ y *c*) $\theta = 70°$?



45. ***Velocidad lineal y velocidad angular*** Una rueda de 30 cm de radio gira a razón de 10 vueltas por segundo. Se pinta en ella un punto P (véase figura).



a) Hallar dx/dt como función de θ.

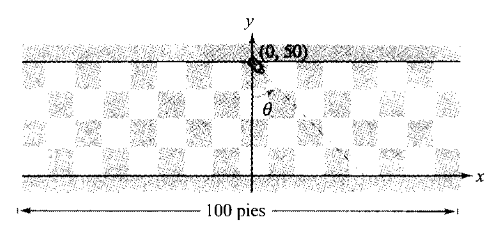
b) Representar en la calculadora la función del apartado *a*).

c) ¿Cuándo es máximo el valor absoluto del ritmo de cambio?

d) Calcular dx/dt cuando $\theta = 30°$ y $\theta = 60°$.

46. ***Control de vuelo*** Un avión vuela en aire en calma a una velocidad de 240 millas/h. Si asciende con un ángulo de 22°, calcular el ritmo al que está ganando altura.

47. ***Cámara de vigilancia*** Una cámara de vigilancia está a 50 pies de altura sobre un vestíbulo de 100 pies de largo (véase figura). Es más fácil diseñar la cámara con una velocidad de rotación constante, pero en tal caso toma las imágenes del vestíbulo a velocidad variable. En consecuencia, es deseable diseñar un sistema con velocidad angular variable de modo tal que la velocidad de la toma a lo largo del vestíbulo sea constante. Hallar un modelo para el ritmo variable de rotación adecuado si $|dx/dt| = 2$ pies/s.



48. ***Para pensar*** Describir la relación entre el ritmo de cambio de y y el de x en los casos siguientes. Suponemos que todas las variables y derivadas son positivas.

a) $\dfrac{dy}{dt} = 3\,\dfrac{dx}{dt}$

b) $\dfrac{dy}{dt} = x(L - x)\,\dfrac{dx}{dt},\ 0 \leqslant x \leqslant L$

Aceleración En los Ejercicios 49 y 50, calcular la aceleración del objeto especificado. (*Ayuda:* Recordemos que si una variable cambia a ritmo constante su aceleración es nula.)

49. Calcular la aceleración del extremo superior de la escalera del Ejercicio 25 cuando su base está a 7 pies de la pared.

50. Calcular la aceleración del velero del Ejercicio 28 cuando hay 13 pies de soga desde el amarradero.

51. ***Un modelo matemático*** La tabla recoge (en millones) el número de mujeres solteras s y casadas m en el mundo laboral en EE.UU. desde 1990 hasta 1994. *(Fuente: U.S. Bureau of Labor Statistics.)*

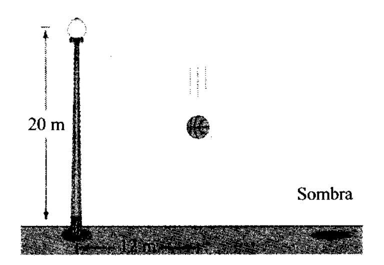
Año	1990	1991	1992	1993	1994
s	14,2	14,3	14,5	14,6	15,3
m	31,0	31,2	31,7	32,0	32,9

a) Usar regresión en la calculadora para hallar un modelo de la forma $m(s) = as^2 + bs + c$ que ajuste esos datos, donde t es el tiempo en años, siendo $t = 0$ el año 1990.

b) Hallar $\frac{dm}{dt}$

c) Estimar, con ese modelo, dm/dt para $t = 5$ supuesto que el número s va a crecer a razón de 1,2 millones.

52. Se deja caer una pelota desde una altura de 20 m y a una distancia de 12 m de una farola (véase figura). La sombra de la pelota se mueve a lo largo del suelo. ¿A qué ritmo se está moviendo la sombra 1 segundo después de soltar la pelota? *(Propuesto por Dennis Gittinger, St. Philips College, San Antonio, TX.)*

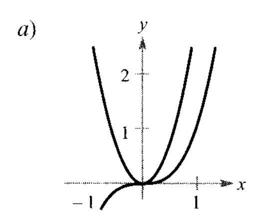


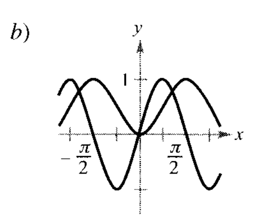
Ejercicios de repaso del Capítulo 2

En los Ejercicios 1 y 2, calcular la derivada de la función usando la propia definición de derivada.

1. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ **2.** $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

3. ***Redacción*** Cada figura muestra las gráficas de una función y de su derivada. Identificarlas y redactar un breve párrafo explicando los criterios en que se ha basado la decisión.

a)


b)


4. ***Redacción*** Sea la función $f(x) = x\sqrt{4 - x}$

a) Representarla en la calculadora.

b) Hallar una ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto (0, 0).

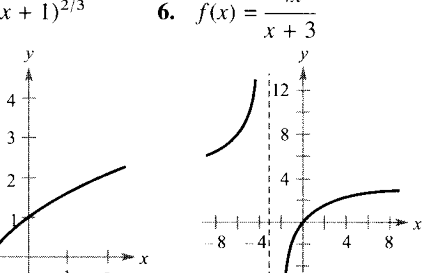
c) Completar la tabla con ayuda de la calculadora.

Δx	$f(x + \Delta x)$	$f(x)$	$\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
2			
1			
0,5			
0,1			

d) Redactar un párrafo explicando la interpretación geométrica de la última columna de esa tabla. ¿Qué relación guarda con el resultado del apartado *b*)?

En los Ejercicios 5 y 6, buscar los valores de x en los que f es derivable.

5. $f(x) = (x + 1)^{2/3}$ **6.** $f(x) = \dfrac{4x}{x+3}$



En los Ejercicios 7-22, derivar cada función algebraica propuesta.

7. $f(x) = x^3 - 3x^2$ **8.** $f(x) = x^{1/2} - x^{-1/2}$

9. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2}$ **10.** $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

11. $g(t) = \dfrac{2}{3t^2}$ **12.** $h(x) = \dfrac{2}{(3x)^2}$

13. $f(x) = \sqrt{1 - x^3}$

14. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

15. $f(x) = (3x^2 + 7)(x^2 - 2x + 3)$

16. $f(s) = (s^2 - 1)^{5/2}(s^3 + 5)$

17. $f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^5$

18. $h(\theta) = \frac{\theta}{(1 - \theta)^3}$

19. $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$

20. $f(x) = \frac{6x - 5}{x^2 + 1}$

21. $f(x) = \frac{1}{4 - 3x^2}$

22. $f(x) = \frac{9}{3x^2 - 2x}$

En los Ejercicios 23-34, derivar las funciones trigonométricas que se indican.

23. $y = 3 \cos (3x + 1)$

24. $y = 1 - \cos 2x + 2 \cos^2 x$

25. $y = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} 2x$

26. $y = \operatorname{cosec} 3x + \operatorname{ctg} 3x$

27. $y = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$

28. $y = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$

29. $y = \frac{2}{3} \operatorname{sen}^{3/2}x - \frac{2}{7} \operatorname{sen}^{7/2}x$

30. $y = \frac{\sec^7 x}{7} - \frac{\sec^5 x}{5}$

31. $y = -x \operatorname{tg} x$

32. $y = x \cos x - \operatorname{sen} x$

33. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

34. $y = \frac{\cos(x - 1)}{x - 1}$

En los Ejercicios 35-42, usar cálculo simbólico en una calculadora para hallar la derivada de la función. Representar f y f' en unos mismos ejes. Describir el comportamiento de f en los puntos donde la derivada se hace cero.

35. $f(t) = t^2(t - 1)^5$

36. $f(x) = [(x - 2)(x + 4)]^2$

37. $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x + 1}}$

38. $g(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$

39. $f(t) = \sqrt{t + 1}\,\sqrt[3]{t + 1}$

40. $y = \sqrt{3x}(x + 2)^3$

41. $y = \operatorname{tg} \sqrt{1 - x}$

42. $y = 2 \operatorname{cosec}^3 (\sqrt{x})$

En los Ejercicios 43 y 44, calcular el valor de la derivada en el punto indicado. Comprobar el resultado en una calculadora.

Función	*Punto*
43. $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$	$(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$
44. $f(x) = x + \frac{8}{x^2}$	$(2, 4)$

En los Ejercicios 45-48, calcular la segunda derivada de la función.

45. $y = 2x^2 + \operatorname{sen} 2x$

46. $y = \frac{1}{x} + \operatorname{tg} x$

47. $f(x) = \operatorname{ctg} x$

48. $y = \operatorname{sen}^2 x$

En los Ejercicios 49 a 52, usar derivación simbólica para hallar la segunda derivada de la función.

49. $f(t) = \frac{t}{(1 - t)^2}$

50. $g(x) = \frac{6x - 5}{x^2 + 1}$

51. $g(x) = x \operatorname{tg} x$

52. $h(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$

En los Ejercicios 53-58, hallar *dy/dx* mediante derivación implícita.

53. $x^2 + 3xy + y^3 = 10$

54. $x^2 + 9y^2 - 4x + 3y = 0$

54. $y\sqrt{x} - x\sqrt{y} = 16$

56. $y^2 = (x - y)(x^2 + y)$

57. $x \operatorname{sen} y = y \cos x$

58. $\cos (x + y) = x$

En los Ejercicios 59-64, hallar ecuaciones para la recta tangente y para la recta normal a la gráfica de la ecuación en el punto que se indica. Representar en una calculadora las gráficas de la función, de la recta tangente y de la recta normal.

59. $y = (x + 3)^3$, $(-2, 1)$

60. $y = (x - 2)^2$, $(2, 0)$

61. $x^2 + y^2 = 20$ $(2, 4)$

62. $x^2 - y^2 = 16$ $(5, 3)$

63. $y = \sqrt[3]{(x - 2)^2}$, $(3, 1)$

64. $y = \frac{2x}{1 - x^2}$, $(0, 0)$

65. Determinar los puntos de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{3} x^3 + x^2 - x - 1$ en los que la pendiente es *a*) -1, *b*) 2, y *c*) 0.

66. Localizar los puntos de la gráfica de $f(x) = x^2 + 1$ en los que la pendiente es *a*) -1, *b*) 0, y *c*) 1.

67. Dibujar la gráfica de $f(x) = 4 - |x - 2|$.

a) ¿Es continua f en $x = 2$?

b) ¿Es derivable f en $x = 2$? Explicar la respuesta.

68. Esbozar la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2, & x < -2 \\ 1 - 4x - x^2, & x \geqslant -2 \end{cases}$$

a) ¿Es continua f en $x = -2$?
b) ¿Es derivable f en $x = -2$? Explicar la respuesta.

En los Ejercicios 69 y 70, probar que la función satisface la ecuación.

	Función	*Ecuación*
69.	$y = 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$	$y'' + y = 0$
70.	$y = \dfrac{10 - \cos x}{x}$	$xy' + y = \operatorname{sen} x$

71. ***Refrigeración*** La temperatura de un alimento en un congelador viene dada por

$$T = \frac{700}{t^2 + 4t + 10}$$

donde t es el tiempo en horas. Hallar el ritmo de cambio de T con respecto a t en los momentos siguientes:

a) $t = 1$ *b)* $t = 3$ *c)* $t = 5$ *d)* $t = 10$

72. ***Flujo de un fluido*** La velocidad v de un fluido que sale por un orificio situado en el fondo de un depósito viene dada por $v = \sqrt{2gh}$, donde g es la aceleración de la gravedad (32 pies/s^2) y h la profundidad de fluido en el depósito. Calcular el ritmo de cambio de v respecto de h cuando *a)* $h = 9$, y *b)* $h = 4$. (Nótese que $g = +32$ pies/s^2. El signo de g depende del problema concreto. En este caso, poner un valor negativo para g daría como resultado un valor imaginario para v.)

73. ***Cuerda vibrante*** Al pulsar una cuerda de guitarra, vibra con una frecuencia $F = 200\sqrt{T}$, donde F se mide en vibraciones por segundo y la tensión T en libras. Hallar el ritmo de cambio de F cuando *a)* $T = 4$, y *b)* $T = 9$.

74. ***Movimiento vertical*** Se deja caer una bola desde 100 pies de altura. Un segundo más tarde, se deja caer otra bola desde 75 metros de altura. ¿Cuál llega antes al suelo?

75. ***Movimiento vertical*** ¿Cuál es la mínima velocidad inicial requerida para que una piedra lanzada hacia arriba alcance la copa de un árbol de 49 pies de altura?

76. ***Movimiento vertical*** Un avión suelta una bomba a una altitud de 14.400 pies. ¿Cuánto tardará en llegar al suelo? (Debido al movimiento del avión, la caída no es vertical, pero el tiempo es el mismo que si fuera vertical.) Si el avión se desplaza a 600 millas/h, ¿qué distancia horizontal recorre la bomba antes de llegar al suelo?

77. ***Movimiento de un proyectil*** Una bala sigue la trayectoria descrita por $y = x - 0{,}02x^2$.

a) Esbozar la gráfica de la trayectoria.
b) Calcular la distancia horizontal recorrida por la bala.
c) ¿En qué valor de x alcanza la bala su máxima altura? (Utilizar la simetría de la trayectoria.)
d) Escribir una ecuación que describa la tasa instantánea de cambio de la altura de la bala respecto del cambio horizontal. Evaluar la ecuación en $x = 0$, 10, 25, 30 y 50.
e) Hallar la tasa instantánea de cambio de la altura cuando la bala alcanza su máxima altura.

78. Un punto se mueve sobre la curva $y = \sqrt{x}$ de forma tal que su coordenada y está variando a razón de 2 unidades por segundo. ¿A qué ritmo está cambiando x para cada uno de estos valores:

a) $x = \frac{1}{2}$ *b)* $x = 1$ *c)* $x = 4$

79. Bajo las condiciones del Ejercicio 78, hallar el ritmo de cambio de la distancia entre el origen y el punto (x, y) de la gráfica, para

a) $x = \frac{1}{2}$ *b)* $x = 1$ *c)* $x = 4$

80. ***Movimiento de un proyectil*** Un proyectil lanzado con un ángulo de elevación de 45° sigue la trayectoria

$$y = x - \frac{32}{v_0^2}(x^2)$$

donde v_0 es la velocidad inicial.

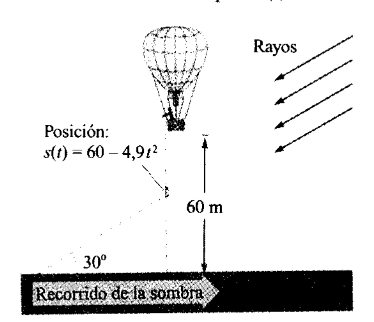
a) Hallar la coordenada x en la que el proyectil cae al suelo. Usar la simetría de la trayectoria para localizar el valor de x en el que el proyectil alcanza la altura máxima.
b) ¿Cuál es el ritmo instantáneo de cambio de la altura en el instante de máxima altura?
c) Probar que si se dobla la velocidad inicial, tanto la altura máxima como el alcance horizontal se cuadruplican.
d) Calcular la máxima altura y el alcance de un proyectil lanzado con una velocidad inicial de 70 pies/s. Representar su trayectoria en la calculadora.

81. ***Cambio de profundidad*** La sección de una artesa de 5 m de largo es un trapecio isósceles con base inferior de 2 m, base superior de 3 m y 2 m de altura. La artesa está recibiendo agua a razón de 1 m^3/min. ¿A qué ritmo está subiendo el nivel del agua cuando el agua llena hasta 1 m de profundidad?

82. ***Velocidad lineal y velocidad angular*** Un faro, situado a 1 km de una costa rectilínea, gira a razón de 3 revoluciones por minuto. ¿A cuántos km/h parece mo-

verse la luz del faro para un observador que está en la costa, a $\frac{1}{2}$ km de la perpendicular al faro?

83. ***Movimiento de una sombra*** Un globo suelta un saco de arena cuando se encuentra a 60 m de altura. Si el ángulo de elevación del Sol es 30° (ver figura) calcular la velocidad de la sombra del saco sobre el suelo cuando el saco está a 35 m de altura. (*Ayuda:* La posición del saco viene dada por $s(t) = 60 - 4{,}9t^2$.)



84. ***Un modelo matemático*** La tabla recoge las ventas V, en miles de millones de dólares, de vehículos deportivos en EE.UU. entre 1980 y 1994. *(Fuente: National Sporting Goods Association.)*

Año	0	1	2	3	4	5	6	7
Ventas	1,2	1,8	1,7	3,4	4,1	3,5	3,9	4,5

Año	8	9	10	11	12	13	14
Ventas	4,8	4,5	4,1	3,6	4,4	4,8	4,8

a) Usar regresión en la calculadora para hallar un modelo cuadrático que ajuste esos datos, donde t es el tiempo en años, con $t = 0$ correspondiendo al año 1980.

b) Representar en la calculadora los datos y el modelo.

c) Representar dV/dt.

d) La tabla muestra que las ventas decrecieron desde 1989 hasta 1991. ¿Refleja la derivada del modelo este descenso? Explicar la respuesta.

e) ¿Muestra el modelo la cuantía total de ese descenso de ventas? Explicar la respuesta.

f) Determinar, utilizando derivadas, el intervalo de tiempo en el que las ventas crecieron más deprisa. Explicar la respuesta.

85. ***Un modelo matemático*** La velocidad de un automóvil en millas/h y su distancia de frenada aparecen en la tabla adjunta.

Velocidad (x)	20	30	40	50	60
Distancia de frenada (y)	25	55	105	188	300

a) Usar regresión en la calculadora para hallar un modelo cuadrático que ajuste esos datos.

b) Representar en la calculadora los datos y el modelo.

c) Representar dy/dx.

d) Estimar, en ese modelo, la distancia de frenada a una velocidad de 65 millas/h.

e) Utilizar las gráficas de los apartados *b*) y *c*) para explicar el cambio de la distancia de frenada conforme aumenta la velocidad.

86. La función posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x es

$$x(t) = t^2 - 3t + 2$$

para $-\infty < t < \infty$

a) Calcular la velocidad y la aceleración de la partícula.

b) Determinar el intervalo o intervalos de t en los que la partícula se mueve hacia la izquierda.

c) Hallar la posición de la partícula cuando su velocidad es 0.

d) Calcular su velocidad cuando la posición es 0.



Capítulo 3

MOTIVACIÓN DEL CAPÍTULO

Para cuando los técnicos especialistas en envases comienzan su tarea, los diseñadores ya han terminado la suya. Los diseñadores usan colores, palabras y adornos con el fin de crear una imagen atractiva a los ojos de los clientes. Muchos diseñadores opinan que la presentación es tan importante como el propio producto.

El famoso diseñador Primo Angeli está tan convencido de la importancia del envase, que ha llegado a diseñar colecciones variadas de envases para estudiar la respuesta del mercado ante cada uno de ellos y decidir así, *a posteriori*, el más conveniente para la fabricación definitiva.

Envasado: la forma óptima

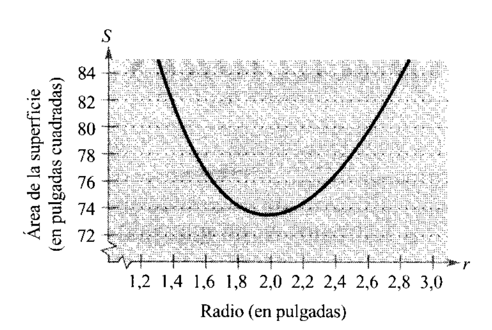
Hay mucha gente dedicada a decidir cómo presentar los envases que vemos en los establecimientos de venta. Los expertos eligen los materiales y las formas con el fin de proteger los productos a un coste razonable.

Al igual que el material, la forma de un envase es importante a la hora de determinar su resistencia. Desde un punto de vista técnico, la esfera es la forma más fuerte, seguida por el cilindro circular. La caja rectangular viene en un humilde tercer lugar. Desde una perspectiva de costes, es preferible utilizar la menor cantidad posible de material.

La tabla recoge las medidas de algunos envases cilíndricos de uso común en EE.UU.

Producto	Radio (pulg.)	Altura (pulg.)	Volumen (pulg.^{3})
Nata líquida	1,50	6,85	48,42
Producto de limpieza	1,45	7,50	49,54
Café	1,95	5,20	62,12
Piña	2,10	6,70	92,82
Azúcar glaseado	1,63	3,60	30,05
Sopa	1,30	3,80	20,18
Zumo de tomate	1,95	4,40	52,56
Levadura	1,25	3,65	17,92

Se pueden utilizar las medidas más diversas para construir envases de un cierto volumen. La gráfica de la página siguiente muestra la relación entre el radio y el área superficial de envases de 48,4 pulgadas^3 de volumen.



CUESTIONES

1. Elaborar una tabla de valores de las dimensiones de un cilindro con 49,54 pulgadas^3 de volumen. ¿Parece que el envase del producto de limpieza minimiza el área de la superficie?

2. Supongamos que estamos diseñando un envase de crema de café con 48,42 pulgadas^3 de volumen. Usar las ecuaciones que dan la superficie y el volumen de un cilindro para buscar una ecuación que relacione el radio r y el área S.

$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ Área de la superficie de un cilindro circular

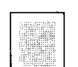
$V = \pi r^2 h$ Volumen de un cilindro circular

3. Repetir el punto 2 para cada uno de los envases de la tabla. Representar en la calculadora cada una de las ecuaciones. Determinar si el radio de cada uno es mayor, menor o igual que el radio «óptimo».

4. Supongamos, puestos a preguntarnos acerca del cilindro, que quisiéramos hacer máxima el área de un cilindro con 49,5 pulgadas^3 de capacidad. ¿Podríamos conseguirlo? Explicar la respuesta.

3

Aplicaciones de la derivada



3.1 Extremos en un intervalo

Extremos de una función

En el Cálculo se dedica mucho esfuerzo a estudiar el comportamiento de una función f sobre un intervalo I. ¿Tiene f un valor máximo en I? ¿Y un valor mínimo? ¿Dónde es creciente la función? ¿Y decreciente? En este capítulo aprenderemos a aprovechar las derivadas con el fin de responder cuestiones de esa clase. También veremos por qué tales cuestiones son relevantes en las aplicaciones cotidianas.

DEFINICIÓN DE EXTREMOS

Sea f definida en un intervalo I que contiene a c.

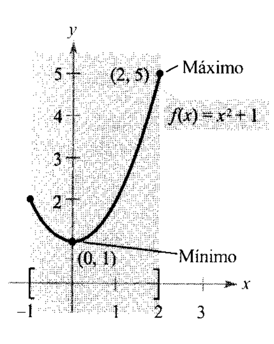
1. $f(c)$ es el (valor) mínimo de f en I si $f(c) \leqslant f(x)$ para todo x en I.
2. $f(c)$ es el (valor) máximo de f en I si $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x en I.

El máximo y el mínimo de una función en un intervalo son los **valores extremos**, o simplemente **extremos**, de la función en ese intervalo. El mínimo y el máximo de una función en un intervalo se llaman también el mínimo absoluto y el máximo absoluto de la función en el intervalo.

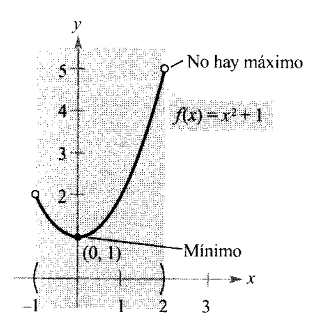
Una función no tiene por qué tener máximo o mínimo en un intervalo. Así, en la Figura 3.1a y b vemos que la función $f(x) = x^2 + 1$ tiene máximo y mínimo en el intervalo cerrado $[-1, 2]$, pero no tiene máximo en el intervalo abierto $(-1, 2)$. Por su parte, la Figura 3.1c muestra que la continuidad (o la falta de continuidad) puede afectar a la existencia de un extremo en el intervalo. Esto sugiere el siguiente teorema, cuya demostración escapa al nivel de este libro.

TEOREMA 3.1 **TEOREMA DE LOS VALORES EXTREMOS**

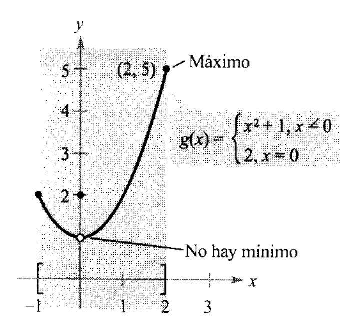
Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo y también un valor mínimo en ese intervalo.



a) *f* continua, [–1, 2] cerrado



b) *f* continua, (–1, 2) abierto



c) *g* no es continua, [–1, 2] cerrado

FIGURA 3.1
Los extremos pueden producirse en puntos interiores del intervalo o en sus puntos terminales.

EXPLORACIÓN

Búsqueda de los valores máximo y mínimo. El teorema de los valores extremos (al igual que el del valor intermedio) es un *teorema de existencia*. Asegura la existencia de valores máximo y mínimo, pero no enseña cómo hallarlos. Usar una calculadora para hallar los valores extremos de las siguientes funciones. En cada caso, los valores de x obtenidos ¿son exactos o aproximados? Explicar la respuesta.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ en el intervalo cerrado $[-1, 3]$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x - 2$ en el intervalo cerrado $[-1, 3]$

Extremos relativos y números críticos

En la Figura 3.2, la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2$ tiene un **máximo relativo** en el punto (0, 0) y un **mínimo relativo** en el punto (2, –4). De manera coloquial se puede decir que un máximo relativo ocurre en una «cima» de la gráfica y un mínimo relativo en un «valle». Tales cimas y valles pueden aparecer de dos formas. Si son redondeados y suaves, la gráfica tiene en ellos tangente horizontal. Si son abruptos y angulosos, la gráfica representa una función que no es derivable en ese punto de cima o valle.

DEFINICIÓN DE EXTREMOS RELATIVOS

1. **Si existe un intervalo abierto que contiene a c y en el que $f(c)$ es máximo, entonces $f(c)$ se llama un máximo relativo de f.**
2. **Si existe un intervalo abierto que contiene a c y en el que $f(c)$ es mínimo, entonces $f(c)$ se llama un mínimo relativo de f.**

El Ejemplo 1 examina las derivadas de funciones en extremos relativos *dados*. (En la Sección 3.3 abordaremos el problema de cómo *localizar* los extremos relativos.)

EJEMPLO 1 El valor de la derivada en un extremo relativo

Calcular la derivada en cada uno de los extremos relativos que se indican en la Figura 3.3.

Solución:

a) La derivada de

$$f(x) = \frac{9(x^2 - 3)}{x^3}$$

es

$$f'(x) = \frac{x^3(18x) - (9)(x^2 - 3)(3x^2)}{(x^3)^2}$$

$$= \frac{9(9 - x^2)}{x^4}$$

En el punto (3, 2), el valor de la derivada es $f'(3) = 0$ (véase Figura 3.3*a*).

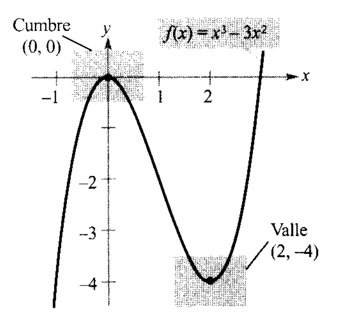


FIGURA 3.2
f tiene un máximo relativo en (0, 0) y un mínimo relativo en (2, −4).

b) En $x = 0$, la derivada de $f(x) = |x|$ *no existe*, ya que los límites laterales no son iguales (Figura 3.3*b*):

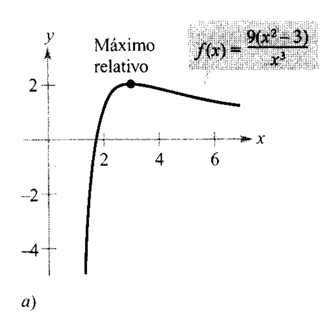
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \qquad \text{Límite por la izquierda}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \qquad \text{Límite por la derecha}$$

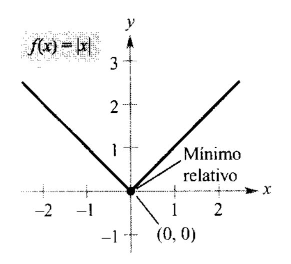
c) La derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es

$$f'(x) = \cos x$$

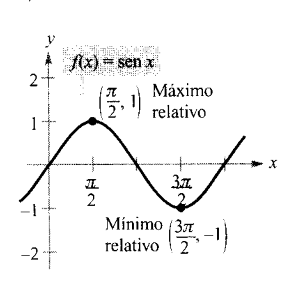
En el punto $(\pi/2, 1)$, la derivada es $f'(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$. En el punto $(3\pi/2, -1)$, la derivada es $f'(3\pi/2) = \cos(3\pi/2) = 0$. (véase Figura 3.3*c*). □



a)



b)



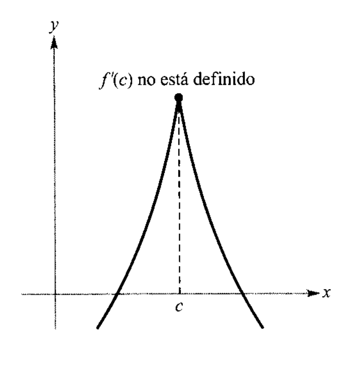
c)

FIGURA 3.3
En los extremos relativos, la derivada es cero o no está definida.

Nótese que en el Ejemplo 1 la derivada en los extremos relativos o es nula o no está definida. Los valores de x en esos puntos especiales se llaman **números críticos**. La Figura 3.4 ilustra los dos tipos de números críticos.

DEFINICIÓN DE NÚMEROS CRÍTICOS

Sea f definida en c. Si $f'(c) = 0$ o si f' no está definida en c, se dice que c es un **número crítico** de f.



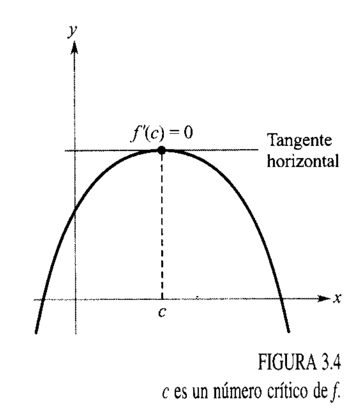
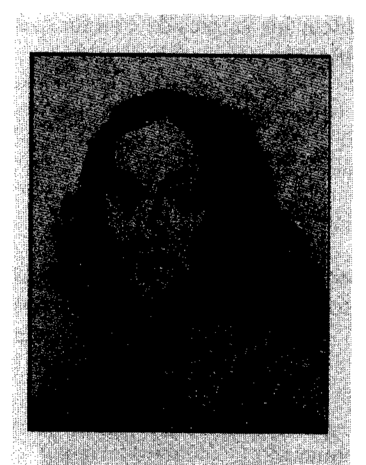


FIGURA 3.4
c es un número crítico de f.

TEOREMA 3.2 LOS EXTREMOS RELATIVOS SÓLO OCURREN EN LOS NÚMEROS CRÍTICOS

Si f tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en $x = c$, c es un número crítico de f.

Demostración:
Caso 1: Si f no es derivable en $x = c$, entonces c es un número crítico de f, por definición, luego el teorema es válido.



PIERRE DE FERMAT (1601-1665)

Para Fermat, licenciado en Derecho, las Matemáticas fueron más un *hobby* que una profesión. No obstante, aportó grandes contribuciones a la Geometría analítica, a la Teoría de números, al Cálculo y a las Probabilidades. En cartas a los amigos escribió numerosas ideas fundamentales del Cálculo, mucho antes que Newton y Leibniz. Por ejemplo, el Teorema 3.2 se suele atribuir a Fermat.

Caso 2: Si f es derivable en $x = c$, entonces $f'(c)$ será positivo, negativo o cero. Supongamos que fuera positivo. En tal circunstancia,

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

lo cual implica que existe un intervalo (a, b) que contiene a c y tal que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0, \text{ para todo } x \neq c \text{ en } (a, b)$$

Puesto que el cociente es positivo, los signos de numerador y denominador deben coincidir. Esto produce las siguientes desigualdades para valores de x en (a, b).

Izquierda de c: $x < c$ y $f(x) < f(c)$ ⇨ $f(c)$ no es un mínimo relativo

Derecha de c: $x > c$ y $f(x) > f(c)$ ⇨ $f(c)$ no es un máximo relativo

Así pues, la hipótesis $f'(c) > 0$ contradice el hecho de que $f(c)$ sea un extremo relativo. Suponiendo que $f'(c) < 0$ se llega a una contradicción análoga. Por tanto, sólo queda una posibilidad, a saber que $f'(c) = 0$, de modo que, por definición, c es un número crítico de f. El teorema está demostrado.

Búsqueda de extremos en un intervalo cerrado

El Teorema 3.2 afirma que los extremos relativos *sólo* pueden ocurrir en los números críticos de la función. A la vista de lo cual, podemos seguir esta estrategia en la búsqueda de extremos en un intervalo cerrado.

Estrategia para localizar extremos relativos en un intervalo cerrado

Para hallar los extremos relativos de una función continua f en un intervalo cerado $[a, b]$, debe procederse así:

1. Hallar los números críticos de f en $[a, b]$.
2. Evaluar f en cada número crítico de (a, b).
3. Evaluar f en a y en b.
4. El más grande de todos esos valores es el máximo; el más pequeño es el mínimo.

Los próximos ejemplos enseñan a usar esta estrategia. La búsqueda de los números críticos es tan sólo una parte del proceso. La parte restante consiste en evaluar la función en los números críticos y en los puntos terminales.

EJEMPLO 2 Búsqueda de extremos en un intervalo cerrado

Hallar los extremos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ en el intervalo $[-1, 2]$.

Solución: Antes de nada, derivamos la función.

$f(x) = 3x^4 - 4x^3$ Función original

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$ Derivada

Para hallar los números críticos de f hay que buscar los valores de x en los que $f'(x) = 0$ y aquellos en los que $f'(x)$ no está definida.

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 0 \qquad \text{Hacer } f'(x) = 0$$

$$12x^2(x - 1) = 0 \qquad \text{Factorizar}$$

$$x = 0,1 \qquad \text{Números críticos}$$

Como f' está definida en todo x, concluimos que éstos son los únicos números críticos de f. Evaluando f en ellos y en los puntos terminales de $[-1, 2]$ vemos que el máximo es $f(2) = 16$ y el mínimo es $f(1) = -1$, como recoge la tabla. La Figura 3.5 muestra la gráfica de f.

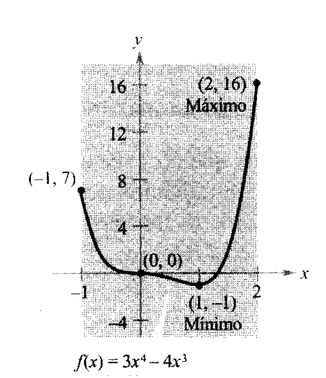
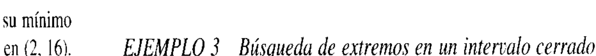


FIGURA 3.5
En el intervalo cerrado $[-1, 2]$, f tiene su mínimo en $(1, -1)$ y su máximo en $(2, 16)$.

Punto terminal izquierdo	**Número crítico**	**Número crítico**	**Punto terminal derecho**
$f(-1) = 7$	$f(0) = 0$	$f(1) = -1$ Mínimo	$f(2) = 16$ Máximo

□

Nota. En la Figura 3.5, el número crítico $x = 0$ no da ni máximo ni mínimo relativo. Lo cual significa que el recíproco del Teorema 3.2 no es verdadero. En otras palabras, *los números críticos de una función no siempre corresponden a extremos relativos.*



EJEMPLO 3 Búsqueda de extremos en un intervalo cerrado

Hallar los extremos de

$$f(x) = 2x - 3x^{2/3}$$

en el intervalo $[-1, 3]$.

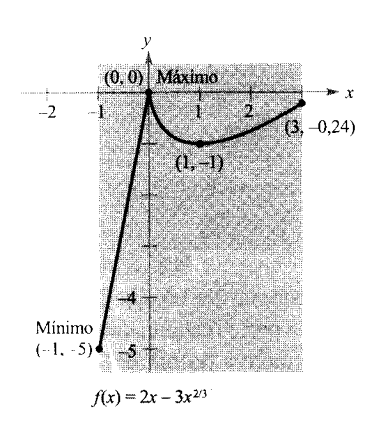


FIGURA 3.6
En el intervalo cerrado $[-1, 3]$, f tiene su mínimo en $(-1, -5)$ y su máximo en $(0, 0)$.

Solución: Derivando obtenemos

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^{1/3}} = 2\left(\frac{x^{1/3} - 1}{x^{1/3}}\right)$$

De esa derivada se deduce que f tiene dos números críticos en el intervalo $[-1,3]$. El número 1 es crítico porque $f'(1) = 0$, y el número 0 porque $f'(0)$ no está definida. Evaluando f en esos dos puntos y en los puntos terminales del intervalo, concluimos que el mínimo es $f(-1) = -5$ y el máximo $f(0) = 0$, como muestra la Figura 3.6.

Punto terminal izquierdo	**Número crítico**	**Número crítico**	**Punto terminal derecho**
$f(-1) = -5$ Mínimo	$f(0) = 0$ Máximo	$f(1) = -1$	$f(3) = 6 - 3\sqrt[3]{9} \approx -0{,}24$

□

EJEMPLO 4 Búsqueda de extremos en un intervalo cerrado

Hallar los extremos de

$$f(x) = 2 \text{ sen } x - \cos 2x$$

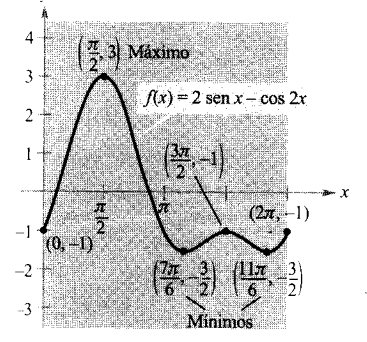


FIGURA 3.7
En el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$, f alcanza su valor mínimo en dos puntos $(7\pi/6, -3/2)$ y $(11\pi/6, -3/2)$, y su máximo en $(\pi/2, 3)$.

Solución: Esta función es derivable en todo x real, luego para encontrar sus números críticos basta hacer $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 2 \cos x + 2 \text{ sen } 2x = 0$$

$$2 \cos x + 4 \cos x \text{ sen } x = 0 \qquad \text{sen } 2x = 2 \cos x \text{ sen } x$$

$$2(\cos x)(1 + 2 \text{ sen } x) = 0 \qquad \text{Factorizar}$$

En el intervalo $[0, 2\pi]$, el factor $\cos x$ es nulo en $x = \pi/2$ y en $x = 3\pi/2$. El factor $(1 + 2 \text{ sen } x)$ es cero en $x = 7\pi/6$ y en $x = 11\pi/6$. Evaluando f en esos cuatro puntos y en los dos puntos terminales del intervalo, vemos que el máximo es $f(\pi/2) = 3$ y el mínimo ocurre en *dos* puntos $f(7\pi/6) = -3/2$ y $f(11\pi/6) = -3/2$, como indica la tabla. La gráfica de f puede verse en la Figura 3.7.

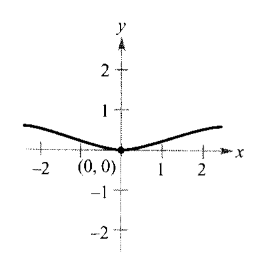
Punto terminal izquierdo	**Número crítico**	**Número crítico**	**Número crítico**	**Número crítico**	**Punto terminal derecho**
$f(0) = -1$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ Máximo	$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$ Mínimo	$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$	$f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$ Mínimo	$f(2\pi) = -1$

□

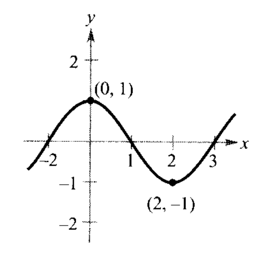
Ejercicios de la Sección 3.1

En los Ejercicios 1-6, calcular el valor de la derivada (si existe) en cada extremo que se indica.

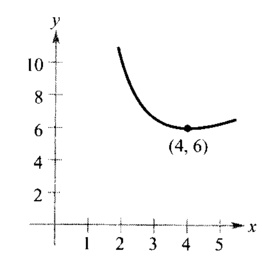
1. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$



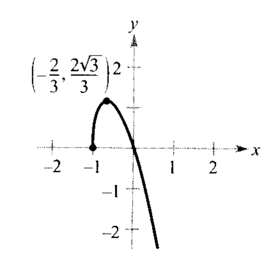
2. $f(x) = \cos \dfrac{\pi x}{2}$



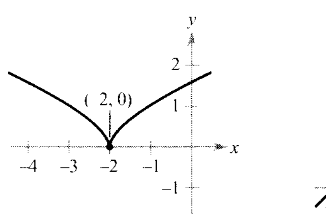
3. $f(x) = x + \dfrac{32}{x^2}$



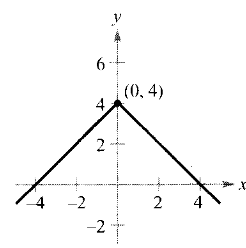
4. $f(x) = -3x\sqrt{x + 1}$



5. $f(x) = (x + 2)^{2/3}$



6. $f(x) = 4 + |x|$



En los Ejercicios 7-12, hallar los números críticos de la función.

7. $f(x) = x^2(x - 3)$ **8.** $g(x) = x^2(x^2 - 4)$

9. $g(t) = t\sqrt{4 - t}$ **10.** $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$

11. $h(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos x$, $0 \leq x < 2\pi$ **12.** $f(\theta) = 2 \sec \theta + \operatorname{tg} \theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$

En los Ejercicios 13-26, determinar los extremos absolutos de la función y los valores de x donde se alcanzan.

	Función	*Intervalo*
13.	$f(x) = 2(3 - x)$	$[-1, 2]$
14.	$f(x) = \dfrac{2x + 5}{3}$	$[0, 5]$
15.	$f(x) = -x^2 + 3x$	$[0, 3]$
16.	$f(x) = x^2 + 2x - 4$	$[-1, 1]$
17.	$f(x) = x^3 - 3x^2$	$[-1, 3]$
18.	$f(x) = x^3 - 12x$	$[0, 4]$
19.	$f(x) = 3x^{2/3} - 2x$	$[-1, 1]$
20.	$g(x) = \sqrt[3]{x}$	$[-1, 1]$
21.	$h(t) = 4 - \|t - 4\|$	$[1, 6]$
22.	$g(t) = \dfrac{t^2}{t^2 + 3}$	$[-1, 1]$
23.	$h(s) = \dfrac{1}{s - 2}$	$[0, 1]$
24.	$h(t) = \dfrac{t}{t - 2}$	$[3, 5]$
25.	$f(x) = \cos \pi x$	$\left[0, \dfrac{1}{6}\right]$
26.	$f(x) = \operatorname{cosec} x$	$\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$

27. ***Redacción*** Explicar por qué la función $f(x) = \operatorname{tg} x$ tiene un máximo en $[0, \pi/4]$ pero no en $[0, \pi]$.

28. ***Escribir*** Escribir un breve párrafo justificando por qué una función continua en un intervalo abierto no tiene por qué alcanzar un valor máximo o mínimo. Ilustrar la explicación con la gráfica de alguna función.

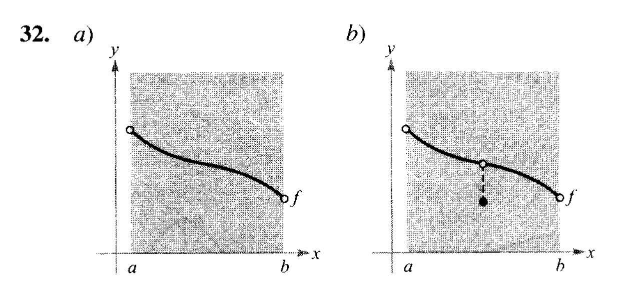
En los Ejercicios 29-32, deducir de la gráfica si f tiene máximo en el intervalo abierto (a, b).

29. *a)* *b)*

30. *a)* *b)*

31. *a)* *b)*

32. *a)* *b)*



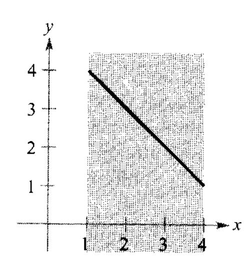
En los Ejercicios 33-36, localizar los extremos absolutos de la función (si los hay) en los intervalos que se especifican.

33. $f(x) = 2x - 3$

a) $[0, 2]$
b) $[0, 2)$
c) $(0, 2]$
d) $(0, 2)$

34. $f(x) = 5 - x$

a) $[1, 4]$
b) $[1, 4)$
c) $(1, 4]$
d) $(1, 4)$

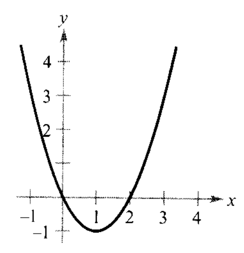


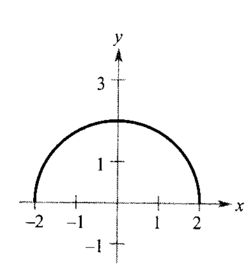
35. $f(x) = x^2 - 2x$

a) $[-1, 2]$
b) $(1, 3]$
c) $(0, 2)$
d) $[1, 4)$

36. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

a) $[-2, 2]$
b) $[-2, 0)$
c) $(-2, 2)$
d) $[1, 2)$





En los Ejercicios 37-40, representar f en la calculadora. Determinar los extremos absolutos de la función y los valores de x donde ocurren dentro del intervalo indicado.

Función	*Intervalo*
37. $f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 4x^2, & 1 < x \leqslant 3 \end{cases}$	$[0, 3]$
38. $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & 1 \leqslant x < 3 \\ 2 - 3x, & 3 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$	$[1, 5]$
39. $f(x) = \dfrac{3}{x - 1}$	$(1, 4]$
40. $f(x) = \dfrac{2}{2 - x}$	$[0, 2)$

En los Ejercicios 41 y 42, usar la calculadora para *a*) representar la gráfica de f y, por derivación simbólica, aproximar los extremos absolutos de la función, *b*) hallar los números críticos y con ellos cualquier extremo absoluto que no esté en los puntos terminales. Comparar los resultados con los del apartado *a*).

Función	*Intervalo*
41. $f(x) = 3{,}2x^5 + 5x^3 - 3{,}5x$	$[0, 1]$
42. $f(x) = \dfrac{4}{3}x\sqrt{3 - x}$	$[0, 3]$

En los Ejercicios 43 y 44, usar derivación simbólica en la calculadora para hallar el valor máximo de $|f''(x)|$ en el intervalo propuesto. (Este valor se usa al estimar el error de la regla de los trapecios, como se verá en la Sección 4.6.)

Función	*Intervalo*
43. $f(x) = \sqrt{1 + x^3}$	$[0, 2]$
44. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$	$\left[\dfrac{1}{2}, 3\right]$

En los Ejercicios 45 y 46, usar derivación simbólica en la calculadora para hallar el valor máximo de $|f^4(x)|$en el intervalo propuesto. (Este valor se usa al estimar el error de la regla de Simpson, como se verá en la Sección 4.6.)

Función	*Intervalo*
45. $f(x) = (x + 1)^{2/3}$	$[0, 2]$
46. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$	$[-1, 1]$

47. ***Potencia*** La fórmula para la potencia P de una batería es $P = VI - RI^2$ donde V es la fuerza electromagnética en voltios, R la resistencia e I la intensidad de corriente. Hallar la intensidad (medida en amperios) que corresponde a un valor máximo de P en una batería con $V = 12$ voltios y $R = 0{,}5$ ohmios. Supongamos que un fusible de 15 amperios limita la salida de corriente en el intervalo $0 \leqslant I \leqslant 15$. ¿Aumentaría la salida de corriente si se sustituye ese fusible por otro de 20 amperios? Explicar la respuesta.

48. ***Coste de inventario*** Un empresario ha calculado que el coste C de pedido y almacenamiento de x unidades de un producto es

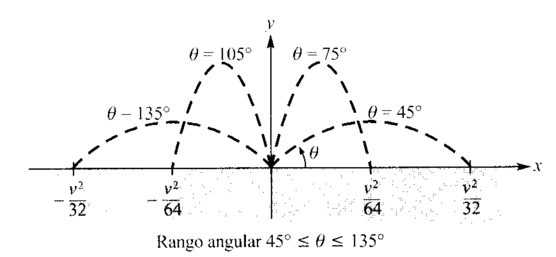
$$C = 2x + \frac{300.000}{x}, \qquad 1 \leqslant x \leqslant 300$$

El camión de reparto sólo puede transportar 300 unidades. Hallar el tamaño de pedido que minimizará el coste. ¿Bajaría el coste si el camión se sustituyera por otro que puede llevar hasta 400 unidades? Explicar la respuesta.

49. ***Boca de riego*** Una boca de riego está construida de manera que $d\theta/dt$ es constante, donde θ varía entre 45° y 135° (véase figura). La distancia que el agua recorre horizontalmente es

$$x = \frac{v^2 \operatorname{sen} 2\theta}{32}, \qquad \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{4}$$

donde v es la velocidad del agua. Calcular dx/dt y explicar por qué este mecanismo no riega de manera uniforme. ¿Qué parte del césped recibe más agua?



Rango angular 45° ≤ θ ≤ 135°

PARA MÁS INFORMACIÓN Véase el artículo «Design of an Oscillating Sprinkler» de Bart Braden en *Mathematics Magazine*, enero 1985.

50. ***Un modelo matemático*** Los gastos de defensa, en porcentajes respecto del PIB entre los años 1976 y 1995 en EE.UU. vienen recogidos en la tabla adjunta. «*Fuente: U.S. Office of Management and Budget.*)

1976: (5,3 %); 1977: (5,1 %); 1978: (4,8 %); 1979: (4,8 %);
1980: (5,1 %); 1981: (5,3 %); 1982: (5,9 %); 1983: (6,3 %);
1984: (6,2 %); 1985: (6,4 %); 1986: (6,5 %); 1987: (6,3 %);
1988: (6,0 %); 1989: (5,9 %); 1990: (5,5 %); 1991: (4,8 %);
1992: (5,0 %); 1993: (4,7 %); 1994: (4,2 %); 1995: (3,9 %);

a) Usar regresión en la calculadora para hallar un modelo de la forma $y = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$ para esos datos. (t es el tiempo en años, con $t = 0$ correspondiendo a 1980.)

b) Representar los datos y el modelo en la calculadora.

c) Localizar los extremos absolutos del modelo en el intervalo [–4, 15].

51. ***Panal*** El área de la superficie de una celdilla en un panal es

$$S = 6hs + \frac{3s^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3} - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}\right)$$

donde h y s son constantes positivas y θ es el ángulo entre las paredes superiores que intersectan a la altura de la celda. Averiguar el ángulo que minimiza el área S.

PARA MÁS INFORMACIÓN Véase el artículo «The Design of Honeycombs», de Anthony L. Peressini, UMAP Module 502, publicado por COMAP, Inc., Suite 210, 57 Bedford Street, Lexington, MA.

52. ***Diseño de autopistas*** Una autopista debe salvar, en forma parabólica, un valle cuyas laderas tienen pendientes del 6 por 100 y del 9 por 100 (véase figura). El arco de parábola es tangente a las laderas en los puntos A y B.

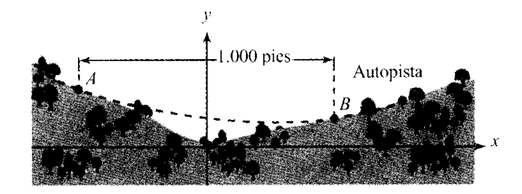
a) Hallar una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, $-500 \leqslant x \leqslant 500$, que describa la forma de ese arco.

b) Completar la tabla con las profundidades d del arco en los x que se indican.

x	–500	–400	–300	–200	–100
d					

x	0	100	200	300	400	500
d						

c) ¿Cuál será el punto más bajo de ese tramo de autopista? ¿Cae justo encima del punto donde las laderas confluyen?



¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 53-56, decidir si el enunciado es verdadero o falso. En caso de falsedad, explicar la razón o exhibir un ejemplo que la ponga de manifiesto.

53. El máximo de una función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado puede ocurrir en dos valores de x diferentes.

54. Si una función es continua en un intervalo cerrado, alcanza un valor mínimo en ese intervalo.

55. Si $x = c$ es un número crítico de f, también lo es de la función $g(x) = f(x) + k$, donde k es una constante.

56. Si $x = c$ es un número crítico de f, también lo es de la función $g(x) = f(x - k)$, donde k es una constante.

57. Hallar todos los números críticos de la función parte entera $f(x) = [\![x]\!]$.

CONTENIDO ▪
El teorema de Rolle ▪
El teorema del valor medio ▪

3.2 Teorema de Rolle y teorema del valor medio

TEOREMA DE ROLLE

El matemático francés Michel Rolle descubrió este teorema en 1691. Antes de ese momento, sin embargo, Rolle había sido muy crítico con el Cálculo, afirmando que producía resultados erróneos y que estaba basado en razonamientos sin fundamento. Más tarde, acabó convencido de la utilidad del Cálculo.

El Teorema de Rolle

El teorema de los valores extremos (Sección 3.1) establece que una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ alcanza necesariamente un valor máximo y un valor mínimo en él. Ahora bien, estos valores pueden producirse en los puntos terminales. El teorema de Rolle, llamado así en honor del matemático francés Michel Rolle (1652-1719), establece condiciones suficientes para garantizar la existencia de un valor extremo en el interior de un intervalo cerrado.

EXPLORACIÓN

Valores extremos en un intervalo cerrado Marcar sobre unos ejes, en una hoja de papel, los puntos (1, 3) y (5, 3). Dibujar a continuación la gráfica de una función que parte de (1, 3) y llega a (5, 3). ¿Hay al menos un punto donde la derivada es cero? ¿Es posible evitar que haya un punto así? Explicar la respuesta.

TEOREMA 3.3 TEOREMA DE ROLLE

Sea f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Si

$$f(a) = f(b)$$

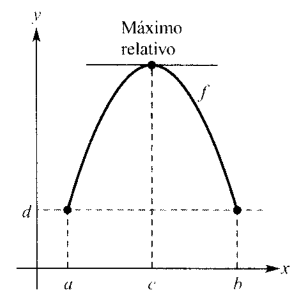
existe al menos un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Demostración: Sea $f(a) = d = f(b)$.

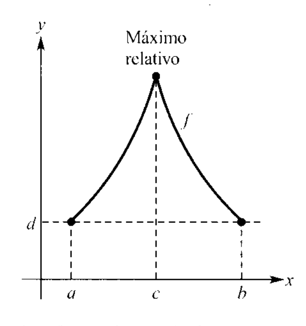
Caso 1: Si $f(x) = d$ para todo x en $[a, b]$, f es constante en ese intervalo, luego, por el Teorema 2.2, $f'(x) = 0$ en todo x de (a, b).

Caso 2: Supongamos que $f(x) > d$ en algún x de (a, b). Por el teorema del valor extremo sabemos que f alcanza un máximo en algún c del intervalo. Además, al ser $f(c) > d$, ese máximo no puede producirse en los puntos terminales. Por tanto, f tiene un máximo en el intervalo *abierto* (a, b). Eso implica que $f(c)$ es un máximo relativo y, por el Teorema 3.2, c es un número crítico de f. Finalmente, como f es derivable en c, concluimos que $f(c) = 0$.

Caso 3: Si $f(x) < d$ para algún x de (a, b), un argumento similar al del caso 2, con mínimo en lugar de máximo, lleva a la misma conclusión. □



a) f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)



b) f es continua en $[a, b]$

FIGURA 3.8

El teorema de Rolle nos dice que si una función es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y si $f(a) = f(b)$, hay al menos un valor de x entre a y b en el que la gráfica de f tiene tangente horizontal, como muestra la Figura 3.8*a*. Si se suprime la hipótesis de derivabilidad en el teorema de Rolle, f tiene todavía un número crítico en (a, b), pero quizás no tenga en él tangente horizontal. Tal situación se ilustra en la Figura 3.8*b*.

EJEMPLO 1 Ilustración del teorema de Rolle

Hallar las dos x-intersecciones de

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

y probar que $f'(x) = 0$ en algún punto intermedio.

Solución: Nótese que f es derivable en toda la recta real. Al igualar $f(x)$ a cero obtenemos

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \qquad \text{Igualar } f(x) \text{ a cero}$$

$$(x - 1)(x - 2) = 0 \qquad \text{Factorizar}$$

Así pues, $f(1) = f(2) = 0$, luego el teorema de Rolle asegura la existencia de al menos un c en el intervalo $(1, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. Para encontrar ese c, basta resolver la ecuación

$$f'(x) = 2x - 3 = 0 \qquad \text{Igualar } f'(x) \text{ a cero}$$

y determinamos que $f'(x) = 0$ en $x = \frac{3}{2}$. Observemos que este valor de x está en el intervalo abierto $(1, 2)$ (véase Figura 3.9). □

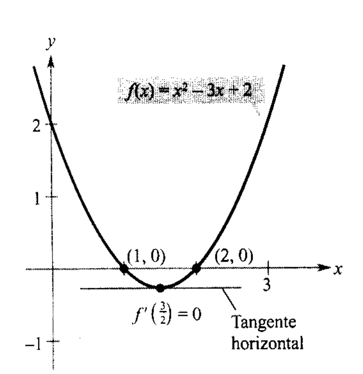


FIGURA 3.9
El valor de x en el que $f'(x) = 0$ está entre las dos x-intersecciones.

El teorema de Rolle garantiza la existencia de al menos un punto entre a y b donde la derivada es cero. Ahora bien, puede suceder que haya más de un punto que cumpla esa condición, como se ve en el próximo ejemplo.

EJEMPLO 2 Ilustración del teorema de Rolle

Dada $f(x) = x^4 - 2x^2$, hallar los valores c en el intervalo $(-2, 2)$ en los que $f'(c) = 0$.

Solución: Para empezar, notemos que la función satisface las hipótesis del teorema de Rolle. Es decir, es continua en $[-2, 2]$ y derivable en $(-2, 2)$. Además, como $f(-2) = 8 = f(2)$, podemos concluir que existe al menos un c en $(-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. Igualando a cero la derivada, se obtiene

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0$$

$$4x(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0,\ 1,\ -1$$

FIGURA 3.10
$f'(x) = 0$ en más de un valor de x del intervalo $(-2, 2)$.

Por tanto, en el intervalo $(-2, 2)$ la derivada es nula en tres valores distintos de x (véase Figura 3.10).

Con una calculadora se puede ver si los puntos de las gráficas de los Ejemplos 2 y 3 son máximos o mínimos relativos. Sin embargo, al usar calculadora hay que ser consciente de que nos puede ofrecer presentaciones engañosas de las gráficas. Así, si se intenta representar la gráfica de

$$f(x) = 1 - (x-1)^2 - \frac{1}{1.000(x-1)^{1/7}+1},$$

la mayoría de las ventanas elegidas hacen creer que hay un máximo en $x = 1$ (Figura 3.11). Evaluando la función en $x = 1$, sin embargo, vemos que $f(1) = 0$. Para determinar el comportamiento de esta función cerca de $x = 1$ es necesario examinarla analíticamente con el fin de completar adecuadamente la gráfica.

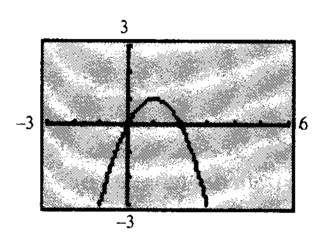


FIGURA 3.11

El teorema del valor medio

El teorema de Rolle sirve para demostrar otro teorema importante: el **teorema del valor medio**.

TEOREMA 3.4 **EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO**

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), existe un número c en (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

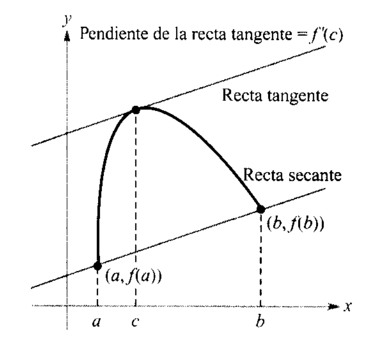


FIGURA 3.12

Demostración: La ecuación de la secante de la Figura 3.12, que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es

$$y = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) + f(a)$$

Sea $g(x)$ la diferencia entre $f(x)$ e y. Entonces

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - y \\ &= f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) - f(a) \end{aligned}$$

Evaluando g en a y b se ve que $g(a) = 0 = g(b)$, Además, al ser f derivable, también g lo es, de manera que es aplicable a g el teorema de Rolle. En consecuencia, existe algún c en (a, b) en el cual $g'(c) = 0$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} 0 &= g'(c) \\ &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}$$



JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813)

El teorema del valor medio fue probado por el famoso matemático Joseph-Louis Lagrange. Nacido en Italia, Lagrange ocupó un cargo en la corte de Federico el Grande en Berlín durante 20 años. A continuación se mudó a Francia, donde coincidió con el emperador Napoleón Bonaparte, a quien se atribuye haber dicho «Lagrange es la pirámide más alta de las ciencias matemáticas».

Así pues, existe un número c en (a, b) para el cual

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ □

Nota. La palabra «medio» (o promedio) en el teorema se refiere al ritmo de cambio de f en el intervalo $[a, b]$.

Aunque el teorema del valor medio se puede utilizar directamente para resolver problemas, es más eficaz como instrumento en la demostración de otros teoremas. De hecho, muchos opinan que se trata del teorema más importante del Cálculo. Está relacionado con el teorema fundamental del Cálculo (Capítulo 4). Por el momento, los resultados enunciados en los Ejercicios 51-56 de esta sección pueden dar una idea de su versatilidad.

El teorema del valor medio tiene implicaciones relativas a las diversas interpretaciones de la derivada. Geométricamente, garantiza la existencia de una recta tangente paralela a la secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, como muestra la Figura 3.12. El Ejemplo 3 ilustra esta interpretación geométrica del teorema del valor medio. En términos de ritmos de cambio, el teorema del valor medio implica que debe haber algún punto en (a, b) en el que el ritmo instantáneo de cambio es igual al ritmo medio de cambio en $[a, b]$. Esto lo ilustra el Ejemplo 4.

EJEMPLO 3 Hallando una recta tangente

Dada $f(x) = 5 - (4/x)$, hallar todos los valores c en el intervalo $(1, 4)$ tales que

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$$

Solución: La pendiente de la recta secante que pasa por $(1, f(1))$ y $(4, f(4))$ es

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{4 - 1}{4 - 1} = 1$$

Como f satisface las condiciones del teorema del valor medio, existe al menos un c en $(1, 4)$ para el cual $f'(c) = 1$. Resolviendo la ecuación $f'(x) = 1$ obtenemos

$$f'(x) = \frac{4}{x^2} = 1$$

lo cual implica que $x = \pm 2$. Por tanto, en el intervalo $(1, 4)$ concluimos que $c = 2$, como muestra la Figura 3.13. □

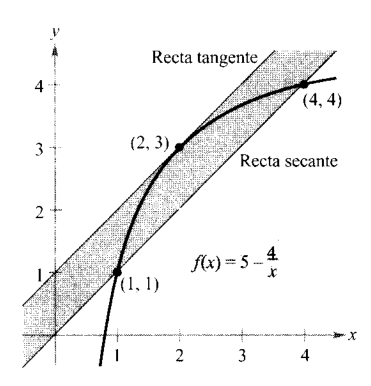


FIGURA 3.13
La recta tangente en (2, 3) es paralela a la secante que pasa por (1, 1) y (4, 4).

EJEMPLO 4 Cálculo de un ritmo de cambio instantáneo

Dos coches patrulla, equipados con radar, distan 5 millas en una autopista (Figura 3.14). Un camión pasa ante el primero de ellos a 55 millas/h y cuatro minutos después pasa ante el segundo a 50 millas/h. Probar que el camión ha

sobrepasado el límite de velocidad (= 55 millas/h) en algún lugar entre esos dos controles.

5 millas

$t = 4$ minutos $t = 0$

FIGURA 3.14
En algún instante t, la velocidad instantánea es igual a la velocidad media en esos 4 minutos.

Solución: Sea $t = 0$ el instante (en horas) en que pasa por el primer control. Por el segundo pasa cuando

$$t = \frac{4}{60} = \frac{1}{15} \text{ horas}$$

Denotando por $s(t)$ la distancia (en millas) recorrida por el camión, tenemos que $s(0) = 0$ y $s(\frac{1}{15}) = 5$. En consecuencia, la velocidad media del camión en ese tramo de 5 millas ha sido

$$\begin{aligned}\text{Velocidad media} &= \frac{s(1/15) - s(0)}{(1/15) - 0} \\ &= \frac{5}{1/15} = 75 \text{ millas/h}\end{aligned}$$

Supuesta la función posición derivable, el teorema del valor medio nos permite deducir que en algún instante intermedio el camión ha viajado a 75 millas/h. □

Una forma alternativa útil del teorema del valor medio es la siguiente: si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), existe algún c en (a, b) en el cual

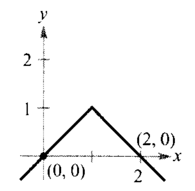
$$\boxed{f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)}$$ Forma alternativa del teorema del valor medio

Nota. Al resolver los ejercicios de esta sección, téngase en cuenta que las funciones polinómicas, racionales y trigonométricas son derivables en todos los puntos de su dominio.

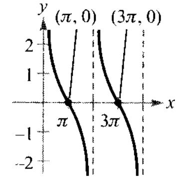
Ejercicios de la Sección 3.2

Para pensar En los Ejercicios 1 y 2, argumentar por qué no es aplicable el teorema de Rolle, a pesar de que existen a y b tales que $f(a) = f(b)$.

1. $f(x) = 1 - |x - 1|$



2. $f(x) = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$



En los Ejercicios 3-16, discutir si es aplicable el teorema de Rolle a f en el intervalo indicado. Si es aplicable, hallar todos los c del intervalo en los que $f'(c) = 0$.

Función	*Intervalo*
3. $f(x) = x^2 - 2x$	$[0, 2]$
4. $f(x) = x^2 - 3x + 2$	$[1, 2]$
5. $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$	$[1, 3]$
6. $f(x) = (x - 3)(x + 1)^2$	$[-1, 3]$
7. $f(x) = x^{2/3} - 1$	$[-8, 8]$

Función	*Intervalo*
8. $f(x) = 3 - \lvert x - 3\rvert$	$[0, 6]$
9. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 2}$	$[-1, 3]$
10. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$	$[-1, 1]$
11. $f(x) = \operatorname{sen} x$	$[0, 2\pi]$
12. $f(x) = \cos x$	$[0, 2\pi]$
13. $f(x) = \operatorname{sen} 2x$	$\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$
14. $f(x) = \dfrac{6x}{\pi} - 4 \operatorname{sen}^2 x$	$\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$
15. $f(x) = \operatorname{tg} x$	$[0, \pi]$
16. $f(x) = \sec x$	$\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$

En los Ejercicios 17-20, representar en una calculadora la función en el intervalo dado. Decidir si es aplicable el teorema de Rolle y, en caso afirmativo, calcular todos los c del intervalo en los que $f'(c) = 0$.

Función	*Intervalo*
17. $f(x) = \lvert x\rvert - 1$	$[-1, 1]$
18. $f(x) = x - x^{1/3}$	$[0, 1]$
19. $f(x) = 4x - \operatorname{tg} \pi x$	$[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$
20. $f(x) = \dfrac{x}{2} - \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{6}$	$[-1, 0]$

21. ***Movimiento vertical*** La altura de una bola, t segundos después de ser lanzada hacia arriba desde una altura de 32 m con una velocidad inicial de 48 pies/s, viene dada por $f(t) = -16t^2 + 48t + 32$.

a) Comprobar que $f(1) = f(2)$.

b) De acuerdo con el teorema de Rolle, ¿cuál debe ser la velocidad en algún instante del intervalo $[1, 2]$?

22. ***Coste de pedido*** El coste de pedido y transporte de componentes utilizadas en un proceso de fabricación es aproximadamente

$$C(x) = 10\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x + 3}\right)$$

donde C se mide en miles de dólares y x es el tamaño del pedido en cientos.

a) Verificar que $C(3) = C(6)$.

b) Según el teorema de Rolle, el ritmo de cambio de C debe ser 0 para algún tamaño del pedido en el intervalo $[3, 6]$. Hallar este tamaño.

23. ***Para pensar*** Sea f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si existe un c en (a, b) en el cual $f'(c) = 0$, ¿se deduce que $f(a) = f(b)$? Explicar la respuesta.

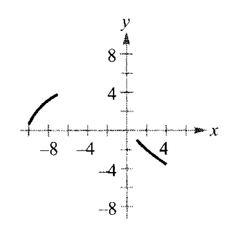
24. ***Para pensar*** Sea f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Supongamos además que $f(a) = f(b)$ y que c es un número de ese intervalo en el cual $f'(c) = 0$. Hallar un intervalo para cada función g en el que sea aplicable el teorema de Rolle y calcular los correspondientes números críticos de g (k denota una constante).

a) $g(x) = f(x) + k$.

b) $g(x) = f(x - k)$.

c) $g(x) = f(kx)$.

25. ***Razonamiento gráfico*** La figura muestra dos fragmentos de la gráfica de una función continua y derivable en $[-10, 4]$. La derivada f' es continua asimismo.



a) Explicar por qué f debe anularse en algún punto de $[-10, 4]$.

b) Explicar por qué f' tiene al menos un cero en ese intervalo. ¿Cómo se llaman estos ceros?

c) Esbozar una posible gráfica de f con un cero de f' en ese intervalo.

d) Esbozar una posible gráfica de f con dos ceros de f' en ese intervalo.

e) ¿Eran necesarias las hipótesis de continuidad de f y f' para contestar los apartados *a*)-*d*)? Explicar la respuesta.

26. Consideremos la función $f(x) = 3 \cos^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

a) Representar en la calculadora f y f'.

b) ¿Es continua f? ¿Y f'?

c) ¿Es aplicable el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$? ¿Y en $[1, 2]$?

d) Evaluar, si ello es posible, $\lim_{x\to 3^-} f'(x)$ y $\lim_{x\to 3^+} f'(x)$.

En los Ejercicios 27-34, aplicar el teorema del valor medio a f en el intervalo indicado. En cada caso, calcular todos los valores de c en (a, b) tales que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

	Función	*Intervalo*
27.	$f(x) = x^2$	$[-2, 1]$
28.	$f(x) = x(x^2 - x - 2)$	$[-1, 1]$
29.	$f(x) = x^{2/3}$	$[0, 1]$
30.	$f(x) = \dfrac{x+1}{x}$	$\left[\frac{1}{2}, 2\right]$
31.	$f(x) = \sqrt{x-2}$	$[2, 6]$
32.	$f(x) = x^3$	$[0, 1]$
33.	$f(x) = \operatorname{sen} x$	$[0, \pi]$
34.	$f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$	$[0, \pi]$

En los Ejercicios 35-38, con ayuda de calculadora *a*) representar *f* en el intervalo indicado, *b*) hallar y dibujar la secante que une los puntos terminales de la gráfica, y *c*) hallar y dibujar las rectas tangentes a la gráfica paralelas a dicha secante.

	Función	*Intervalo*
35.	$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$	$[-\frac{1}{2}, 2]$
36.	$f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$	$[-\pi, \pi]$
37.	$f(x) = \sqrt{x}$	$[1, 9]$
38.	$f(x) = -x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 5$	$[0, 5]$

Redacción En los Ejercicios 39 y 40, explicar por qué no es aplicable el teorema del valor medio a la función en ese intervalo.

39. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ **40.** $f(x) = |x - 3|$

Para pensar En los Ejercicios 41 y 42, esbozar la gráfica de una función *f* que cumpla la condición dada pero que no satisfaga las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[-5, 5]$.

41. *f* es continua en $[-5, 5]$.

42. *f* no es continua en $[-5, 5]$.

43. ***Movimiento vertical*** La altura de un objeto *t* segundos después de dejarlo caer desde una altura de 500 m es $s(t) = -4{,}9t^2 + 500$.

a) Calcular la velocidad media de ese objeto durante los 3 primeros segundos.

b) Verificar, gracias al teorema del valor medio, que en algún momento de esos 3 primeros segundos estaba cayendo a una velocidad igual a la velocidad media antes calculada. ¿En qué instante ocurre eso?

44. ***Ventas*** Una empresa introduce un producto nuevo, del que se venden

$$S(t) = 200\left(5 - \frac{9}{2+t}\right)$$

unidades, donde *t* es el tiempo en meses.

a) Calcular el valor medio de $S(t)$ durante el primer año.

b) ¿En qué mes coincide $S'(t)$ con dicho valor medio?

45. ***Para pensar*** Un avión inicia su despegue a las 2:00 de la tarde para efectuar un vuelo de 2.500 millas. Llega a su destino a las 7:30 de la tarde. Explicar por qué hay al menos dos momentos en los que su velocidad fue 400 millas/h.

46. ***Para pensar*** Cuando un objeto se saca de un horno y se coloca en un ambiente de temperatura 90 °F constante, su temperatura interior es de 1.500 °F. Cinco horas más tarde, ha descendido hasta 390 °F. Explicar por qué ha de haber un momento en el que la temperatura interior estaba decreciendo a un ritmo de 222 °F por hora.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 47-50, discutir si la afirmación es correcta. En caso contrario, explicar la razón o exhibir un ejemplo que muestre su falsedad.

47. El teorema del valor medio es aplicable a $f(x) = 1/x$ en $[-1, 1]$.

48. Si la gráfica de una función tiene tres *x*-intersecciones, debe haber dos puntos al menos en los que su tangente sea horizontal.

49. Si la gráfica de un polinomio tiene tres *x*-intersecciones, debe haber al menos dos puntos en los que su tangente es horizontal.

50. Si $f'(x) = 0$ para todo *x* del dominio de *f*, entonces *f* es una función constante.

51. Demostrar que si $a > 0$ y *n* es cualquier entero positivo, la función polinómica $p(x) = x^{2n+1} + ax + b$ no puede tener dos raíces reales.

52. Probar que si $f'(x) = 0$ para todo *x* en (a, b), entonces *f* es constante en $[a, b]$.

53. Sea $p(x) = Ax^2 + Bx + C$. Demostrar que en cualquier intervalo $[a, b]$ el valor *c* cuya existencia garantiza el teorema del valor medio es el punto medio del intervalo.

54. Probar que si *f* es derivable en $(-\infty, \infty)$ y $f'(x) = < 1$ para todo *x* real, entonces *f* tiene a lo sumo un punto fijo. Un **punto fijo** de una función es un número real *c* tal que $f(c) = c$.

55. Usar el resultado del Ejercicio 54 para probar que $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$ tiene a lo sumo un punto fijo.

56. Demostrar que $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$ para todo *x* y para todo *y*.



3.3 Funciones crecientes y decrecientes y el criterio de la primera derivada

CONTENIDO ▪
Funciones crecientes y decrecientes ▪
El criterio de la primera derivada ▪

Funciones crecientes y decrecientes

En esta sección veremos cómo usar las derivadas con el fin de *clasificar* los extremos relativos como máximos o mínimos. Comenzamos definiendo las funciones crecientes y decrecientes.

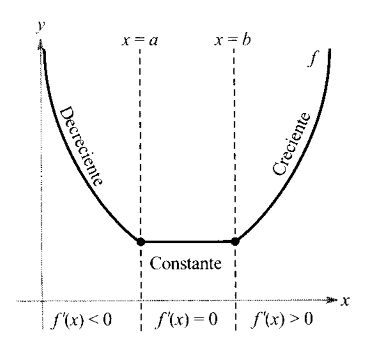


FIGURA 3.15
La derivada está relacionada con la pendiente de la función.

DEFINICIÓN DE FUNCIONES CRECIENTES Y FUNCIONES DECRECIENTES

Una función f es creciente en un intervalo si para cualquier par de números x_1, x_2 del intervalo, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$

Una función f es decreciente en un intervalo si para cualquier par de números x_1, x_2 del intervalo, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$

Una función es creciente si, al movernos por el eje x *hacia la derecha* la gráfica asciende, y decreciente si desciende. Así, la función de la Figura 3.15 es decreciente en $(-\infty, a)$, constante en (a, b) y creciente en (b, ∞). Como establece el próximo teorema, derivada positiva implica función creciente, derivada negativa implica función decreciente, y derivada nula en todo un intervalo implica función constante sobre ese intervalo.

TEOREMA 3.5 CRITERIO DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b).

1. **Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), f es creciente en $[a, b]$.**
2. **Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), f es decreciente en $[a, b]$.**
3. **Si $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b), f es constante en $[a, b]$.**

| Nota. Las conclusiones de los dos primeros casos del Teorema 3.5 mantienen su validez incluso si $f'(x) = 0$ en un número finito de valores x en (a, b).

Demostración: Para demostrar el primer caso, supongamos que $f'(x) > 0$ para todo x del intervalo (a, b) y sean $x_1 < x_2$ dos puntos arbitrarios del intervalo. Por el teorema del valor medio, sabemos que existe algún c tal que $x_1 < c < x_2$, y

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Como $f'(c) > 0$ y $x_2 - x_1 > 0$, sabemos que

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

de donde se deduce que $f(x_1) < f(x_2)$. Así pues, f es creciente en el intervalo. El segundo caso se demuestra de manera análoga (véase Ejercicio 69), y el tercero en el Ejercicio 52 de la Sección 3.2. □

EJEMPLO 1 Intervalos de crecimiento o decrecimiento

Hallar los intervalos abiertos en los que

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

es creciente o decreciente.

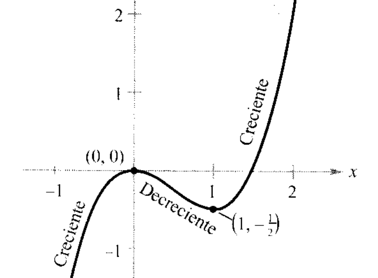


FIGURA 3.16

Solución: Nótese que f es continua en toda la recta real. Con el fin de hallar los números críticos de f, igualamos a cero su derivada.

$$f'(x) = 3x^2 - 3x = 0 \quad \text{Hacer } f'(x) = 0.$$

$$3(x)(x - 1) = 0 \quad \text{Factorizar}$$

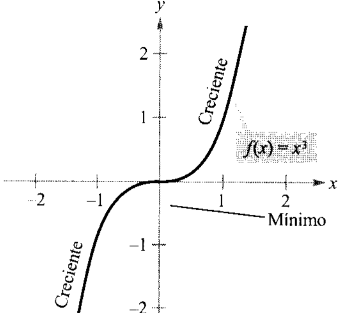
$$x = 0{,}1 \quad \text{Números críticos}$$

Como f' está definida en todos los puntos, los únicos números críticos son x = 0 y $x = 1$. La tabla recoge valores prueba en los intervalos determinados por ellos.

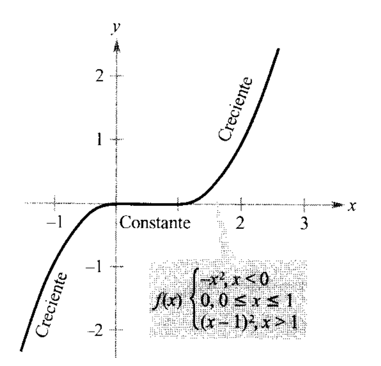
Intervalo	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor prueba	$x = -1$	$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$
Signo de $f'(x)$	$f'(-1) = 6 > 0$	$f'(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4} < 0$	$f'(2) = 6 > 0$
Conclusión	Creciente	Decreciente	Creciente

Así pues, f es creciente en $(-\infty, 0)$ y $(1, \infty)$ y decreciente en (0,1), como confirma la Figura 3.16. □

El Ejemplo 1 enseña cómo buscar los intervalos donde una función es creciente o decreciente. Sus pasos se enuncian en la siguiente estrategia.



a) Función estrictamente monótona



b) No estrictamente monótona

FIGURA 3.17

Estrategia para hallar los intervalos donde una función es creciente o decreciente

Sea f continua en (a, b). Para hallar los intervalos abiertos donde f es creciente o decreciente, seguir los pasos que se indican:

1. Localizar los números críticos de f en (a, b).
2. Evaluar el signo de $f'(x)$ en cada uno de los intervalos que esos números críticos determinan sobre la recta real.
3. Usar el Teorema 3.5 para decidir si f crece o decrece en cada intervalo.

Esta estrategia es válida también si el intervalo (a, b) se sustituye por un intervalo de la forma $(-\infty, b)$, (a, ∞), o $(-\infty, \infty)$.

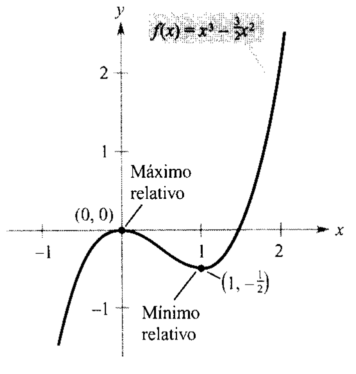


FIGURA 3.18

Una función es **estrictamente monótona** en un intervalo si es creciente o decreciente en todo el intervalo. Por ejemplo, $f(x) = x^3$ es estrictamente monótona en toda la recta real, ya que es creciente en todos sus puntos (Figura 3.17*a*). La función de la Figura 3.17*b* no es estrictamente monótona en toda la recta real, ya que es constante en el intervalo [0, 1].

El criterio de la primera derivada

Una vez conocidos los intervalos de crecimiento o decrecimiento, es fácil localizar los extremos relativos de la función. Así, en la Figura 3.18 del Ejemplo 1, la función

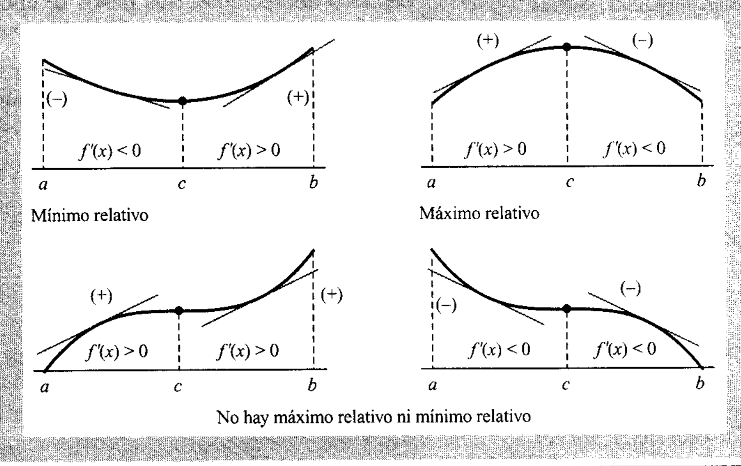
$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

tiene un máximo relativo en el punto (0, 0) porque es creciente inmediatamente a la izquierda de $x = 0$ y decreciente inmediatamente a la derecha. Análogamente, f tiene un mínimo relativo en el punto $(1, -\frac{1}{2})$ porque f es decreciente inmediatamente a la izquierda de $x = 1$ y creciente inmediatamente a su derecha. El próximo teorema enuncia de modo explícito esta observación.

TEOREMA 3.6 EL CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

Sea c un número crítico de una función f continua en un intervalo abierto I que contiene a c. Si f es derivable en ese intervalo, excepto quizás en c, entonces $f(c)$ puede clasificarse así:

1. **Si $f'(x)$ cambia en c de negativa a positiva, $f(c)$ es un mínimo relativo de f.**
2. **Si $f'(x)$ cambia en c de positiva a negativa, $f(c)$ es un máximo relativo de f.**



Demostración: Supongamos que $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c. Entonces existen a y b en I tales que

$$f'(x) < 0 \text{ para todo } x \text{ en } (a, c)$$

y

$$f'(x) > 0 \text{ para todo } x \text{ en } (c, b)$$

Por el Teorema 3.5, f decrece en (a, c) y crece en (c, b). Por tanto, $f(c)$ es un mínimo de f en el intervalo abierto (a, b) y, por consiguiente, un mínimo relativo de f. El segundo caso se demuestra de forma similar (véase Ejercicio 70). □

EJEMPLO 2 Aplicación del criterio de la primera derivada

Hallar los extremos relativos de la función $f(x) = \frac{1}{2}x - \text{sen } x$ en el intervalo $(0, 2\pi)$.

Solución: Nótese que f es continua en el intervalo $(0, 2\pi)$. Para encontrar los números críticos de f igualamos a 0 la derivada.

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x = 0 \qquad \text{Hacer } f'(x) = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \qquad \text{Números críticos}$$

Puesto que no hay puntos en los que f' no esté definida, los únicos números críticos son $x = \pi/3$ y $x = 5\pi/3$. La tabla presenta valores prueba en cada uno de los intervalos determinados en la recta real por esos valores.

Intervalo	$0 < x < \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$
Valor prueba	$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \pi$	$x = \frac{7\pi}{4}$
Signo de $f'(x)$	$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$	$f'(\pi) > 0$	$f'\left(\frac{7\pi}{4}\right) < 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente

Aplicando el criterio de la primera derivada llegamos a la conclusión de que f tiene un mínimo relativo en

$$x = \frac{\pi}{3} \qquad \text{Valor de } x \text{ para el mínimo relativo}$$

y un máximo relativo en

$$x = \frac{5\pi}{3} \qquad \text{Valor de } x \text{ para el máximo relativo}$$

como muestra la Figura 3.19.

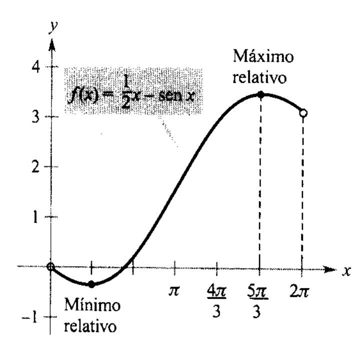


FIGURA 3.19
Un mínimo relativo ocurre cuando f cambia de decreciente a creciente. Un máximo relativo se produce, a su vez, donde f cambia de creciente a decreciente.

EXPLORACIÓN

Comparación de las técnicas gráficas y analíticas En la Sección 3.2 apuntamos que, por sí misma, una calculadora puede dar información gráfica engañosa sobre los extremos relativos. Utilizada *conjuntamente con un estudio analítico* ofrece, sin embargo, una vía eficaz de corroborar nuestras conclusiones. Representar en la calculadora la gráfica del Ejemplo 2. Usar a continuación el *zoom* para estimar los extremos relativos. ¿Cómo son de precisas las aproximaciones gráficas obtenidas?

Las funciones de los Ejemplos 1 y 2 eran derivables en toda la recta real. Para tales funciones, los únicos números críticos son aquellos en que $f'(x) = 0$. El Ejemplo 3 presenta una función que posee los dos tipos de números críticos: unos con $f'(x) = 0$ y otros en los que $f'(x)$ no está definida.

EJEMPLO 3 Aplicando el criterio de la primera derivada

Hallar los extremos relativos de

$$f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$$

Solución: Observemos que f es continua en toda la recta real. Su derivada

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 4)^{-1/3}(2x) \qquad \text{Regla general de las potencias}$$

$$= \frac{4x}{3(x^2 - 4)^{1/3}} \qquad \text{Simplificar}$$

es cero en $x = 0$ y no está definida en $x = 2$. Así pues, los números críticos son $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$. La tabla recoge valores prueba en cada intervalo determinado por ellos.

Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor prueba	$x = -3$	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
Signo de $f'(x)$	$f'(-3) < 0$	$f'(-1) > 0$	$f'(1) < 0$	$f'(3) > 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente

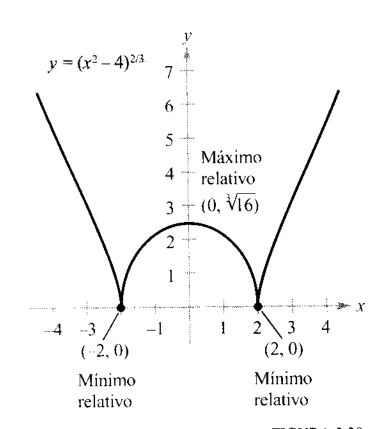


FIGURA 3.20
El criterio de la primera derivada es útil para localizar extremos relativos.

El criterio de la primera derivada asegura que f tiene un mínimo relativo en el punto $(-2, 0)$, un máximo relativo en el punto $(0, \sqrt[3]{16})$ y otro mínimo relativo en el punto $(2, 0)$, como confirma la Figura 3.20.



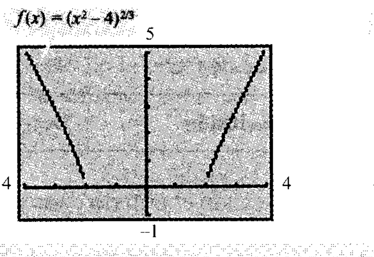
Al representar en la calculadora una función con radicales o exponentes racionales debemos asegurarnos de que la calculadora evalúa expresiones radicales. Así, aunque

$$f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$$

y

$$g(x) = [(x^2 - 4)^2]^{1/3}$$

son algebraicamente la misma, muchas calculadoras distinguen entre ellas. ¿Cuál de las gráficas de la Figura 3.21 es incorrecta? ¿Por qué da la calculadora una gráfica incorrecta?



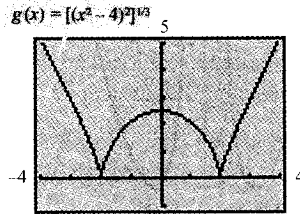


FIGURA 3.21
¿Qué gráfica es incorrecta?

Al usar el criterio de la primera derivada hay que tener cuidado con el dominio de la función. Por ejemplo, en los próximos ejemplos la función

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

no está definida en $x = 0$. Este valor de x debe usarse junto con los números críticos a la hora de determinar los intervalos prueba.

EJEMPLO 4 Aplicación del criterio de la primera derivada

Hallar los extremos relativos de $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$

Solución:

$$f(x) = x^2 + x^{-2} \qquad \text{Reescribir}$$

$$f'(x) = 2x - 2x^{-3} \qquad \text{Derivar}$$

$$= 2x - \frac{2}{x^3}$$

$$= \frac{2(x^4 - 1)}{x^3} \qquad \text{Simplificar}$$

$$= \frac{2(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)}{x^3} \qquad \text{Factorizar}$$

Así pues, $f'(x)$ es cero en $x = \pm 1$. Además, como $x = 0$ no está en el dominio de f, hay que añadir este valor a los números críticos para delimitar los intervalos prueba.

$$x = \pm 1 \qquad \text{Números críticos, } f'(\pm 1) = 0$$

$$x = 0 \qquad 0 \text{ no está en el dominio de } f$$

La tabla resume valores prueba en los intervalos determinados por esos números.

Intervalo	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -2$	$x = -\frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$
Signo de $f'(x)$	$f'(-2) < 0$	$f'(-\frac{1}{2}) > 0$	$f'(\frac{1}{2}) < 0$	$f'(2) > 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente

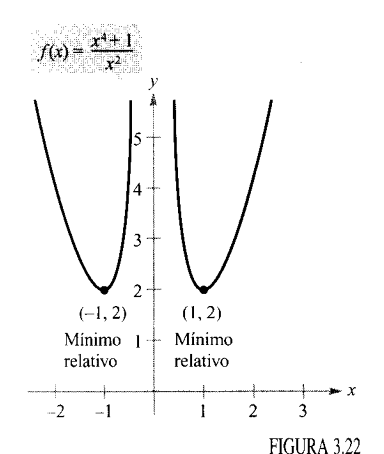


FIGURA 3.22
Los valores de x donde f no está definida, junto con los números críticos, determinan los intervalos prueba de f'.

Aplicando el criterio de la primera derivada concluimos que f tiene un mínimo relativo en el punto (−1, 2) y otro en (1, 2), como muestra la Figura 3.22. □

El paso más difícil al aplicar el criterio de la primera derivada es el de hallar los valores que anulan la derivada. Por ejemplo, los valores de x donde la derivada de

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$$

es igual a cero son 0 y $\pm\sqrt{\sqrt{2} - 1}$. Si dispone de la posibilidad de derivación simbólica, intente aplicar el criterio a esta función.

EJEMPLO 5 Trayectoria de un proyectil

Si un proyectil se lanza desde el nivel del suelo, y la resistencia del aire es despreciable, el objeto llegará más lejos si se lanza con un ángulo de 45°. Pero si se lanza desde un punto más alto que el suelo, el ángulo que da máximo alcance ya no es 45° (véase Ejemplo 5).

Despreciando la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil lanzado con ángulo θ es

$$y = \frac{g \sec^2\theta}{2v_0^2}x^2 + (\text{tg } \theta)x + h, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

donde y es la altura, x la distancia horizontal, g la aceleración de la gravedad, v_0 la velocidad inicial y h la altura inicial. (Esta ecuación se deduce en la Sección 11.3.) Sean $g = -32$ pies/s^2, $v_0 = 24$ pies/s y $h = 9$ pies. ¿Para qué valor de θ se logra el máximo alcance horizontal?

Solución: Para calcular la distancia recorrida por el proyectil hacemos $y = 0$ y usamos la fórmula cuadrática para despejar x.

$$\frac{g \sec^2\theta}{2v_0^2}x^2 + (\text{tg } \theta)x + h = 0$$

$$\frac{-32 \sec^2\theta}{2(24^2)}x^2 + (\text{tg } \theta)x + 9 = 0$$

$$-\frac{\sec^2 \theta}{36}x^2 + (\text{tg } \theta)x + 9 = 0$$

$$x = \frac{-\text{tg } \theta \pm \sqrt{\text{tg}^2 \theta + \sec^2 \theta}}{-\sec^2 \theta/18}$$

$$x = 18 \cos \theta(\text{sen } \theta + \sqrt{\text{sen}^2 + 1}), \qquad x \geqslant 0$$

Ahora deseamos encontrar el valor de θ que produce el máximo valor de x. Aplicar el criterio de la primera derivada sería engorroso. La calculadora permite resolver la ecuación $dx/d\theta = 0$ sin dificultad. El resultado es que ese máximo ocurre para

$$\theta \approx 0{,}61548 \text{ radianes, o sea } 35{,}3°$$

Esta conclusión queda confirmada esbozando las gráficas de varias trayectorias para distintos valores del ángulo θ, como muestra la Figura 3.23. De las tres dibujadas es claro que el mayor alcance se consigue para $\theta = 35°$.

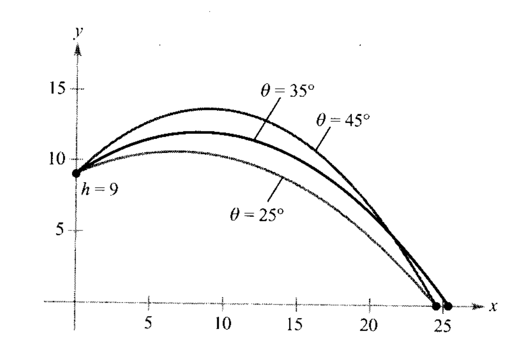
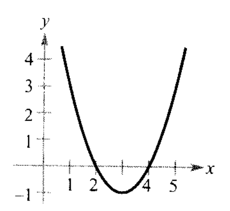


FIGURA 3.23
Trayectoria de un proyectil con ángulo inicial θ.

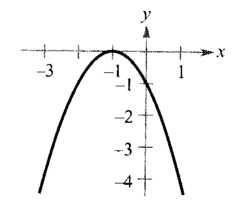
Ejercicios de la Sección 3.3

En los Ejercicios 1-6, identificar los intervalos abiertos en los que la función es creciente o decreciente.

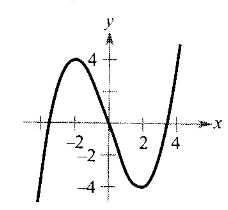
1. $f(x) = x^2 - 6x + 8$



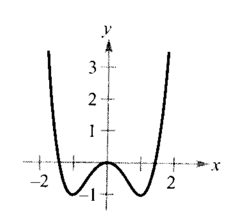
2. $y = -(x + 1)^2$



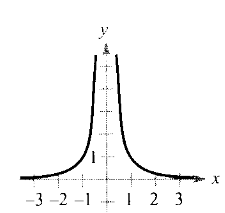
3. $y = \frac{x^3}{4} - 3x$



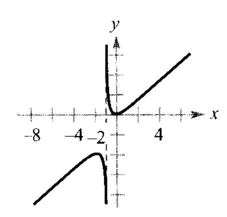
4. $f(x) = x^4 - 2x^2$



5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$



6. $y = \dfrac{x^2}{x + 1}$



En los Ejercicios 7-20, hallar los números críticos de f, si los hay, los intervalos abiertos de crecimiento o decrecimiento de la función algebraica y localizar los extremos relativos.

7. $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$

8. $f(x) = x^2 + 8x + 10$

9. $f(x) = x^2 - 6x$

10. $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$

11. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

12. $f(x) = (x - 3)^3$

13. $f(x) = \dfrac{x^5 - 5x}{5}$

14. $f(x) = x^4 - 32x + 4$

15. $f(x) = x^{1/3} + 1$

16. $f(x) = x^{2/3}(x - 5)$

17. $f(x) = 5 - |x - 5|$

18. $f(x) = |x + 3| - 1$

19. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$

20. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x^2}$

En los Ejercicios 21-28, hallar los intervalos abiertos en los que la función es creciente o decreciente y localizar los extremos relativos. Comprobar los resultados representando las gráficas en la calculadora.

21. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$

22. $f(x) = x^4 - 2x^3$

23. $f(x) = (x - 1)^{2/3}$

24. $f(x) = (x - 1)^{1/3}$

25. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

26. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

27. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}$

En los Ejercicios 29-32, considérese la función trigonométrica dada sobre el intervalo $(0, 2\pi)$. Hallar los intervalos abiertos en los que la función es creciente o decreciente y localizar los extremos relativos. Comprobar los resultados representando las gráficas en la calculadora.

29. $f(x) = \dfrac{x}{2} + \cos x$

30. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$

31. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x$

32. $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$

En los Ejercicios 33-36, *a*) usar derivación simbólica en la calculadora para derivar f, *b*) dibujar las gráficas de f y f' en unos mismos ejes en ese intervalo, *c*) hallar los números críticos de f en el intervalo abierto, y *d*) hallar los intervalos en los que f' es positiva y en los que es negativa. Comparar el comportamiento de f y el signo de f'.

	Función	*Intervalo*
33.	$f(x) = 2x\sqrt{9 - x^2}$	$[-3, 3]$
34.	$f(x) = 10(5 - \sqrt{x^2 - 3x + 16})$	$[0, 5]$
35.	$f(x) = t^2 \operatorname{sen} t$	$[0, 2\pi]$
36.	$f(x) = \dfrac{x}{2} + \cos \dfrac{x}{2}$	$[0, 4\pi]$

Para pensar En los Ejercicios 37-42, suponemos que f es derivable en todo x. El signo de f' es como sigue:

$f'(x) > 0$ en $(-\infty, -4)$

$f'(x) < 0$ en $(-4, 6)$

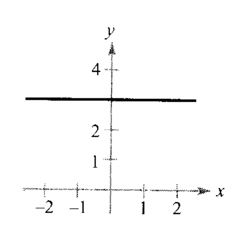
$f'(x) > 0$ en $(6, \infty)$

Colocar la desigualdad apropiada para el valor de c que se especifica.

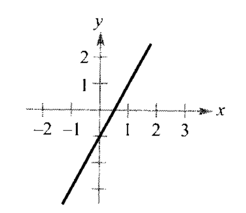
	Función	*Signo de $g'(c)$*
37.	$g(x) = f(x) + 5$	$g'(0)$ ▒ 0
38.	$g(x) = 3f(x) - 3$	$g'(-5)$ ▒ 0
39.	$g(x) = -f(x)$	$g'(-6)$ ▒ 0
40.	$g(x) = -f(x)$	$g'(0)$ ▒ 0
41.	$g(x) = f(x - 10)$	$g'(0)$ ▒ 0
42.	$g(x) = f(x - 10)$	$g'(8)$ ▒ 0

Para pensar En los Ejercicios 43-48, se muestra una función f. Dibujar la gráfica de f'.

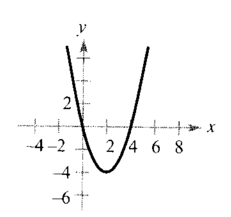
43.



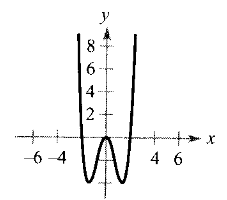
44.



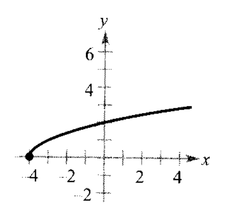
45.



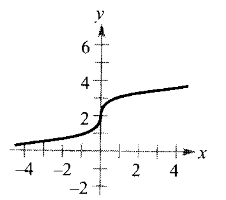
46.



47.



48.



49. ***Para pensar*** Esbozar la gráfica de una función f tal que

$$f'(x)\begin{cases} > 0, & x < 4 \\ \text{no definido}, & x = 4 \\ < 0, & x > 4 \end{cases}$$

50. ***Para pensar*** Una función derivable f tiene un número crítico en $x = 5$. Identificar los extremos relativos de f en ese punto, sabiendo que $f'(4) = -2{,}5$ y $f'(6) = 3$.

51. ***Para pensar*** La función f es derivable en el intervalo $[-1, 1]$. La tabla da los valores de f' en ciertos valores de x. Esbozar la gráfica de f, aproximar sus números críticos e identificar sus extremos relativos.

x	-1	$-0{,}75$	$-0{,}50$	$-0{,}15$
$f'(x)$	-10	$-3{,}2$	$-0{,}5$	$0{,}8$

x	0	0,25	0,50	0,75	1
$f'(x)$	5,6	3,2	$-0{,}2$	$-6{,}7$	$-20{,}1$

52. ***Una bola que rueda*** Se coloca una bola en un plano inclinado, de ángulo de inclinación θ, y comienza a rodar. La distancia (en metros) recorrida por la bola en t segundos es $s(t) = 4{,}9\ (\text{sen}\ \theta)t^2$.

a) Determinar la velocidad de la bola.

b) ¿Qué valor de θ produce la máxima velocidad en un instante concreto?

53. ***Estudio numérico, gráfico y analítico*** Consideremos las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \text{sen}\ x$ en el intervalo $(0, \pi)$.

a) Completar la tabla y formular una conjetura sobre cuál de las funciones es mayor en el intervalo $(0, \pi)$.

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$						
$g(x)$						

b) Representar en una calculadora las gráficas y formular, a la vista de ellas, una conjetura acerca de qué función es mayor en $(0, \pi)$.

c) Probar que $f(x) > g(x)$ en $(0, \pi)$. [*Ayuda:* Demostrar que $h'(x) > 0$, donde $h = f - g$.]

54. ***Estudio numérico, gráfico y analítico*** La concentración C de un fármaco en el flujo sanguíneo t horas después de ser inyectado por vía intramuscular es

$$C = \frac{3t}{27 + t^3}, \quad t \geqslant 0$$

a) Completar la tabla y estimar el momento en el que C es máxima.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$							

b) Representar en la calculadora la función $C(t)$ y usar la gráfica para aproximar el tiempo en el que la concentración es máxima.

c) Determinar analíticamente, utilizando el Cálculo, ese momento.

55. ***Contracción de la tráquea*** Al estornudar, la tráquea se contrae, lo cual afecta a la velocidad v del aire que pasa por ella. Supongamos que la velocidad del aire durante un estornudo es

$$v = k(R - r)r^2, \quad 0 \leqslant r < R$$

donde k es una constante, R el radio normal de la tráquea y r el radio durante el estornudo. ¿Qué radio produce la máxima velocidad del aire?

56. ***Beneficios*** El beneficio P (en dólares) de un restaurante de comida rápida al vender x hamburguesas viene dado por

$$P = 2{,}44x - \frac{x^2}{20.000} - 5.000, \quad 0 \leqslant x \leqslant 35.000$$

Hallar los intervalos abiertos en los que P es creciente o decreciente.

57. ***Potencia*** La potencia eléctrica (en vatios) en un circuito de corriente continua con dos resistencias R_1 y R_2, conectadas en serie, es

$$P = \frac{vR_1R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$

donde v es el voltaje. Si v y R_1 se mantienen constantes, ¿qué resistencia R_2 produce la máxima potencia?

58. ***Resistencia eléctrica*** La resistencia de cierto tipo de material es

$$R = \sqrt{0{,}001T^4 - 4T + 100}$$

donde R se mide en ohmios y la temperatura T en grados Celsius.

a) Calcular, usando derivación simbólica, dR/dT y los números críticos de la función. Determinar la resistencia mínima para ese tipo de material.
b) Representar en la calculadora la gráfica de R y usar esa gráfica para estimar la resistencia mínima de ese material.

59. ***Un modelo matemático*** El número (en miles) de quiebras en EE.UU. durante los años 1981 a 1994 queda recogido en la tabla.

1981; 360,3; 1982: 367,9; 1983: 374,7; 1984: 344,3;
1985: 364,5; 1986: 477,9; 1987: 561,3; 1988: 594,6
1989: 643,0; 1990: 725,5; 1991: 880,4; 1992: 972,5
1993: 918,7; 1994: 845,3

(*Fuente: Administrative Office of the U.S. Courts.*)

a) Usar regresión en la calculadora para establecer un modelo del tipo

$$B = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$$

que ajuste esos datos. (Tomar $t = 1$ como 1981.)
b) Representar en la calculadora los datos y el modelo.
c) Hallar analíticamente el máximo del modelo y compararlo con el resultado de los datos reales.

60. Representar en la calculadora $f(x) = 2 \operatorname{sen} 3x + 4 \cos 3x$. Calcular el máximo valor de f. ¿Cómo se podría estimar ese valor máximo mediante el Cálculo?

Funciones polinómicas En los Ejercicios 61-64, encontrar una función polinómica

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

que tenga sólo los extremos especificados. *a*) Determinar el grado mínimo de la función y formular los criterios utilizados para hallarlo. *b*) Utlizando el hecho de que las coordenadas de los extremos son puntos solución de la función y que las coordenadas x son números críticos, dar un sistema de ecuaciones lineales cuya solución proporcione los coeficientes de la función requerida. *c*) Usar la calculadora para resolver ese sistema y hallar la función. *d*) Confirmar los resultados gráficamente en la calculadora.

61. Mínimo relativo: (0, 0); Máximo relativo: (2, 2)

62. Mínimo relativo: (0, 0); Máximo relativo: (4, 1.000)

63. Mínimos relativos: (0, 0), (4, 0); Máximo relativo: (2, 4)

64. Mínimo relativo: (1, 2); Máximos relativos: (−1, 4), (3, 4)

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 65-68, discutir si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar por qué o exhibir un ejemplo que muestre su falsedad.

65. La suma de dos funciones crecientes es creciente.

66. El producto de dos funciones crecientes es creciente.

67. Todo polinomio de grado n tiene $n - 1$ números críticos.

68. Un polinomio de grado n tiene a lo sumo $n - 1$ números críticos.

69. Demostrar el segundo caso del Teorema 3.5.

70. Demostrar el segundo caso del Teorema 3.6.

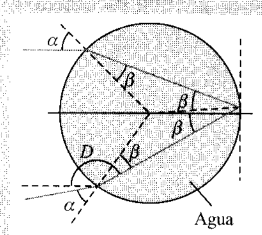
71. Sean $x > 0$ y $n > 1$ dos números reales. Probar que $(1 + x)^n > 1 + nx$.

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

Arco iris El arco iris se forma cuando la luz atraviesa las gotas de lluvia, sufriendo reflexión y refracción, como muestra la figura (en la que vemos una sección de una gota esférica). La ley de la refracción establece que (sen α)/(sen β) = k, donde $k \approx 1{,}33$. El ángulo de desviación viene dado por $D = \pi + 2\alpha - 4\beta$.

a) Esbozar la gráfica de D para $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$. Usar una calculadora con

$$D = \pi + 2\alpha - 4\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{k}\,\text{sen}\,\alpha\right)$$



b) Probar que el ángulo de desviación mínimo ocurre cuando

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{3}}$$

Para el agua, ¿cuál es ese ángulo de desviación mínimo? (El ángulo $\pi - D_{\text{min}}$ se llama ángulo del arco iris.) ¿Qué valor de α produde ese ángulo mínimo? (Un rayo que atraviesa una gota con ese ángulo se llama un rayo de arco iris.)

PARA MÁS INFORMACIÓN Véase el artículo «Somewhere Within the Rainbow» de Steven Janke en *UMAP Journal*, volumen 13, número 2, 1992.

3.4 Concavidad y el criterio de la segunda derivada

CONTENIDO ▪
Concavidad ▪
Puntos de inflexión ▪
El criterio de la segunda derivada ▪

Concavidad

Ya hemos visto que el conocimiento de los intervalos en que una función es creciente o decreciente ayuda a describir su gráfica. Ahora aprenderemos que los intervalos en los que f' crece o decrece ayudan a saber dónde *se curva hacia arriba o hacia abajo* la gráfica de f.

DEFINICIÓN DE CONCAVIDAD

Sea f derivable en un intervalo abierto I. La gráfica de f es **cóncava hacia arriba** en I si f' es creciente en ese intervalo y **cóncava hacia abajo** en I si f' es decreciente en él.

La interpretación gráfica de la concavidad que presentamos a continuación es muy útil (véase en el apéndice la demostración de estos resultados).

1. Sea f derivable en c. Si la gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(c, f(c))$, la gráfica queda *por encima* de la recta tangente en $(c, f(c))$ en algún intervalo abierto que contiene a c (véase Figura 3.24*a*).
2. Sea f derivable en c. Si la gráfica de f es cóncava hacia abajo en $(c, f(c))$, la gráfica queda *por debajo* de la recta tangente en $(c, f(c))$ en algún intervalo abierto que contiene a c (véase Figura 3.24*b*).

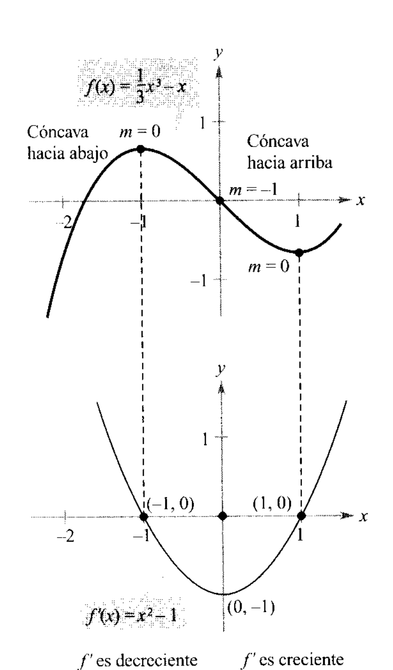
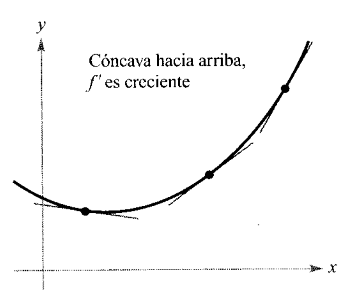
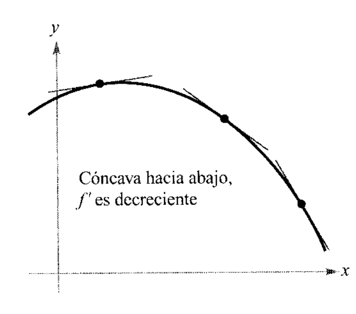


FIGURA 3.25
La concavidad de f está relacionada con la pendiente de f'.



a) La gráfica de f queda por encima de su recta tangente



b) La gráfica de f queda por debajo de su recta tangente

FIGURA 3.24

Para hallar los intervalos abiertos en los que la gráfica es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo, necesitamos conocer los intervalos en los que f' es creciente o decreciente. Por ejemplo, la gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$$

es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ porque $f'(x) = x^2 - 1$ es decreciente allí (véase Figura 3.25). Análogamente, la gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$ porque f' es creciente en ese intervalo.

El próximo teorema enseña cómo usar la segunda derivada con el fin de determinar los intervalos sobre los cuales la gráfica es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo. Su demostración se sigue directamente del Teorema 3.5 y de la definición de concavidad.

TEOREMA 3.7 CRITERIO DE CONCAVIDAD

Sea f una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto I.

1. **Si $f''(x) > 0$ para todo x en I, la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I.**
2. **Si $f''(x) < 0$ para todo x en I, la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I.**

| Nota. Un tercer caso podría ser $f''(x) = 0$ para todo x en I, de modo que f sería lineal. Nótese, sin embargo, que la concavidad no está definida para una recta. En otras palabras, una recta no es cóncava hacia arriba ni tampoco cóncava hacia abajo.

Para aplicar este teorema, hay que localizar los x en los que $f''(x) = 0$ o en los que $f''(x)$ no esté definida. Finalmente, ensayar el signo de $f''(x)$ en cada uno de los intervalos prueba.

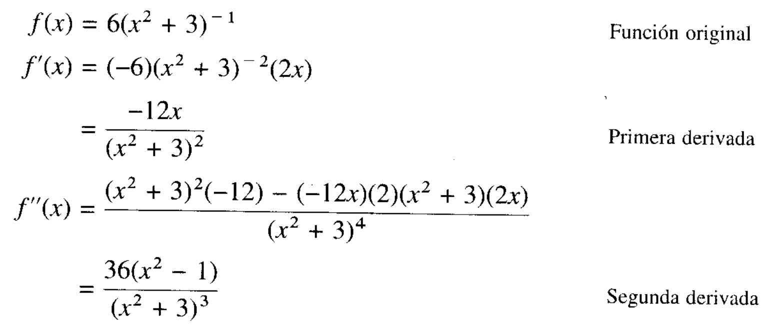
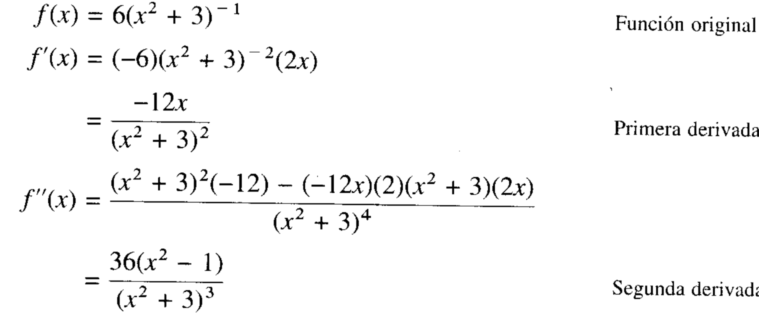
EJEMPLO 1 Investigando la concavidad

Determinar los intervalos abiertos en los que la gráfica de

$$f(x) = 6(x^2 + 3)^{-1}$$

es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

Solución: Observemos, antes de nada, que f es continua en toda la recta real. A continuación, hallemos la segunda derivada de f.

$$f(x) = 6(x^2 + 3)^{-1} \qquad \text{Función original}$$

$$f'(x) = (-6)(x^2 + 3)^{-2}(2x)$$

$$= \frac{-12x}{(x^2 + 3)^2} \qquad \text{Primera derivada}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2 + 3)^2(-12) - (-12x)(2)(x^2 + 3)(2x)}{(x^2 + 3)^4}$$

$$= \frac{36(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3} \qquad \text{Segunda derivada}$$

FIGURA 3.26
Del signo de f'' podemos deducir la concavidad de la gráfica de f.

Como $f''(x) = 0$ en $x = \pm 1$ y $f''(x)$ está definida en toda la recta real, hemos de ensayar valores de f'' en los intervalos $(-\infty, -1)$, y $(-1, \infty)$. Los resultados aparecen en la tabla y en la Figura 3.26.

Intervalo	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor prueba	$x = -2$	$x = 0$	$x = 2$
Signo de $f''(x)$	$f''(-2) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(2) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

□

La función del Ejemplo 1 es continua en toda la recta real. Si hubiera valores de x donde la función no fuera continua, habría que añadirlos a los x que cumplen $f''(x) = 0$ a la hora de delimitar los intervalos prueba.

EJEMPLO 2 Investigando la concavidad

Hallar los intervalos abiertos en los que la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} \qquad \text{Función original}$$

es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Solución:

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 4)(2x) - (x^2 + 1)(2x)}{(x^2 - 4)^2} \qquad \text{Primera derivada}$$

$$= \frac{-10x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 4)^2(-10) - (-10x)(2)(x^2 - 4)(2x)}{(x^2 - 4)^4}$$

$$= \frac{10(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3} \qquad \text{Segunda derivada}$$

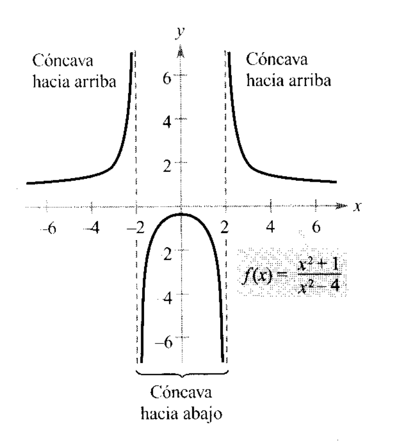


FIGURA 3.27

No hay puntos en los que $f''(x) = 0$, pero en $x = \pm 2$ la función no es continua, así que hemos de investigar la concavidad en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, \infty)$, como muestra la tabla. La gráfica aparece en la Figura 3.27.

Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor prueba	$x = -3$	$x = 0$	$x = 3$
Signo de $f''(x)$	$f''(-3) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(3) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Puntos de inflexión

La gráfica de la Figura 3.26 no tiene puntos en los que la concavidad cambia de sentido. Si en un punto así existe recta tangente, se dice que es un **punto de inflexión**. La Figura 3.28 muestra tres tipos diferentes de puntos de inflexión. Nótese que una gráfica cruza la recta tangente en un punto de inflexión.

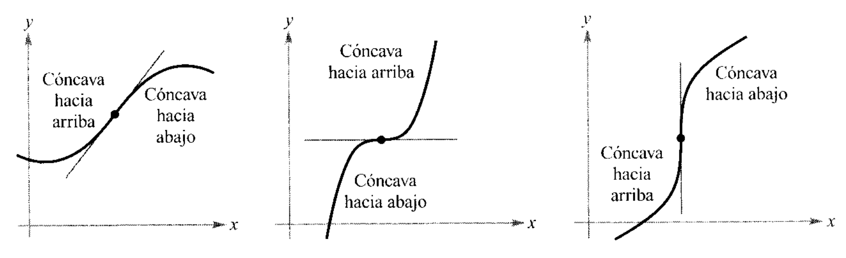


FIGURA 3.28
La concavidad de f cambia en un punto de inflexión.

Para localizar los posibles puntos de inflexión basta determinar los valores de x donde $f''(x) = 0$ y aquellos en que $f''(x)$ no está definida. El procedimiento es, por tanto, análogo al empleado para buscar los extremos de f.

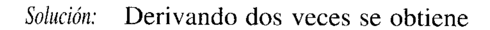
TEOREMA 3.8 PUNTOS DE INFLEXIÓN

Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces o bien $f''(c) = 0$ o $f''(x)$ no está definida en $x = c$.

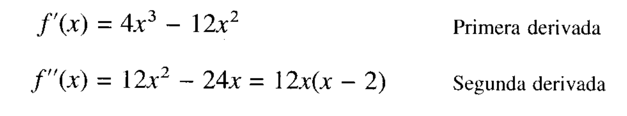
EJEMPLO 3 Búsqueda de los puntos de inflexión

Hallar los puntos de inflexión y discutir la concavidad de la gráfica de

$$f(x) = x^4 - 4x^3 \qquad \text{Función original}$$



Solución: Derivando dos veces se obtiene



$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \qquad \text{Primera derivada}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2) \qquad \text{Segunda derivada}$$

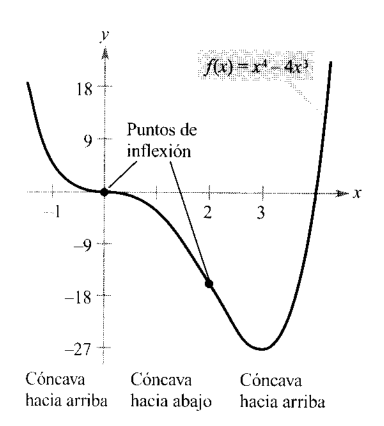


FIGURA 3.29
Los puntos de inflexión pueden ocurrir donde $f''(x) = 0$ y donde $f''(x)$ no está definida.

Los posibles puntos de inflexión pueden ocurrir en $x = 0$ y en $x = 2$. Probando en los intervalos limitados por esos puntos, concluimos que ambos son puntos de inflexión. La tabla recoge los valores prueba y la Figura 3.29 muestra la gráfica de f.

Intervalo	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor prueba	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
Signo de $f''(x)$	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(3) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia abajo

□

FIGURA 3.30
$f''(0) = 0$, pero $(0, 0)$ *no* es un punto de inflexión.

Puede suceder que la segunda derivada sea cero en un punto que *no* es punto de inflexión. Así, la gráfica de $f(x) = x^4$ (véase Figura 3.30) tiene en $x = 0$ segunda derivada nula, pero $(0, 0)$ no es punto de inflexión, ya que la gráfica es cóncava hacia arriba en ambos intervalos, $-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty$.

EXPLORACIÓN

Consideremos la función cúbica general

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

El valor de d afecta a la situación de la gráfica, pero no al valor de la primera derivada. Gráficamente, eso se refleja en el hecho de que al modificar el valor de d, la gráfica se desplaza arriba o abajo sin que su pendiente cambie. Representar en la calculadora varias de esas funciones para diferentes valores de c y explicar por qué los cambios en c no afectan a la segunda derivada.

El criterio de la segunda derivada

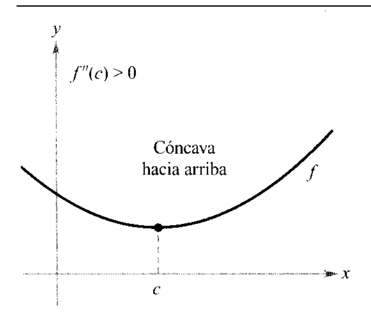
Además de para analizar la concavidad, la segunda derivada sirve para efectuar un sencillo test sobre los máximos y mínimos relativos. Se basa en el hecho de que si una gráfica es cóncava hacia arriba en un intervalo abierto que contiene a c, y $f'(c) = 0$, $f(c)$ ha de ser un mínimo relativo de f. Del mismo modo, si la gráfica de f es cóncava hacia abajo en un intervalo abierto que contiene a c, y $f'(c) = 0$, entonces $f(c)$ es necesariamente un máximo relativo de f (véase Figura 3.31).

TEOREMA 3.9 CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

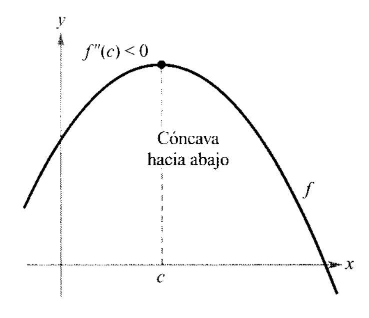
Sea f una función tal que $f'(c) = 0$ y cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto que contiene a c.

1. **Si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.**
2. **Si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un máximo relativo.**

Si $f''(c) = 0$, este criterio no decide y ha de recurrirse al criterio de la primera derivada.



Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, $f(c)$ es un mínimo relativo.



Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, $f(c)$ es un máximo relativo.

FIGURA 3.31

Demostración: Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, existe un intervalo abierto I, que contiene a c, en el cual

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \frac{f'(x)}{x - c} > 0$$

para todo $x \neq c$ en I. Si $x < c$, entonces $x - c < 0$ y $f'(x) < 0$. Asimismo, si $x > c$ es $x - c > 0$ y $f'(x) > 0$. Por tanto, $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c, y el criterio de la primera derivada asegura que $f(c)$ es un mínimo relativo. El segundo caso se demuestra de forma análoga y se deja al cuidado del lector. □

EJEMPLO 4 Aplicación del criterio de la segunda derivada

Hallar los extremos relativos de $f(x) = -3x^5 + 5x^3$.

Solución: Para empezar, hallamos los números críticos de f.

$$f'(x) = -15x^4 + 15x^2 = 15x^2(1 - x^2) = 0 \qquad \text{Hacer } f'(x) = 0$$

$$x = -1, 0, 1 \qquad \text{Números críticos}$$

Usando $f''(x) = -60x^3 + 30x = 30(-2x^3 + x)$, podemos aplicar el criterio de la segunda derivada como sigue.

Punto	*Signo de f''*		*Conclusión*
$(-1, -2)$	$f''(-1) = 30 > 0$	⇨	Mínimo relativo
$(1, 2)$	$f''(1) = -30 < 0$	⇨	Máximo relativo
$(0, 0)$	$f''(0) = 0$	⇨	El criterio no decide

$f(x) = -3x^5 + 5x^3$

Máximo relativo $(1, 2)$

$(0, 0)$

$(-1, -2)$ Mínimo relativo

FIGURA 3.32

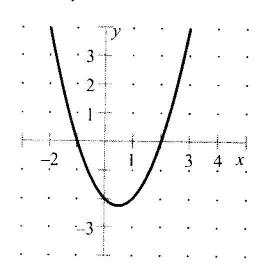
$(0, 0)$ no es ni máximo relativo ni mínimo relativo.

Puesto que el criterio de la segunda derivada no decide en el punto $(0, 0)$, utilizamos el de la primera derivada. Como f crece a la izquierda y a la derecha de $x = 0$, $(0, 0)$ no es ni máximo ni mínimo relativo (aunque la recta tangente es horizontal en él). La gráfica de f se muestra en la Figura 3.32. □

Ejercicios de la Sección 3.4

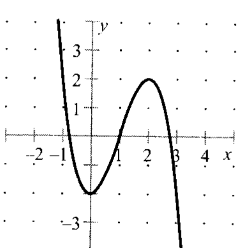
En los Ejercicios 1-6, hallar los intervalos abiertos en los que la gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

1. $y = x^2 - x - 2$



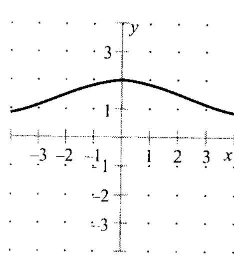
Dibujado con Derive

2. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$

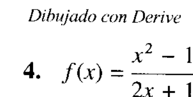


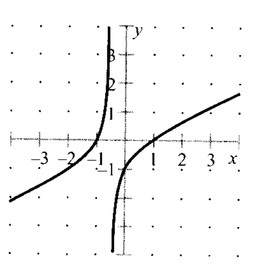
Dibujado con Derive

3. $f(x) = \dfrac{24}{x^2 + 12}$



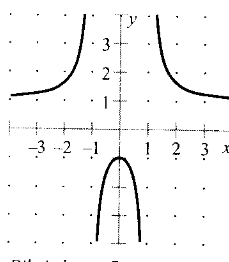
Dibujado con Derive

4.  $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x + 1}$



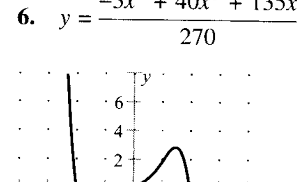
Dibujado con Derive

5. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$



Dibujado con Derive

6. $y = \dfrac{-3x^5 + 40x^3 + 135x}{270}$



Dibujado con Derive

En los Ejercicios 7-20, hallar todos los extremos relativos. Usar el criterio de la segunda derivada cuando sea aplicable.

7. $f(x) = 6x - x^2$

8. $f(x) = x^2 + 3x - 8$

9. $f(x) = (x - 5)^2$

10. $f(x) = -(x - 5)^2$

11. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

12. $f(x) = 5 + 3x^2 - x^3$

13. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$

14. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x$

15. $f(x) = x^{2/3} - 3$

16. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

17. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$

18. $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

19. $f(x) = \cos x - x$
$0 \leqslant x \leqslant 4\pi$

20. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$
$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

En los Ejercicios 21-36, hallar los extremos relativos y los puntos de inflexión. Representar la gráfica en la calculadora.

21. $f(x) = x^3 - 12x$

22. $f(x) = x^3 + 1$

23. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$

24. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

25. $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2$

26. $f(x) = 2x^4 - 8x + 3$

27. $f(x) = x(x - 4)^3$

28. $f(x) = x^3(x - 4)$

29. $f(x) = x\sqrt{x + 3}$

30. $f(x) = x\sqrt{x + 1}$

31. $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$
$0 \leqslant x \leqslant 4\pi$

32. $f(x) = 2 \operatorname{cosec} \dfrac{3x}{2}$
$0 < x < 2\pi$

33. $f(x) = \sec\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
$0 < x < 4\pi$

34. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$
$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

35. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$
$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

36. $f(x) = x - \operatorname{sen} x$
$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

En los Ejercicios 37-40, analizar la función en el intervalo indicado, usando derivación simbólica en la calculadora. *a*) Hallar la primera y segunda derivada de la función. *b*) Localizar los extremos relativos y los puntos de inflexión. *c*) Representar f, f' y f'' en unos mismos ejes y establecer la relación entre el comportamiento de f y los signos de f' y f''.

37. $f(x) = 0{,}2x^2(x - 3)^3$, $[-1, 4]$

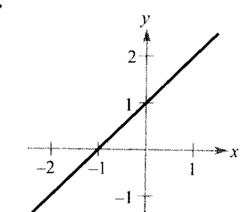
38. $f(x) = x^2\sqrt{6 - x^2}$, $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$

39. $f(x) = \operatorname{sen} x - \dfrac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + \dfrac{1}{5} \operatorname{sen} 5x$, $[0, \pi]$

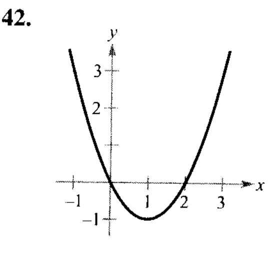
40. $f(x) = \sqrt{2x} \operatorname{sen} x$, $[0, 2\pi]$

Para pensar En los Ejercicios 41-44, dada la gráfica de f, dibujar las de f' y f''.

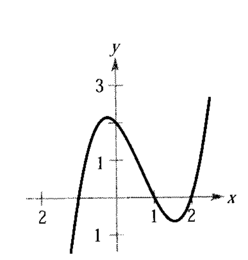
41.



42.



43.



44.

45. ***Para pensar*** Consideremos una función f tal que f' es creciente. Esbozar gráficas de f para las que *a*) $f' < 0$ y *b*) $f' > 0$.

46. ***Para pensar*** Consideremos una función f tal que f' es decreciente. Esbozar gráficas de f para las que *a*) $f' < 0$ y *b*) $f' > 0$.

Para pensar En los ejercicios 47-50, esbozar la gráfica de una función f con las características que se especifican.

47. $f(2) = f(4) = 0$
$f(3)$ está definido
$f'(x) < 0$ si $x < 3$
$f'(3)$ no está definido
$f'(x) > 0$ si $x > 3$
$f''(x) < 0,\ x \neq 3$

48. $f(0) = f(2) = 0$
$f'(x) > 0$ si $x < 1$
$f'(1) = 0$
$f'(x) < 0$ si $x > 1$
$f''(x) < 0$

49. $f(2) = f(4) = 0$
$f'(x) > 0$ si $x < 3$
$f'(3)$ no está definido
$f'(x) < 0$ si $x > 3$
$f''(x) > 0,\ x \neq 3$

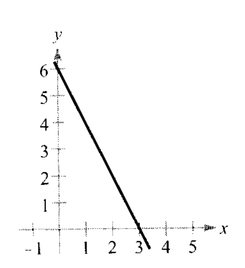
50. $f(0) = f(2) = 0$
$f'(x) < 0$ si $x < 1$
$f'(1) = 0$
$f'(x) > 0$ si $x > 1$
$f''(x) > 0$

En los Ejercicios 51 y 52, hallar *a, b, c* y *d* tales que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ satisfaga las condiciones requeridas.

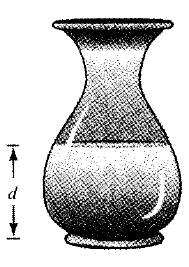
51. Máximo relativo en (3, 3)
Mínimo relativo en (5, 1)
Punto de inflexión en (4, 2)

52. Máximo relativo en (2, 4)
Mínimo relativo en (4, 2)
Punto de inflexión en (3, 3)

53. ***Para pensar*** La figura muestra la gráfica de la segunda derivada de una función f. Esbozar la gráfica de f (la respuesta no es única).



54. ***Para pensar*** Se está vertiendo agua en el jarrón de la figura a ritmo constante.
a) Esbozar la gráfica de la profundidad d que va ocupando el agua en función del tiempo t.
b) ¿Tiene extremos esa función? Explicar la respuesta.
c) Dar una interpretación de los puntos de inflexión de la gráfica de d.



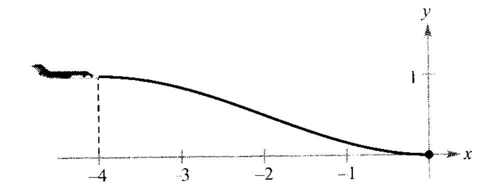
55. ***Conjetura*** Sea $f(x) = (x - 2)^n$
a) Representar en la calculadora f para $n = 1, 2, 3$ y 4. Usar esas gráficas para formular una conjetura sobre la relación entre n y los puntos de inflexión de la gráfica de f.
b) Verificar la conjetura en el apartado *a*).

56. *a*) Representar $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e identificar los puntos de inflexión.
b) ¿Existe $f''(x)$ en los puntos de inflexión?

57. ***Para pensar*** S denota las ventas semanales de un producto. ¿Qué se puede decir de S' y de S'' en las siguientes circunstancias?
a) El ritmo de ventas crece.
b) Las ventas crecen a menor ritmo.
c) El ritmo de cambio de las ventas es constante.
d) Las ventas se mantienen estables.
e) Las ventas bajan, pero a menor ritmo.
f) Las ventas han tocado fondo y empiezan a crecer.

58. ***Para pensar*** Esbozar la gráfica de una función que *no* tenga punto de inflexión en $(c, f(c))$ a pesar de que $f''(c) = 0$.

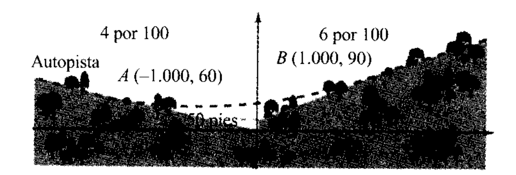
59. ***Aterrizaje*** Un avión desciende desde 1 milla de altitud y desde un punto situado a 4 millas de la pista de aterrizaje (véase figura).
a) Hallar la función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que describe, en el intervalo $[-4, 0]$, una trayectoria suave del aterrizaje.
b) Con ese modelo para la trayectoria, ¿en qué momento descendería más rápidamente el avión?



PARA MÁS INFORMACIÓN Véase el artículo «How not to Land at Lake Tahoe!», de Richard Barshinger en *The American Mathematical Monthly*, mayo 1992.

60. ***Diseño de autopistas*** Una autopista debe unir dos laderas de 6 por 100 y 4 por 100 de pendiente, entre dos puntos separados por una distancia horizontal de 2.000 pies (véase figura). En el punto de confluencia de las laderas quedará una altura de 50 pies.

a) Diseñar un modelo del tipo $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(-1.000 \leqslant x \leqslant 1.000)$. En los puntos A y B, la pendiente del modelo debe coincidir con la de las laderas.
b) Representar el modelo en la calculadora.
c) Representar también la derivada del modelo.
d) Determinar la máxima pendiente del modelo.



61. ***Pandeo de una viga*** El pandeo D de una viga de longitud L es

$$D = 2x^4 - 5Lx^3 + 3L^2x^2$$

donde x denota la distancia a un extremo de la viga. Calcular el valor de x que produce el máximo pandeo.

62. ***Peso específico*** Un modelo para el peso específico del agua viene dado por

$$S = \frac{5{,}755}{10^8}T^3 - \frac{8{,}521}{10^6}T^2 + \frac{6{,}540}{10^5}T + 0{,}99987, \quad 0 < T < 25$$

donde T es la temperatura del agua en grados Celsius.

a) Usando derivación simbólica en la calculadora, hallar las coordenadas del valor máximo de la función.
b) Esbozar la gráfica de la función en el dominio especificado (usar $0{,}996 \leqslant S \leqslant 1{,}001$).
c) Estimar el peso específico del agua cuando $T = 20°$.

63. ***Coste medio*** Un empresario ha determinado que el coste total C de funcionamiento de su fábrica es

$$C = 0{,}5x^2 + 15x + 5.000$$

donde x es el número de unidades fabricadas. ¿A qué nivel de producción es mínimo el coste medio por unidad? (El coste medio por unidad es C/x.)

64. ***Coste de inventario*** El coste total de pedido y almacenamiento de x unidades es

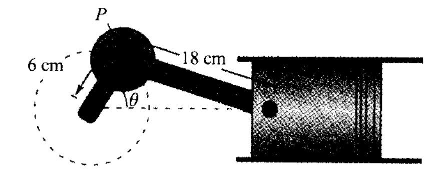
$$C = 2x + \frac{300.000}{x}$$

¿Qué tamaño de pedido produce el mínimo coste?

65. ***Diseño de un motor*** En el motor de la figura, el cigüeñal gira a un ritmo constante de 200 revoluciones por minuto. La velocidad horizontal (en cm/min) del punto P es

$$v = -2.400\pi \text{ sen } \theta$$

¿Qué valores del ángulo θ producen la máxima velocidad horizontal?



66. ***Intensidad del campo eléctrico*** La ecuación

$$E = \frac{kqx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

da la intensidad del campo eléctrico en el eje de un anillo uniformemente cargado, donde q es la carga total, k una constante y a el radio del anillo. ¿Para qué valor de x es máximo E?

Aproximaciones lineal y cuadrática En los Ejercicios 67-70, representar la función en la calculadora. A continuación, representar las aproximaciones lineal y cuadrática

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

y

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

en una misma ventana. Comparar los valores de f, P_1 y P_2 y sus primeras derivadas en $x = a$. ¿Cómo cambian las aproximaciones al alejarnos de $x = a$?

	Función	*Valor de a*
67.	$f(x) = 2(\text{sen } x + \cos x)$	$a = 0$
68.	$f(x) = \sqrt{1 - x}$	$a = 0$
69.	$f(x) = 2(\text{sen } x + \cos x)$	$a = \frac{\pi}{4}$
70.	$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x - 1}$	$a = 2$

71. Representar en la calculadora $y = x \operatorname{sen}(1/x)$. Probar que su gráfica es cóncava hacia abajo a la derecha de $x = 1/\pi$.

72. Demostrar que el punto de inflexión de $f(x) = x(x-6)^2$ está a medio camino entre los extremos relativos de f.

73. Probar que toda función cúbica con tres raíces reales distintas tiene un punto de inflexión cuya abscisa es el promedio de los tres ceros.

74. Demostrar que el polinomio cúbico $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene exactamente un punto de inflexión (x_0, y_0), donde

$$x_0 = \frac{-b}{3a} \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$$

Usar esa fórmula para hallar el punto de inflexión de $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

75. ***Teorema de Darboux*** Demostrar el teorema de Darboux: Sea $f(x)$ derivable en $[a, b]$, $f'(a) = y_1$ y $f'(b) = y_2$. Si d está entre y_1 e y_2, existe un c en (a, b) tal que $f'(c) = d$.

76. ***Redacción*** Discutir las ventajas y desventajas de los criterios de la primera y de la segunda derivada, ilustrando la discusión con ejemplos.

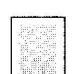
¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 77-80, decidir si la afirmación es correcta. En caso contrario, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

77. La gráfica de todo polinomio cúbico tiene exactamente un punto de inflexión.

78. La gráfica de $f(x) = 1/x$ es cóncava hacia abajo en $x < 0$ y hacia arriba en $x > 0$ y, por tanto, tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

79. El valor máximo de $y = 3\operatorname{sen} x + 2\cos x$ es 5.

80. La máxima pendiente de la gráfica de $y = \operatorname{sen}(bx)$ es b.



3.5 Límites en el infinito

CONTENIDO
Límites en el infinito
Asíntotas horizontales

Límites en el infinito

Esta sección discute el «comportamiento final» de una función en un intervalo *infinito*. Consideremos la gráfica de

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$$

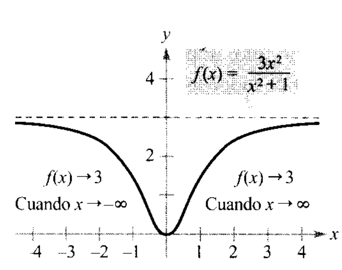
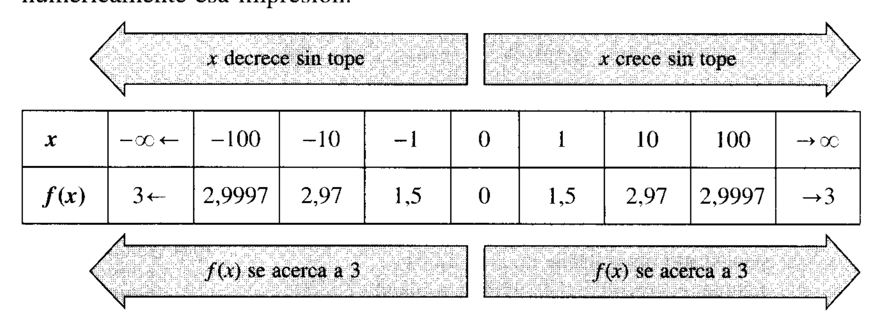


FIGURA 3.33
El límite de $f(x)$ cuando x tiende a $-\infty$ o ∞ es 3.

que muestra la Figura 3.33. Gráficamente, vemos que los valores de $f(x)$ parecen aproximarse a 3 cuando x crece o decrece sin cota. La tabla corrobora numéricamente esa impresión.



x	$-\infty \leftarrow$	-100	-10	-1	0	1	10	100	$\to \infty$
$f(x)$	$3 \leftarrow$	2,9997	2,97	1,5	0	1,5	2,97	2,9997	$\to 3$

Esta tabla sugiere que el valor de $f(x)$ tiende hacia 3 cuando x crece por la derecha sin cota ($x \to \infty$). Análogamente, $f(x)$ tiende hacia el valor 3 cuando $x \to -\infty$. Estos **límites en el infinito** se denotan por

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3 \qquad \text{Límite en } -\infty$$

y

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 3 \qquad \text{Límite en } +\infty$$

Nota. Al escribir $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ o $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$, queremos significar que el límite existe y que es igual a L.

Decir que una propiedad es cierta cuando x crece *sin cota* significa que, para algún número (grande) M, esa propiedad es cierta para todo x en el intervalo $\{x: x > M\}$. La próxima definición utiliza este concepto.

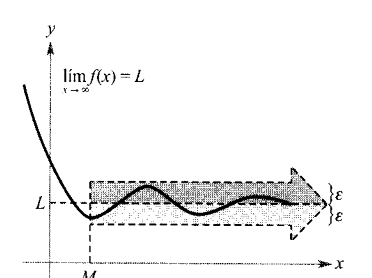


FIGURA 3.34
$f(x)$ se mantiene a distancia menor que ε de L cuando $x \to \infty$.

DEFINICIÓN DE LÍMITES EN EL INFINITO

Sea L un número real.

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ **significa que para cada** $\varepsilon > 0$ **existe un** $M > 0$ **tal que** $|f(x) - L|$ **siempre que** $x > M$.
2. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ **significa que para cada** $\varepsilon > 0$ **existe un** $N < 0$ **tal que** $|f(x) - L| < \varepsilon$ **siempre que** $x < N$.

La definición se ilustra en la Figura 3.34. En ella, nótese que para un número positivo dado ε existe un número positivo M tal que, para $x > M$, la gráfica de f está comprendida entre las rectas horizontales $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$.

Asíntotas horizontales

En la Figura 3.34, la gráfica de f tiende hacia la de la recta $y = L$, cuando x crece sin cota. Se dice que la recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de f.

DEFINICIÓN DE ASÍNTOTA HORIZONTAL

La recta $y = L$ es asíntota horizontal de la gráfica de f si

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \text{ o } \lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

EXPLORACIÓN

Representar en la calculadora la gráfica de

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x - 6}{3x^2 + 2x - 16}$$

Describir sus rasgos más relevantes. ¿Puede hallar una ventana gráfica que muestre a la vez todos esos rasgos? Explicar la respuesta.

Determinar las asíntotas horizontales de esa gráfica. ¿Cuán lejos hay que irse por la derecha para lograr que la gráfica se diferencie de la asíntota en menos de 0,001 unidades? Explicar la respuesta.

Nota. De la definición se sigue que la gráfica de f puede tener a lo sumo dos asíntotas horizontales, una por la izquierda y otra por la derecha.

Los límites en el infinito gozan de muchas de las propiedades de los límites expuestas en la Sección 1.3. Por ejemplo, si $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)$ existen ambos, entonces

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)$$

y

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)g(x)] = \left[\lim_{x\to\infty} f(x)\right]\left[\lim_{x\to\infty} g(x)\right]$$

Propiedades análogas son válidas para los límites en $-\infty$.

Al evaluar límites en el infinito, es útil el siguiente teorema, cuya demostración relegamos al apéndice.

TEOREMA 3.10 **LÍMITES EN EL INFINITO**

Si r es un número racional positivo y c es cualquier número real, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^r} = 0$$

Además, si x^r está definida para $x < 0$, entonces

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^r} = 0$$

EJEMPLO 1 *Cálculo de límites en el infinito*

Calcular el límite $\lim_{x\to\infty} \left(5 - \frac{2}{x^2}\right)$

Solución: Por el Teorema 3-10 podemos escribir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \left(5 - \frac{2}{x^2}\right) &= \lim_{x\to\infty} 5 - \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2} \\ &= 5 - 0 \\ &= 5\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 2 *Cálculo de límites en el infinito*

Calcular el límite $\lim_{x\to\infty} \frac{2x - 1}{x + 1}$

Solución: Tanto el numerador como el denominador tienden a infinito cuando x tiende a infinito.

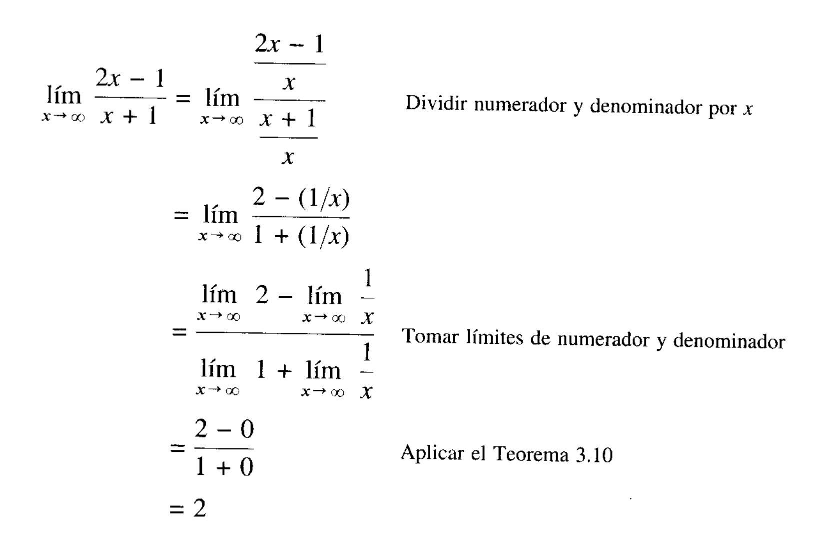
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x - 1}{x + 1}$$

$\lim_{x\to\infty} (2x - 1) \to \infty$

$\lim_{x\to\infty} (x + 1) \to \infty$

Esto significa que estamos ante una **forma indeterminada** del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Para resolver este problema podemos dividir numerador y denominador por x, tras lo cual el límite a calcular adopta esta forma:

| Nota. Ante una forma indeterminada como la del Ejemplo 2, sugerimos dividir por la potencia más alta que aparezca en el *denominador*.



$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{2x-1}{x}}{\dfrac{x+1}{x}} \qquad \text{Dividir numerador y denominador por } x$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2-(1/x)}{1+(1/x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 2 - \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x}}{\lim\limits_{x \to \infty} 1 + \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x}} \qquad \text{Tomar límites de numerador y denominador}$$

$$= \frac{2-0}{1+0} \qquad \text{Aplicar el Teorema 3.10}$$

$$= 2$$

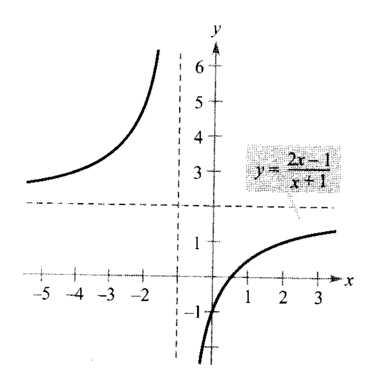


FIGURA 3.35
$y = 2$ es una asíntota horizontal.

Así pues, la recta $y = 2$ es asíntota horizontal por la derecha. Tomando el límite para $x \to -\infty$ podemos ver que $y = 2$ es asimismo asíntota horizontal por la izquierda. La gráfica de la función se muestra en la Figura 3.35. □



Se puede comprobar la plausibilidad del límite obtenido en el Ejemplo 2 evaluando $f(x)$ en unos cuantos valores de x muy grandes. Así,

$$f(100) \approx 1{,}9703, \quad f(1.000) \approx 1{,}9970, \quad \text{y} \quad f(10.000) \approx 1{,}9997$$

Otra manera de comprobarlo consiste en recurrir a una calculadora. Por ejemplo, en la Figura 3.36 se muestra la gráfica de

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$

junto con su asíntota $y = 2$. Obsérvese que, conforme crece x, la gráfica de f adhiere más y más a la asíntota.

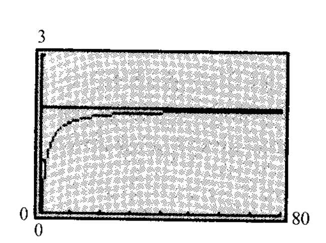


FIGURA 3.36
Al crecer x, la gráfica de f se aproxima cada vez más a la de la recta $y = 2$.

EJEMPLO 3 Comparación de tres funciones racionales

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x+5}{3x^2+1}$ *b)* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2+5}{3x^2+1}$ *c)* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3+5}{3x^2+1}$

Solución:

a) Al intentar evaluar el límite vemos que es de la forma indeterminada ∞/∞. Dividimos numerador y denominador por x^2.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+5}{3x^2+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{(2/x)+(5/x^2)}{3+(1/x^2)} = \frac{0+0}{3+0} = \frac{0}{3} = 0$$



MARIA AGNESI (1718-1799)

Agnesi fue una de las mujeres merecedoras de crédito por sus contribuciones a las Matemáticas antes del siglo XX. Con poco más de veinte años, escribió el primer tratado que incluía Cálculo diferencial e integral. Hacia los 30 años, era miembro honorario de la Facultad en la Universidad de Bolonia.

b) Dividimos numerador y denominador por x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+(5/x^2)}{3+(1/x^2)} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

c) Dividimos numerador y denominador por x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+5}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+(5/x^2)}{3+(1/x^2)} = \frac{\infty}{3}$$

Concluimos que el límite *no existe*, ya que el numerador crece sin tope mientras el denominador tiende hacia 3. □

Estrategia para calcular límites en el infinito

1. Si el grado del numerador es *menor que* el del denominador, el límite de la función racional es 0.
2. Si el grado del numerador es *igual al* del denominador, el límite de la función racional es el cociente de los coeficientes dominantes.
3. Si el grado del numerador es *mayor que* el del denominador, el límite de la función racional no existe.

Usar esta estrategia para comprobar los resultados del Ejemplo 3. Estos límites parecen razonables si se piensa que, para valores grandes de x, la parte más influyente en el límite es el término con potencia más alta. Así, el límite cuando x tiende hacia infinito de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

es 0, porque el denominador supera al numerador cuando x crece o decrece sin tope, como indica la Figura 3.37.

La función de la Figura 3.37 es un caso especial de un tipo de curvas estudiado por la matemática italiana Maria Gaetana Agnesi. La forma general de esta función es

$$f(x) = \frac{8a^3}{x^2+4a^2} \qquad \text{Hechicera de Agnesi}$$

y, a través de una incorrecta traducción de la palabra italiana *vertéré*, la curva se ha dado en llamar hechicera de Agnesi. Las investigaciones de Agnesi sobre esta curva aparecieron en un libro muy completo de Cálculo publicado en 1748.

En la Figura 3.37 apreciamos que la función $f(x) = 1/(x^2+1)$ tiene la misma asíntota horizontal por la izquierda que por la derecha. Esto sucede siempre para las funciones racionales. Sin embargo, las funciones no raciona-

PARA MÁS INFORMACIÓN
Véase el artículo «Why Women Succeed in Mathematics» de Mona Fabricant, Sylvia Svitak, y Patricia Clark Kenschaft en *Mathematics Teacher*, febrero 1990.

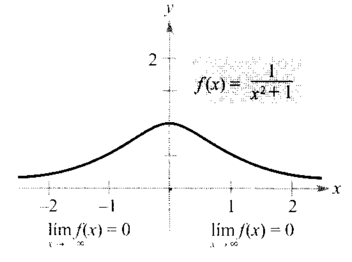


FIGURA 3.37
f tiene a $y = 0$ como asíntota horizontal.

les pueden tener asíntotas horizontales diferentes a izquierda y a derecha, como demuestra el próximo ejemplo.

EJEMPLO 4 Una función con dos asíntotas horizontales

Calcular los siguientes límites.

a) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$ *b*) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$

Solución:

a) Para $x > 0$ se tiene $x = \sqrt{x^2}$, luego, dividiendo numerador y denominador por x se obtiene

$$\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{\dfrac{3x-2}{x}}{\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2}}} = \frac{3-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{\dfrac{2x^2+1}{x^2}}} = \frac{3-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}$$

y el límite resulta ser

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{3-0}{\sqrt{2+0}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

b) Para $x < 0$ es $x = -\sqrt{x^2}$, así que al dividir numerador y denominador por x se obtiene

$$\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{\dfrac{3x-2}{x}}{\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}} = \frac{3-\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{\dfrac{2x^2+1}{x^2}}} = \frac{3-\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}$$

y el límite es

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3-\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{3-0}{-\sqrt{2+0}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

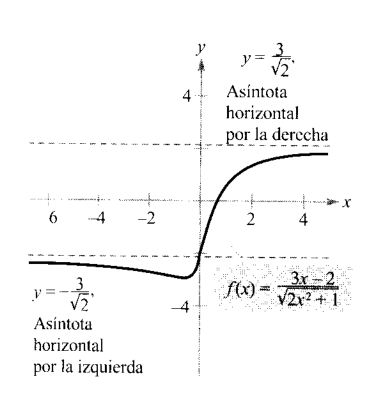


FIGURA 3.38
Las funciones no racionales pueden tener asíntotas horizontales distintas a izquierda y a derecha.

La gráfica de $f(x) = \dfrac{(3x-2)}{\sqrt{2x^2+1}}$ se muestra en la Figura 3.38.

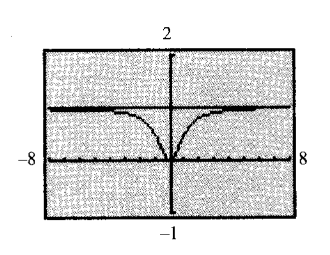


FIGURA 3.39
La asíntota horizontal parece ser $y = 1$, pero en realidad es $y = 2$.

Si se utiliza una calculadora gráfica para estimar un límite hay que verificarlo analíticamente, ya que las gráficas pueden dar resultados engañosos. La ventana gráfica de la Figura 3.39 corresponde a la función

$$y = \frac{2x^3 + 1.000x^2 + x}{x^3 + 1.000x^2 + x + 1.000}$$

De ella parece deducirse que la gráfica tiene asíntota horizontal $y = 1$. Un estudio analítico demuestra que la asíntota horizontal es, en realidad, $y = 2$. Una ampliación conveniente de la ventana gráfica confirma este hecho.

En el Ejemplo 9 de la Sección 1.3 se utilizó el teorema del encaje para calcular límites de funciones trigonométricas. Ese mismo teorema es eficaz en el cálculo de límites en el infinito.

EJEMPLO 5 Límites de funciones trigonométricas

Calcular cada uno de estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$ *b*) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

Solución:

a) Cuando x tiende a infinito, la función seno oscila entre -1 y 1. Por tanto, este límite no existe.

b) Como $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$, se sigue que $x > 0$,

$$-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leqslant \frac{1}{x}$$

donde $\lim\limits_{x \to \infty} (-1/x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to \infty} (1/x) = 0$. En consecuencia, el teorema del encaje permite concluir que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$$

como se indica en la Figura 3.40. □

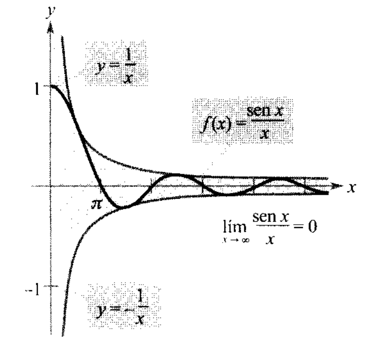


FIGURA 3.40
Cuando x crece sin tope, $f(x)$ tiende a 0.

EJEMPLO 6 Nivel de oxígeno en un estanque

Supongamos que $f(t)$ mide el nivel de oxígeno en un estanque, donde $f(t) = 1$ corresponde al nivel normal (sin polución) y el tiempo t se mide en semanas. Cuando $t = 0$, se vierten residuos orgánicos en el estanque y, con la oxidación de ese material, el nivel de oxígeno pasa a ser

$$f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}$$

¿Qué porcentaje del nivel normal de oxígeno hay en el estanque 1 semana después? ¿Y 2 semanas después del vertido? ¿Y 10 semanas después del vertido? ¿Cuál es el límite cuando t tiende a infinito?

Solución: Cuando $t = 1$, 2 y 10, los niveles de oxígeno son

$$f(1) = \frac{1^2 - 1 + 1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2} = 50\,\% \qquad \text{1 semana}$$

$$f(2) = \frac{2^2 - 2 + 1}{2^2 + 1} = \frac{3}{5} = 60\,\% \qquad \text{2 semanas}$$

$$f(10) = \frac{10^2 - 10 + 1}{10^2 + 1} = \frac{91}{101} = 90{,}1\,\% \qquad \text{10 semanas}$$

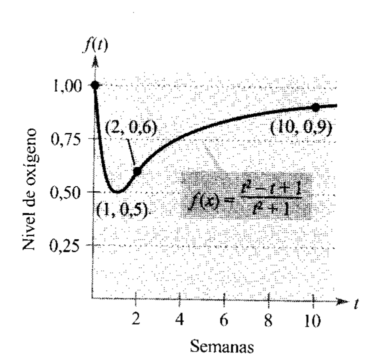
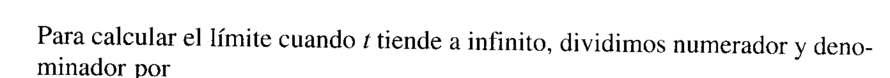


FIGURA 3.41
El nivel de oxígeno en un estanque tiende al nivel normal 1 cuando t tiende a ∞.

Para calcular el límite cuando t tiende a infinito, dividimos numerador y denominador por



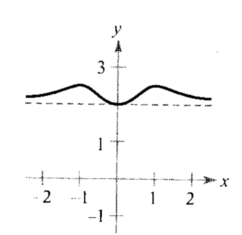
$$\lim_{x\to\infty} \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - (1/t) + (1/t^2)}{1 + (1/t^2)} = \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0} = 1 = 100\,\%$$

(Véase Figura 3.41.) □

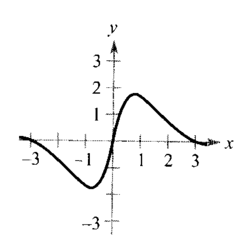
Ejercicios de la Sección 3.5

En los Ejercicios 1-6, emparejar cada función con su gráfica, usando las asíntotas horizontales como guía.

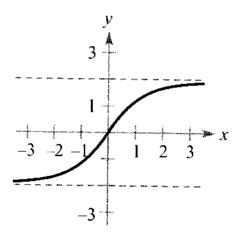
a)



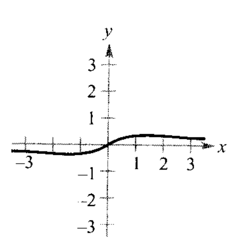
b)



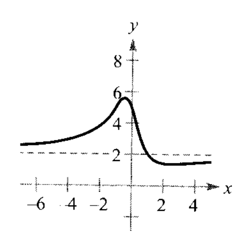
c)



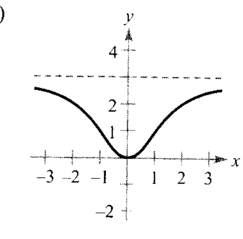
d)



e)



f)



1. $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 2}$

2. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$

4. $f(x) = 2 + \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

5. $f(x) = \dfrac{4 \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}$

6. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 + 1}$

Análisis numérico y gráfico En los Ejercicios 7-10, usar la calculadora para completar la tabla y estimar el límite en el infinito. A continuación, representar la gráfica de f en la calculadora y estimar el límite gráficamente.

x	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$f(x)$							

7. $f(x) = \dfrac{4x + 3}{2x - 1}$ **8.** $f(x) = \dfrac{2x^2}{x + 1}$

9. $f(x) = \dfrac{-6x}{\sqrt{4x^2 + 5}}$ **10.** $f(x) = 5 - \dfrac{1}{x^2 + 1}$

En los Ejercicios 11-24, calcular el límite.

11. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x - 1}{3x + 2}$ **12.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^3 + 1}{10x^3 - 3x^2 + 7}$

13. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x^2 - 1}$ **14.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^{10} - 1}{10x^{11} - 3}$

15. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^2}{x + 3}$ **16.** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)$

17. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - x}}$ **18.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

19. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - x}}$ **20.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x + 1}{\sqrt{x^2 + x}}$

21. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\text{sen } 2x}{x}$ **22.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \cos x}{x}$

23. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{2x + \text{sen } x}$ **24.** $\lim\limits_{x \to \infty} \text{sen } \dfrac{1}{x}$

En los Ejercicios 25 y 26, calcular el límite. (*Ayuda:* Hacer $x = 1/t$ y hallar el límite para $t \to 0^+$.)

25. $\lim\limits_{x \to \infty} x \text{ sen } \dfrac{1}{x}$ **26.** $\lim\limits_{x \to \infty} x \text{ tg } \dfrac{1}{x}$

En los Ejercicios 27-30, hallar el límite. (*Ayuda:* Tratar la expresión como una fracción de denominador 1 y racionalizar el numerador.) Verificar el resultado mediante una gráfica en la calculadora.

27. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 3})$

28. $\lim\limits_{x \to \infty} (2x - \sqrt{4x^2 + 1})$

29. $\lim\limits_{x \to \infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$

30. $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x + \sqrt{9x^2 - x})$

Investigación numérica, gráfica y analítica En los Ejercicios 31-34, usar la calculadora para completar la tabla y para estimar el límite en el infinito. Representar a continuación la gráfica de f y estimar el límite gráficamente. Finalmente, calcularlo analíticamente y comparar el resultado con las estimaciones.

x	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$f(x)$							

31. $f(x) = x - \sqrt{x(x - 1)}$ **32.** $f(x) = x^2 - x\sqrt{x(x - 1)}$

33. $f(x) = x \text{ sen } \dfrac{1}{2x}$ **34.** $f(x) = \dfrac{x + 1}{x\sqrt{x}}$

En los Ejercicios 35-52, esbozar la gráfica de la función. Buscar extremos, intersecciones con los ejes y asíntotas. Comprobar el resultado con la gráfica que da una calculadora.

35. $y = \dfrac{2 + x}{1 - x}$ **36.** $y = \dfrac{x - 3}{x - 2}$

37. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ **38.** $y = \dfrac{2x}{9 - x^2}$

39. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 9}$ **40.** $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$

41. $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 4}$ **42.** $y = \dfrac{2x^2}{x^2 + 4}$

43. $xy^2 = 4$ **44.** $x^2y = 4$

45. $y = \dfrac{2x}{1 - x}$ **46.** $y = \dfrac{2x}{1 - x^2}$

47. $y = 2 - \dfrac{3}{x^2}$ **48.** $y = 1 + \dfrac{1}{x}$

49. $y = 3 + \dfrac{2}{x}$ **50.** $y = 4\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

51. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 - 4}}$ **52.** $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$

En los Ejercicios 53-60, usar derivación simbólica para analizar la gráfica de la función. Indicar los extremos y las asíntotas.

53. $f(x) = 5 - \dfrac{1}{x^2}$ **54.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

55. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ **56.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$

57. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4x+3}$

58. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$

59. $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{4x^2+1}}$

60. $f(x) = \dfrac{2 \text{ sen } 2x}{x}$

61. Representar en una calculadora cada función y comprobar que tienen todas dos asíntotas horizontales.

a) $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$ *b)* $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

62. Dada la función $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 10$, hallar $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)$, si es posible.

a) $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$ *b)* $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^3}$ *c)* $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^4}$

En los Ejercicios 63 y 64, *a)* representar en la calculadora f y g en una misma ventana, *b)* verificar algebraicamente que f y g representan la misma función, y *c)* ampliar cuanto sea necesario hasta ver la gráfica como recta. ¿Qué ecuación parece tener esa recta? (Nótese que los puntos en los que la función no es continua no son fáciles de ver al hacer *zoom*.)

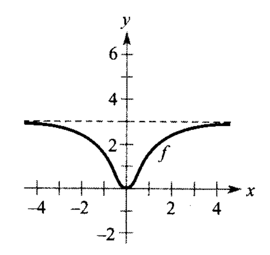
63. $f(x) = \dfrac{x^3-3x^2+2}{x(x-3)}$

$g(x) = x + \dfrac{2}{x(x-3)}$

64. $f(x) = -\dfrac{x^3-2x^2+2}{2x^2}$

$g(x) = -\dfrac{1}{2}x + 1 - \dfrac{1}{x^2}$

65. ***Para pensar*** Dada la gráfica de f adjunta



a) Esbozar la de f'.

b) Estimar, mediante esas gráficas, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

c) Explicar las respuestas del apartado *b*).

66. ***Eficiencia de un motor*** La eficiencia de un motor de combustión interna es

$$\text{Eficiencia } (\%) = 100\left[1 - \frac{1}{(v_1/v_2)^c}\right]$$

donde v_1/v_2 es el cociente entre el gas sin comprimir y el gas comprimido, y c es una constante positiva dependiente del diseño del motor. Calcular el límite de la eficiencia cuando el cociente de compresión tiende a infinito.

67. ***Coste medio*** Un comercio tiene un coste $C = 0{,}5x + 500$ en la producción de x unidades. El coste medio por unidad es

$$\overline{C} = \frac{C}{x}$$

Hallar el límite de $\overline{C}$ cuando x tiende a infinito.

68. Una recta con pendiente m pasa por el punto (0, 4).

a) Expresar la distancia d del punto (3, 1) a esa recta como función de m.

b) Representar la gráfica de la ecuación del apartado *a*) en una calculadora.

c) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} d(m)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} d(m)$. Interpretar los resultados geométricamente.

69. ***Un modelo matemático*** La tabla recoge los datos de temperatura que produce un cierto horno durante los dos primeros minutos.

t	0	15	30	45	60
T	25,2°	36,9°	45,5°	51,4°	56,0°

t	75	90	105	120
T	59,6°	62,0°	64,0°	65,0°

a) Usar regresión en la calculadora para obtener un modelo de la forma $T_1 = at^2 + bt + c$ para esos datos.

b) Representar en la calculadora T_1.

c) Un modelo racional para esos datos viene dado por

$$T_2 = \frac{2.468 + 155t}{2(50+t)}$$

Representar este nuevo modelo.

d) Hallar $T_1(0)$ y $T_2(0)$.

e) Hallar $\lim_{x \to \infty} T_2$.

f) Interpretar el resultado del apartado *e*) en el contexto del problema. ¿Es posible realizar este tipo de análisis utilizando T_1? Explicar la respuesta.

70. ***Un modelo matemático*** Los datos de la tabla dan el número N (en miles) de graduados superiores al final de cada década entre 1900 y 1990. *(Fuente: U.S. Department of Education.)*

Año	1900	1910	1920	1930	1.940
N	62	111	231	592	1.140

Año	1950	1960	1970	1980	1990
N	1.063	1.627	2.589	2.748	2.505

Un modelo para ajustar esos datos viene dado por

$$N = \frac{68.436{,}82 + 4.731{,}82t}{1.000 - 23{,}37t + 0{,}16t^2}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 90$$

donde t es el tiempo en años, con $t = 0$ correspondiendo a 1990.

a) Representar en la calculadora los datos y el modelo.

b) Estimar, mediante ese modelo, el número de graduados en 1975.

c) Aproximar el año en que el número de graduados fue máximo.

d) Averiguar, utilizando derivación simbólica, el momento de máximo ritmo de crecimiento del número de graduados.

e) ¿Por qué no debe usarse este modelo para predecir el número en años venideros?

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 71 y 72, discutir si la afirmación propuesta es correcta. En caso contrario, explicar la razón o exhibir un ejemplo que muestre su falsedad.

71. Si $f'(x) > 0$ para todos los x reales, f crece sin cota.

72. Si $f''(x) < 0$ para todos los x reales, f decrece sin cota.

73. ***Para pensar*** Esbozar la gráfica de una función derivable f que satisfaga los siguientes requisitos y tenga $x = 2$ como su único número crítico.

$f'(x) < 0$ para $x < 2$

$f'(x) > 0$ para $x > 2$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 6$

74. ***Para pensar*** ¿Es posible encontrar una función cuya gráfica satisfaga las condiciones del Ejercicio 73 y no tenga ningún punto de inflexión? Razonar la respuesta.

75. Demostrar que si $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 (a_n \neq 0, b_m \neq 0)$, entonces

$$\lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0, & n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & n = m \\ \pm\infty, & n > m \end{cases}$$

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

Representar en una misma ventana de la calculadora las funciones

$$f(x) = \frac{2x^2 - x}{x - 1} \quad \text{y} \quad g(x) = 2x + 1$$

y ampliar con el *zoom* varias veces.

a) Describir el comportamiento de las gráficas de f y g para $x \to \infty$ y $x \to -\infty$.

b) Probar que

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x - 1}$$

¿Qué significa esto con relación a las gráficas de f y g cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$?

c) Demostrar que f se puede expresar también como

$$f(x) = \frac{2x - 1}{1 - 1/x}$$

¿Significa esto que la gráfica de f debe parecerse a la de $h(x) = 2x - 1$ cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$? Explicar la respuesta.

d) Redactar un breve párrafo acerca de la forma de la gráfica de

$$y = \frac{1 + 2x - 2x^2}{2x}$$

cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$.

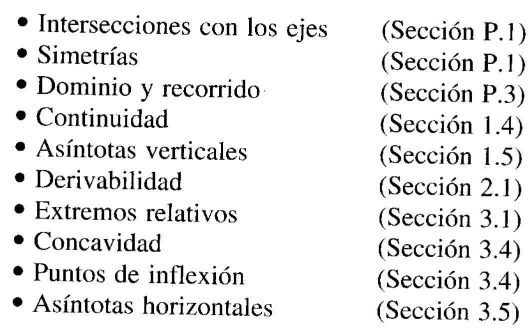
3.6 Análisis de gráficas

CONTENIDO ▪
Resumen de las técnicas de análisis de gráficas ▪

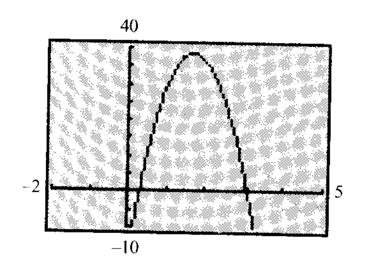
Resumen de las técnicas de análisis de gráficas

Es difícil exagerar la importancia de las gráficas en matemáticas. La introducción, por Descartes, de la Geometría analítica contribuyó decisivamente al rápido avance del Cálculo en la mitad del siglo XVII. En palabras de Lagrange, «Mientras Álgebra y Geometría hicieron su camino por separado, su avance fue lento y sus aplicaciones limitadas. Pero cuando se unieron, captaron una de otra vitalidad y frescura, marchando con paso decidido hacia la perfección».

Hasta ahora, hemos investigado varios conceptos que resultan útiles al analizar gráficas de funciones.



- Intersecciones con los ejes (Sección P.1)
- Simetrías (Sección P.1)
- Dominio y recorrido (Sección P.3)
- Continuidad (Sección 1.4)
- Asíntotas verticales (Sección 1.5)
- Derivabilidad (Sección 2.1)
- Extremos relativos (Sección 3.1)
- Concavidad (Sección 3.4)
- Puntos de inflexión (Sección 3.4)
- Asíntotas horizontales (Sección 3.5)



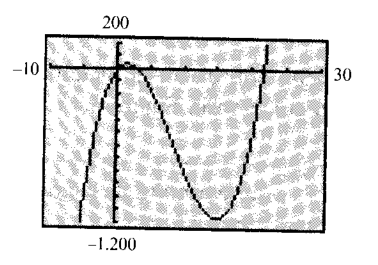


FIGURA 3.42
Distintas ventanas de una misma gráfica.

Cuando se desea dibujar una gráfica, bien sea a mano o en la calculadora, debemos tener en cuenta que, normalmente, no podemos representar la gráfica *entera*. Muchas veces, la decisión de qué porción considerar es crucial. Por ejemplo, ¿cuál de las ventanas (pantallas) de la Figura 3.42 representa mejor la gráfica de

$$f(x) = x^3 + 25x^2 + 74x - 20?$$

A la vista de ambas, parece obvio que la segunda proporciona una visión más completa de la gráfica. Ahora bien, ¿podría una tercera revelar otras porciones interesantes de la gráfica? Para responder esta cuestión, es preciso recurrir al Cálculo, interpretando la primera y la segunda derivadas. He aquí una posible estrategia conducente a determinar la ventana adecuada.

Estrategia para analizar la gráfica de una función

1. Determinar el dominio y el recorrido de la función.
2. Hallar las intersecciones con los ejes y las asíntotas de la gráfica.
3. Localizar los valores de x donde $f'(x)$ y $f''(x)$ son cero o no están definidas. Con estos resultados, estudiar los extremos relativos y los puntos de inflexión.

Nota. Adviértase, en esta estrategia, la importancia del Álgebra (no sólo del Cálculo) a la hora de resolver las ecuaciones $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$, y $f''(x) = 0$.

EJEMPLO 1 Análisis de la gráfica de una función racional

Analizar la gráfica de $f(x) = \dfrac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4}$

Solución:

Primera derivada: $f'(x) = \dfrac{20x}{(x^2 - 4)^2}$

Segunda derivada: $f''(x) = \dfrac{-20(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$

Intersecciones con el eje x: $(-3, 0)$, $(3, 0)$

Intersección con el eje y: $\left(0, \dfrac{9}{2}\right)$

Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 2$

Número crítico: $x = 0$

Posibles puntos de inflexión: Ninguno

Dominio: Todos los números reales excepto $x = \pm 2$

Simetría: Con respecto al eje y

Intervalos prueba: $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, \infty)$

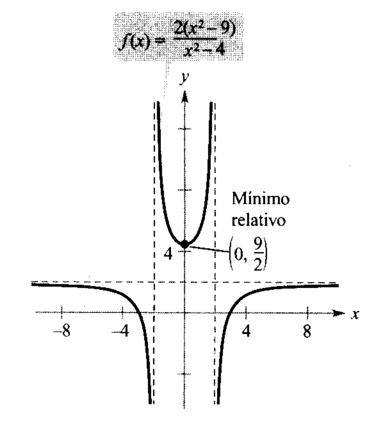


FIGURA 3.43
Utilizando el Cálculo, se puede estar seguro de haber localizado todas las características de la gráfica.

La tabla muestra cómo usar los intervalos prueba con el fin de determinar varias características de la gráfica. La gráfica aparece en la Figura 3.43.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	**Característica de la gráfica**
$-\infty < x < -2$				Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = -2$	No definido	No definido	No definido	Asíntota vertical
$-2 < x < 0$		$-$	$+$	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 0$	$\frac{9}{2}$	0	$+$	Mínimo relativo
$0 < x < 2$		$+$	$+$	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = 2$	No definido	No definido	No definido	Asíntota vertical
$2 < x < \infty$		$+$	$-$	Creciente, cóncava hacia abajo

□

PARA MÁS INFORMACIÓN
Véase el artículo «Graphs of Rational Functions for Computer Assisted Calculus» de Stan Byrd y Terry Walters, en *The College Mathematics Journal*, septiembre 1991.

Conviene que el lector se asegure de que comprende todas las implicaciones en que se basa la elaboración de la tabla anterior. Gracias al Cálculo, podemos estar seguros de que esa gráfica no tiene más extremos relativos o puntos de inflexión que los indicados en la Figura 3.43.

Sin recurrir al Cálculo es fácil obtener una visión incompleta de los rasgos característicos de la gráfica. Así, la Figura 3.44 muestra una vista de la gráfica de

$$g(x) = \frac{2(x^2 - 9)(x - 20)}{(x^2 - 4)(x - 21)}$$

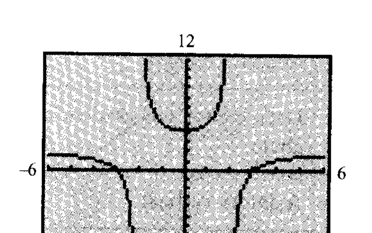


FIGURA 3.44
Si no se usa el Cálculo, pueden pasarse por alto características importantes de la gráfica.

De ella parece desprenderse que la gráfica de g viene a ser idéntica a la de f en la Figura 3.43. Sin embargo, las gráficas de esas dos funciones difieren notablemente. Ampliando la ventana de g se ven las diferencias.

EJEMPLO 2 Análisis de la gráfica de una función racional

Analizar la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$$

Solución:

Primera derivada: $f'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

Segunda derivada: $f''(x) = \dfrac{8}{(x-2)^3}$

Intersecciones con el eje x: No hay

Intersección con el eje y: $(0, -2)$

Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntotas horizontales: No hay

Números críticos: $x = 0$, $x = 4$

Posibles puntos de inflexión: Ninguno

Dominio: Todos los números reales excepto $x = 2$

Intervalos prueba: $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 4)$, $(4, \infty)$

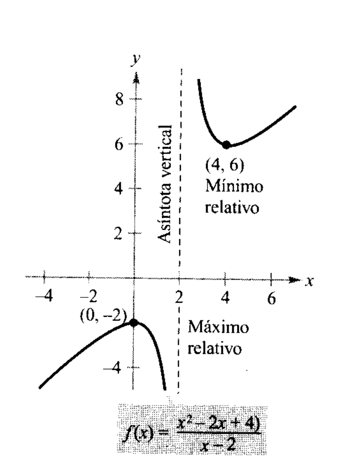


FIGURA 3.45

La tabla de la página siguiente muestra cómo usar los intervalos prueba con el fin de determinar varias características de la gráfica. La gráfica aparece en la Figura 3.45.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	**Característica de la gráfica**
$-\infty < x < 0$		+	−	Creciente, cóncava hacia abajo
$x = 0$	−2	0	−	Máximo relativo
$0 < x < 2$		−	−	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = 2$	No definido	No definido	No definido	Asíntota vertical
$2 < x < 4$		−	+	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 4$	6	0	+	Mínimo relativo
$4 < x < \infty$		+	+	Creciente, cóncava hacia arriba

□

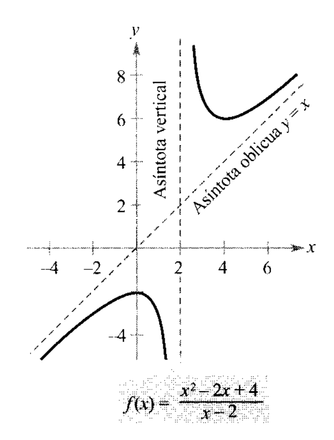


FIGURA 3.46
Una asíntota oblicua.

Aunque la gráfica del Ejemplo 2 no tiene asíntotas horizontales, tiene una asíntota oblicua. Se dice que la gráfica de una función racional (sin factores comunes) tiene una **asíntota oblicua** si el grado del numerador excede en 1 al grado del denominador. Para hallar la asíntota oblicua, basta dividir los dos polinomios con el fin de reexpresar la función como suma de un polinomio de grado 1 y otra función racional.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} \qquad \text{Reescribir efectuando la división}$$

$$= x + \frac{4}{x - 2} \qquad y = x \text{ es una asíntota oblicua}$$

En la Figura 3.46 vemos que f se va aproximando a la asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$ o a $+\infty$. Represente en la calculadora las gráficas de f y de su asíntota oblicua para observar este hecho.

EJEMPLO 3 Análisis de la gráfica de una función radical

Analizar la gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{2}{(x^2 + 2)^{3/2}} \qquad f''(x) = \frac{6x}{(x^2 + 2)^{5/2}}$$

La gráfica sólo tiene una intersección con los ejes: (0, 0). No tiene asíntotas verticales, pero sí dos horizontales: $y = 1$ por la derecha, $y = -1$ por la izquier-

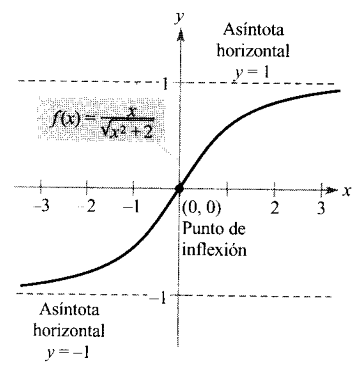


FIGURA 3.47

da. No tiene números críticos y un solo candidato a punto de inflexión en $x = 0$. Su dominio son todos los números reales y su gráfica es simétrica respecto del origen. El análisis de la gráfica se indica en la tabla y la gráfica se muestra en la Figura 3.47.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	**Característica de la gráfica**
$-\infty < x < 0$		+	+	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = 0$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	Punto de inflexión
$0 < x < \infty$		+	−	Creciente, cóncava hacia abajo

□

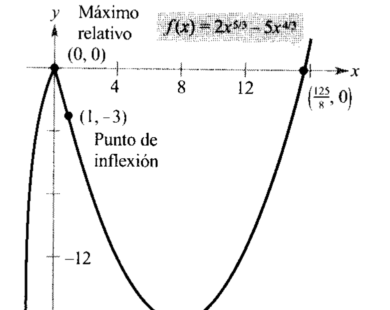


FIGURA 3.48

EJEMPLO 4 Análisis de la gráfica de una función radical

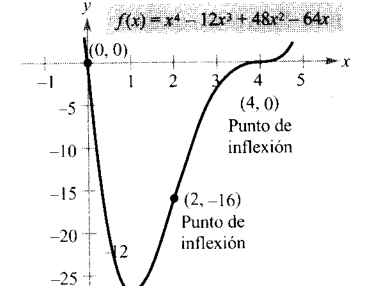
Analizar la gráfica de $f(x) = 2x^{5/3} - 5x^{4/3}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{1/3}(x^{1/3} - 2) \qquad f''(x) = \frac{20(x^{1/3} - 1)}{9x^{2/3}}$$

La función corta a los ejes en (0, 0) y en $(\frac{125}{8}, 0)$. No hay asíntotas horizontales ni verticales. La función tiene dos puntos críticos ($x = 0$ y $x = 8$) y dos posibles puntos de inflexión ($x = 0$ y $x = 1$). Su dominio es toda la recta real. El análisis de la gráfica se muestra en la tabla adjunta y la gráfica en la Figura 3.48.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	**Característica de la gráfica**
$-\infty < x < 0$		+	−	Creciente, cóncava hacia abajo
$x = 0$	0	0	No definido	Máximo relativo
$0 < x < 1$		−	−	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = 1$	−3	−	0	Punto de inflexión
$1 < x < 8$		−	+	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 8$	−16	0	+	Mínimo relativo
$8 < x < \infty$		+	+	Creciente, cóncava hacia arriba



a)

Dibujado con Derive

b)

FIGURA 3.49
Una función polinómica de grado par tiene al menos un extremo relativo.

EJEMPLO 5 Análisis de la gráfica de una función polinómica

Analizar la gráfica de $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$

Solución: Factorizando obtenemos

$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$$
$$= x(x-4)^3$$

A continuación, podemos ya realizar el análisis usando esta forma factorizada de f.

Primera derivada: $f'(x) = 4(x-1)(x-4)^2$

Segunda derivada: $f''(x) = 12(x-4)(x-2)$

Intersecciones con el eje x: (0, 0), (4, 0)

Intersección con el eje y: (0, 0)

Asíntotas verticales: No hay

Asíntotas horizontales: No hay

Números críticos: $x = 1$, $x = 4$

Posibles puntos de inflexión: $x = 2$, $x = 4$

Dominio: Todos los números reales

Intervalos prueba: $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, \infty)$

El análisis de la gráfica se muestra en la tabla adjunta y la gráfica en la Figura 3.49*a*. El uso de Derive u otro programa informático similar (véase Figura 3.49*b* puede ayudar a completar el análisis.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	**Característica de la gráfica**
$-\infty < x < 1$		−	+	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 1$	−27	0	+	Mínimo relativo
$1 < x < 2$		+	+	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = 2$	−16	+	0	Punto de inflexión
$2 < x < 4$		+	−	Creciente, cóncava hacia abajo
$x = 4$	0	0	0	Punto de inflexión
$4 < x < \infty$		+	+	Creciente, cóncava hacia arriba

□

La función polinómica de grado cuatro del Ejemplo 5 tiene un mínimo relativo y no tiene máximos relativos. En general, una función polinómica de grado n presenta *a lo sumo* $n - 1$ extremos relativos y *a lo sumo* $n - 2$ puntos de inflexión. Además, las de grado par tienen *al menos* un extremo relativo.

Recordemos que, por el criterio del término dominante de la Sección P.3, el «comportamiento final» de la gráfica de una función polinómica viene determinado por su coeficiente dominante y por su grado. Así, por ejemplo, como el polinomio del Ejemplo 5 tiene coeficiente dominante positivo, su gráfica sube por la derecha. Y como su grado es par, también sube por la izquierda.

EJEMPLO 6 Análisis de la gráfica de una función trigonométrica

Analizar la gráfica de $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$

Solución: Como la función tiene período 2π, basta analizarla en el intervalo $(-\pi/2, 3\pi/2)$

Primera derivada: $f'(x) = -\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$

Segunda derivada: $f''(x) = \dfrac{\cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2}$

Período: 2π

Intersección con el eje x: $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$

Intersección con el eje y: $(0, 1)$

Asíntotas verticales: $x = -\dfrac{\pi}{2}, x = \dfrac{3\pi}{2}$

Asíntotas horizontales: No hay

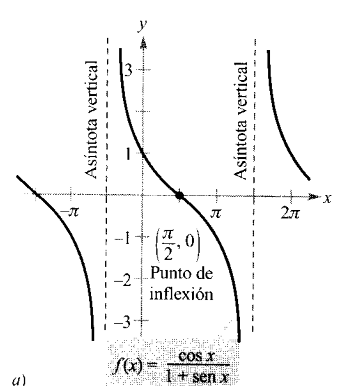
Números críticos: No hay

Posibles puntos de inflexión: $x = \dfrac{\pi}{2}$

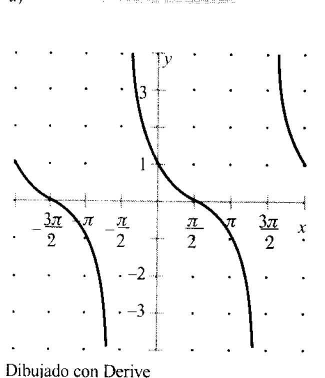
Dominio: Todos los números reales excepto $x = \dfrac{3 + 4n}{2}\pi$

Intervalos prueba: $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

El análisis de la gráfica en el intervalo $(-\pi/2, 3\pi/2)$ se muestra en la tabla y la gráfica en la Figura 3.50*a*. Comparar esta gráfica con la de la Figura 3.50*b*, obtenida usando Derive en la calculadora.



a)



Dibujado con Derive

b)

FIGURA 3.50

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	**Característica de la gráfica**
$x = -\frac{\pi}{2}$	No definido	No definido	No definido	Asíntota vertical
$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$		$-$	$+$	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = \frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	Punto de inflexión
$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$		$-$	$-$	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = \frac{3\pi}{2}$	No definido	No definido	No definido	Asíntota vertical

Nota. A veces se puede aliviar el análisis de una función trigonométrica utilizando identidades trigonométricas. Así, la función del Ejemplo 6 se puede expresar como

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

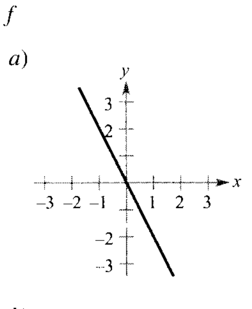
En esta forma, reconocemos la familiar gráfica de la cotangente que se ve en la Figura 3.50.

Ejercicios de la Sección 3.6

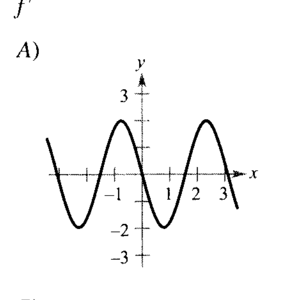
1. Emparejar cada función de la columna izquierda con la gráfica de su derivada en la columna derecha.

f $\quad$ f' $\quad$ f $\quad$ f'

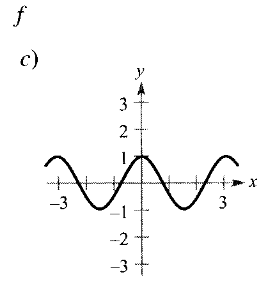
a)



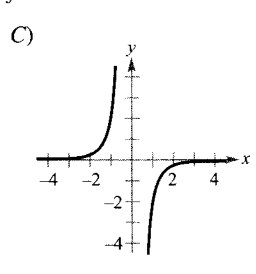
A)



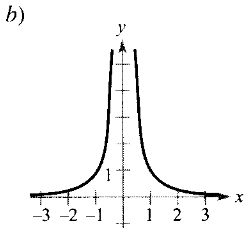
c)



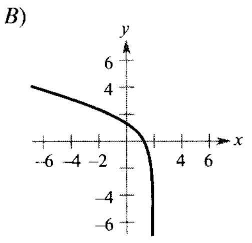
C)



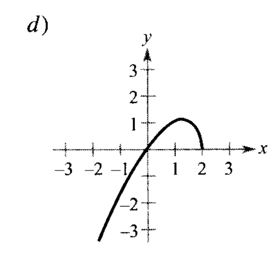
b)



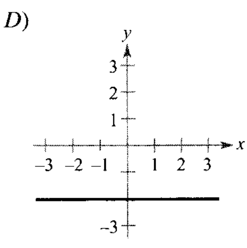
B)



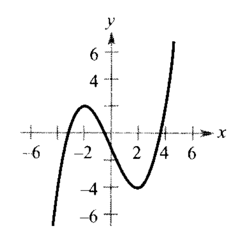
d)



D)



2. ***Para pensar*** Supongamos que $f'(t) < 0$ para todo t en el intervalo (2, 8). Explicar por qué $f(3) > f(5)$.
3. ***Para pensar*** Sabiendo que $f'(x) = \frac{2}{3}$ para todo x y que $f(0) = 1$, hallar $f(6)$.
4. ***Para pensar*** Supongamos que $f(0) = 3$ y $2 \leqslant f'(x) \leqslant 4$ todo x del intervalo $[-5, 5]$. Determinar el máximo y el mínimo valor posible de $f(2)$.
5. ***Razonamiento gráfico*** La gráfica de f viene dada en la figura adjunta.



a) ¿En qué valores de x es $f'(x)$ cero, positiva o negativa?
b) ¿En qué valores de x es $f''(x)$ cero, positiva o negativa?
c) ¿En qué intervalo es f' creciente?
d) ¿En qué valor de x es mínima $f'(x)$? Comparar el ritmo de cambio de f en ese valor de x con el de f en otros valores de x. Explicar el resultado.

6. ***Investigación*** Consideremos la función

$$f(x) = \frac{3x^n}{x^4 + 1}$$

para valores enteros no negativos de n.
a) Discutir la relación entre el valor de n y la simetría de la gráfica.
b) ¿Para qué valores de n es asíntota horizontal el eje x?
c) ¿Para qué valores de n es asíntota horizontal la recta $y = 3$?
d) ¿Cuál es la asíntota de la gráfica para $n = 5$?
e) Representar f en la calculadora para cada valor de n indicado en la tabla y usar la gráfica para determinar el número M de extremos y el número N de puntos de inflexión.

n	0	1	2	3	4	5
M						
N						

En los Ejercicios 7-24, utilizar dominio, recorrido, simetrías, asíntotas, intersecciones con los ejes, extremos relativos y puntos de inflexión para analizar la gráfica de la función propuesta. Pueden verificarse los resultados en una calculadora.

7. $y = x^3 - 3x^2 + 3$
8. $y = -\frac{1}{3}(x^3 - 3x + 2)$
9. $y = 2 - x - x^3$
10. $f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3 + 2$
11. $f(x) = 3x^3 - 9x + 1$
12. $f(x) = (x+1)(x-2)(x-5)$
13. $y = 3x^4 + 4x^3$
14. $y = 3x^4 - 6x^2$
15. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x$
16. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 5$
17. $y = x^5 - 5x$
18. $y = (x-1)^5$
19. $y = |2x - 3|$
20. $y = |x^2 - 6x + 5|$
21. $y = x\sqrt{4 - x}$
22. $y = x\sqrt{4 - x^2}$
23. $y = 3x^{2/3} - 2x$
24. $y = 3x^{2/3} - x^2$

En los Ejercicios 25-28, esbozar una gráfica de la función en el intervalo especificado y usar una calculadora para verificar el resultado.

	Función	*Intervalo*
25.	$y = \operatorname{sen} x - \frac{1}{18} \operatorname{sen} 3x$	$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$
26.	$y = \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x$	$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$
27.	$y = 2x - \operatorname{tg} x$	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
28.	$y = 2x + \operatorname{ctg} x$	$0 < x < \pi$

En los Ejercicios 29-40, esbozar una gráfica de la función. Indicar las intersecciones con los ejes, los puntos de inflexión y las asíntotas. Verificar los resultados con una calculadora.

29. $y = \frac{x^2}{x^2 + 3}$
30. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$
31. $y = \frac{1}{x - 2} - 3$
32. $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2}$

33. $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

34. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x}$

35. $g(x) = x + \dfrac{4}{x^2 + 1}$

36. $f(x) = x + \dfrac{32}{x^2}$

37. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

38. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

39. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 12}{x - 4}$

40. $y = \dfrac{2x^2 - 5x + 5}{x - 2}$

En los Ejercicios 41-44, usar derivación simbólica para analizar y representar la gráfica. Identificar los extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas.

41. $f(x) = \dfrac{20x^2}{x^2 + 1} - \dfrac{1}{x}$

42. $f(x) = 5\left(\dfrac{1}{x - 4} - \dfrac{1}{x + 2}\right)$

43. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 7}}$

44. $f(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2 + 15}}$

En los Ejercicios 45 y 46, representar la gráfica en la calculadora. Usar esa gráfica para determinar si es posible que la gráfica cruce a su asíntota horizontal.¿Es posible que una gráfica de función cruce una asíntota vertical? Justificar la respuesta.

45. $f(x) = \dfrac{4(x - 1)^2}{x^2 - 4x + 5}$

46. $g(x) = \dfrac{3x^4 - 5x + 3}{x^4 + 1}$

Redacción En los Ejercicios 47 y 48, representar la función en la calculadora. Explicar por qué no hay asíntota vertical, cuando a primera vista parece que la hay.

47. $h(x) = \dfrac{6 - 2x}{3 - x}$

48. $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

Redacción En los Ejercicios 49 y 50, representar la función en una calculadora y hallar su asíntota oblicua. Ampliar repetidamente con el *zoom* y describir cómo cambia la gráfica en su apariencia. ¿Por qué sucede eso?

49. $f(x) = -\dfrac{x^2 - 3x - 1}{x - 2}$

50. $g(x) = \dfrac{2x^2 - 8x - 15}{x - 5}$

Para pensar En los Ejercicios 51-54, buscar una función cuya gráfica tenga las características requeridas (la solución no es única).

51. Asíntota vertical: $x = 5$
Asíntota horizontal: $y = 0$

52. Asíntota vertical: $x = -3$
Asíntota horizontal: No hay

53. Asíntota vertical: $x = 5$
Asíntota oblicua: $y = 3x + 3$

54. Asíntota vertical: $x = 0$
Asíntota oblicua: $y = -x$

55. ***Razonamiento gráfico*** Consideremos la función

$$f(x) = \frac{ax}{(x - b)^2}$$

a) Si $b \neq 0$, ¿qué efecto tiene sobre la gráfica una modificación de a? Considerar los casos en que a es positiva o negativa.

b) Si $a \neq 0$, ¿qué efecto tiene sobre la gráfica una modificación de b?

56. Sea la función

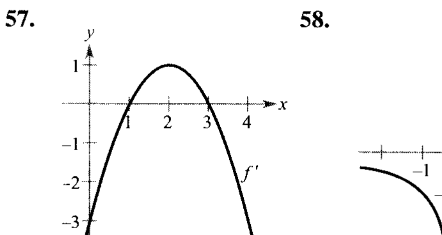
$$f(x) = \frac{1}{2}(ax)^2 - (ax), \quad a \neq 0$$

a) Determinar los cambios (si los hay) producidos en las intersecciones con los ejes, en los extremos y en la concavidad de la gráfica por un cambio del valor de a.

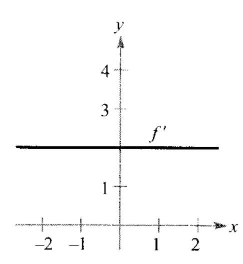
b) Representar en unos mismos ejes la función para cuatro valores diferentes de a.

Para pensar En los Ejercicios 57-62, usar la gráfica de f' o la de f'', para esbozar una gráfica de la función f. (*Ayuda:* Hay más de una solución correcta.)

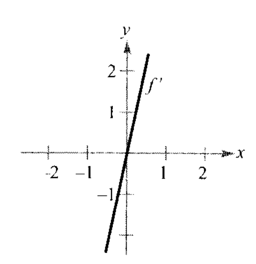
57. **58.**



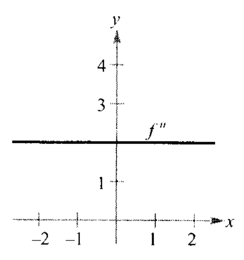
59.



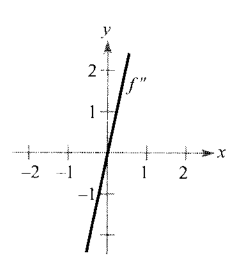
60.



61.

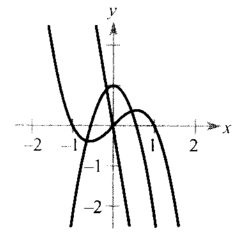


62.

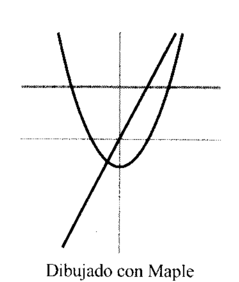


Para pensar En los Ejercicios 63 y 64, se muestran, en unos mismos ejes, las gráficas de f, f' y f''. ¿Cuál es cuál?

63.



64.



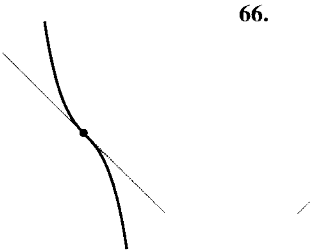
Dibujado con Maple

Para pensar En los Ejercicios 65-70, fijar condiciones sobre los coeficientes de

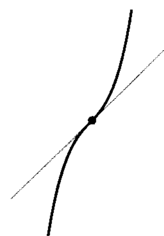
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

de manera que la gráfica de f se parezca a la gráfica dada.

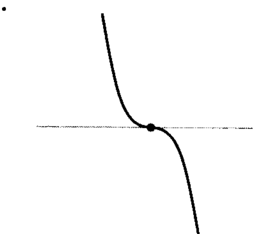
65.



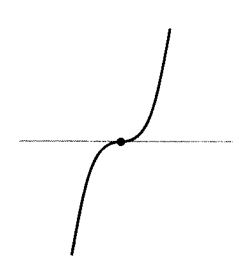
66.



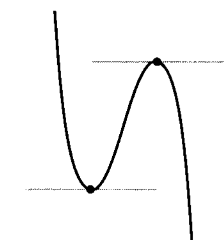
67.



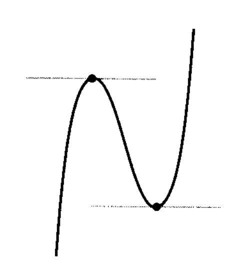
68.



69.

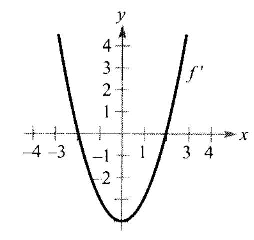


70.

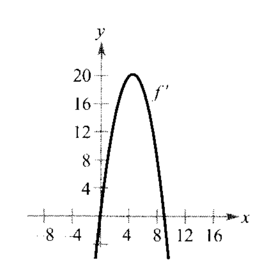


En los Ejercicios 71-74, usar la gráfica de f' para esbozar las de f y f''.

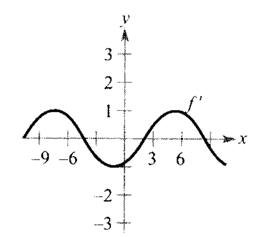
71.



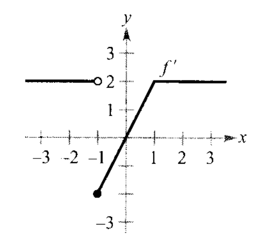
72.



73.



74.



(Sugerido por Bill Fox, Moberly Area Community College, Moberly, MO.)



3.7 Problemas de optimización

CONTENIDO ▪
Problemas de aplicación de máximos y mínimos ▪

Problemas de aplicación de máximos y mínimos

Una de las aplicaciones más frecuentes del Cálculo consiste en la determinación de valores máximos o mínimos. Téngase en cuenta cuántas veces hablamos de máximo beneficio, mínimo coste, voltaje máximo, forma óptima, tamaño mínimo, máxima resistencia o máxima distancia. Antes de entrar en la resolución de este tipo de problemas, veamos un ejemplo.

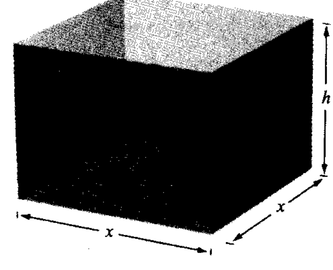


FIGURA 3.51
Caja abierta con base cuadrada: $S = x^2 + 4xh = 108$.

EJEMPLO 1 Cálculo de un valor máximo

Un fabricante desea diseñar una caja abierta con base cuadrada y un área de 108 pulgadas cuadradas de superficie, como indica la Figura 3.51. ¿Qué dimensiones producen la caja de máximo volumen?

Solución: Como la base es cuadrada, el volumen de la caja viene dado por

$$V = x^2h \qquad \text{Ecuación primaria}$$

(Esta ecuación se llama **ecuación primaria** porque da una fórmula para la magnitud que ha de ser optimizada.) El área de la caja es

$$S = (\text{área de la base}) + (\text{área de los cuatro lados})$$

$$S = x^2 + 4xh = 108 \qquad \text{Ecuación secundaria}$$

Como queremos optimizar V, la expresamos en función de una sola variable. A tal fin, podemos despejar h en la ecuación $x^2 + 4xh = 108$ en términos de x, obteniendo $h = (108 - x^2)/(4x)$. Sustituyendo en la ecuación primaria se obtiene

$$\begin{aligned} V &= x^2h && \text{Función de dos variables} \\ &= x^2\left(\frac{108 - x^2}{4x}\right) && \text{Sustituir } h \\ &= 27x - \frac{x^3}{4} && \text{Función de una variable} \end{aligned}$$

Antes de hallar el valor de x que dará el máximo valor para V, hemos de determinar el *dominio admisible*. Es decir, ¿qué valores de x tienen sentido en este problema? Sabemos que $V \geqslant 0$. Y también que x ha de ser no negativo y el área de la base ($A = x^2$) es a lo sumo 108. Por tanto, el dominio admisible es

$$0 \leqslant x \leqslant \sqrt{108} \qquad \text{Dominio admisible}$$

Para maximizar V, buscamos sus números críticos.

> Puede comprobarse la respuesta representando en una calculadora el volumen
>
> $$V = 27x - \frac{x^3}{4}$$
>
> Usar una ventana con
>
> $$0 \leqslant x \leqslant \sqrt{108} \approx 10{,}4$$
>
> y
>
> $$0 \leqslant y \leqslant 120,$$
>
> y la tecla «trace» para determinar el valor máximo de V.

$$\frac{dV}{dx} = 27 - \frac{3x^2}{4} = 0 \qquad \text{Igualar la derivada a cero}$$

$$3x^2 = 108$$

$$x = \pm 6 \qquad \text{Números críticos}$$

Evaluando V en el número crítico ($x = 6$) que está en el dominio y en sus puntos terminales, vemos que $V(0) = 0$, $V(6) = 108$, y $V(\sqrt{108}) = 0$. Por consiguiente, V es máximo para $x = 6$ y las dimensiones de la caja, en ese caso, son $(6 \times 6 \times 3)$ pulgadas. □

En el Ejemplo 1 había infinitas cajas abiertas con 108 pulgadas cuadradas de área. Para empezar a resolver el problema, uno puede preguntarse qué forma parece ofrecer un volumen máximo. ¿Una caja muy alta, muy baja, casi cúbica?

Podríamos calcular, incluso, unos cuantos volúmenes de casos concretos, como en la Figura 3.52, para ver si intuimos cuál es la forma óptima. Es importante no iniciar la resolución de un problema hasta que se tenga claro cuál es el problema.

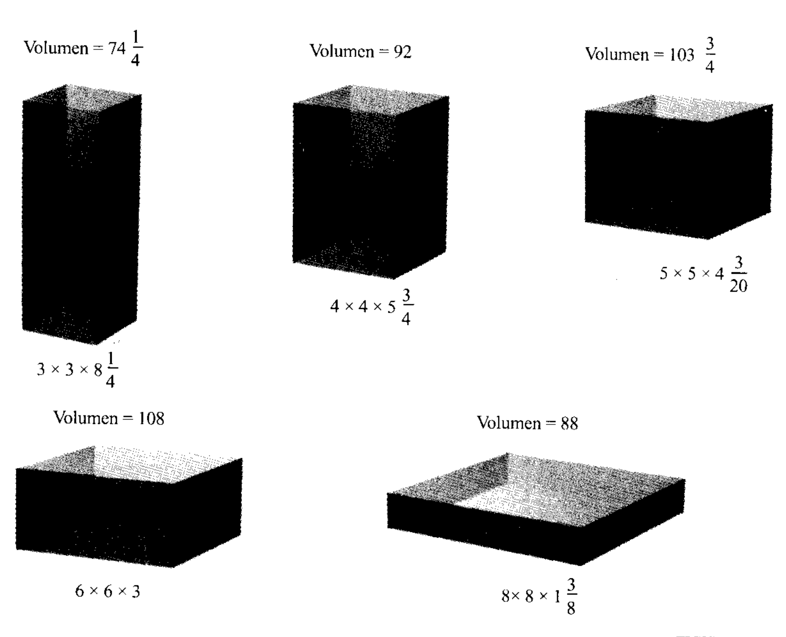


FIGURA 3.52
¿Cómo sería la caja de volumen máximo?

El Ejemplo 1 ilustra la estrategia a seguir en la resolución de problemas de valores máximos y mínimos.

Estrategia para resolver problemas de optimización

1. Asignar símbolos a todas las magnitudes *a determinar*.
2. Escribir una **ecuación primaria** para la magnitud que debe ser optimizada.
3. Reducir la ecuación primaria a una ecuación con *sólo una variable independiente*. Eso puede exigir utilizar **ecuaciones secundarias** que relacionen las variables independientes de la ecuación primaria.
4. Determinar el dominio de la ecuación primaria. Esto es, hallar los valores para los que el problema planteado tiene sentido.
5. Determinar el deseado valor máximo o mínimo mediante las técnicas del Cálculo discutidas en las Secciones 3.1 a 3.4.

Nota. Al efectuar el paso 5, recuérdese que para hallar el valor máximo o mínimo de una función continua f en un intervalo cerrado, hay que comparar los valores de f en sus números críticos con sus valores en los puntos terminales del intervalo.

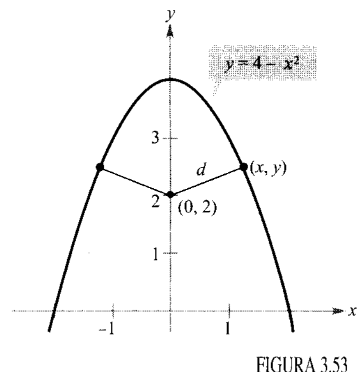


FIGURA 3.53
La magnitud a minimizar es la distancia: $d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2}$.

EJEMPLO 2 Cálculo de una distancia mínima

¿Qué puntos de la gráfica de $y = 4 - x^2$ están más cerca del punto (0, 2)?

Solución: La Figura 3.53 sugiere que hay dos puntos a distancia mínima del punto (0, 2). La distancia entre el punto (0, 2) y un punto (x, y) de la gráfica de $y = 4 - x^2$ viene dada por

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2}$$

Usando la ecuación secundaria $y = 4 - x^2$ podemos reescribir la primaria así:

$$d = \sqrt{x^2 + (4 - x^2 - 2)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$$

Como d es mínima cuando la expresión que está bajo el radical es mínima, será suficiente hallar los números críticos de $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$. Nótese que el dominio de f es toda la recta real. Derivando se obtiene

$$f'(x) = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3) = 0$$

$$x = 0, \sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

El criterio de la primera derivada asegura que en $x = 0$ hay un máximo relativo, mientras que $x = \sqrt{3/2}$ y $x = -\sqrt{3/2}$ producen la mínima distancia. Por tanto, los puntos más cercanos son $(\sqrt{3/2}, 5/2)$ y $(-\sqrt{3/2}, 5/2)$. □

EJEMPLO 3 Cálculo de un área mínima

Una página rectangular ha de contener 24 pulgadas cuadradas de texto, con márgenes superior e inferior de 1,5 pulgadas y laterales de 1 pulgada (Figura 3.54). ¿Qué dimensiones de la página requieren la mínima cantidad de papel?

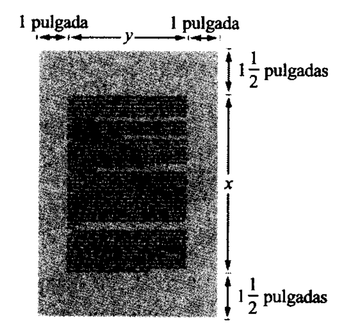


FIGURA 3.54
La cantidad a minimizar es el área: $A = (x + 3)(y + 2)$.

Solución: El área A que debemos minimizar viene dada por

$$A = (x + 3)(y + 2) \qquad \text{Ecuación primaria}$$

El área ocupada por el texto es

$$24 = xy \qquad \text{Ecuación secundaria}$$

Despejando $y = 24/x$ de aquí y sustituyendo en la ecuación primaria obtenemos

$$A = (x + 3)\left(\frac{24}{x} + 2\right) = 30 + 2x + \frac{72}{x} \qquad \text{Función de una variable}$$

Como x ha de ser positiva, sólo nos interesan los valores de A para $x > 0$. Con el fin de encontrar los números críticos, derivamos respecto de x.

$$\frac{dA}{dx} = 2 - \frac{72}{x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 36$$

Por tanto, los números críticos son $x = \pm 6$. No hay que tener en cuenta $x = -6$ porque está fuera del dominio admisible. El criterio de la primera derivada confirma que A es mínima para $x = 6$. En consecuencia, $y = \frac{24}{6} = 4$ y las dimensiones de la página deben ser $x + 3 = 9$ pulgadas por $y + 2 = 6$ pulgadas. □

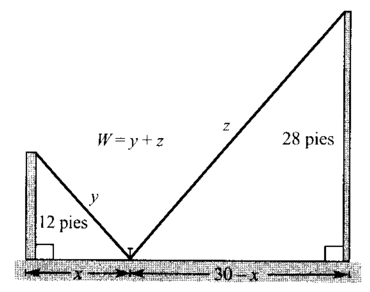


FIGURA 3.55
La magnitud a minimizar es la longitud. En el esbozo se ve que x puede variar entre 0 y 30.

EJEMPLO 4 Cálculo de una longitud mínima

Dos postes, de 12 y 28 pies de altura, distan 30 pies. Hay que conectarlos mediante un cable que esté atado en algún punto del suelo entre ellos. ¿En qué punto ha de amarrarse al suelo con el fin de utilizar la menor cantidad de cable que sea posible?

Solución: Sea W la longitud a minimizar. A la vista de la Figura 3.55 podemos escribir

$$W = y + z \qquad \text{Ecuación primaria}$$

En este problema, en vez de despejar y en términos de z, o viceversa, podemos despejar ambas en términos de una tercera variable x (véase Figura 3.55). Por el teorema de Pitágoras,

$$x^2 + 12^2 = y^2 \quad \Longrightarrow \quad y = \sqrt{x^2 + 144}$$
$$(30 - x)^2 + 28^2 = z^2 \quad \Longrightarrow \quad z = \sqrt{x^2 - 60x + 1.684}$$

Así pues, W viene dada por

$$\begin{aligned} W &= y + z \\ &= \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1.684}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 30 \end{aligned}$$

Derivando W respecto de x obtenemos

$$\frac{dW}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1.684}}$$

Haciendo $dW/dx = 0$, obtenemos

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1.684}} = 0$$

$$x\sqrt{x^2 - 60x + 1.684} = (30 - x)\sqrt{x^2 + 144}$$

$$x^2(x^2 - 60x + 1.684) = (30 - x)^2(x^2 + 144)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1.684x^2 = x^4 - 60x^3 + 1.044x^2 - 8.640x + 129.600$$

$$640x^2 + 8.640x - 129.600 = 0$$

$$320(x - 9)(2x + 45) = 0$$

$$x = 9, -22{,}5$$

Como $x = -22{,}5$ no está en el intervalo $[0, 30]$ y

$$W(0) \approx 53{,}04, \qquad W(9) = 50, \qquad \text{y} \qquad W(30) \approx 60{,}31$$

concluimos que el cable ha de amarrarse a 9 pies del poste de 12 pies de altura. □

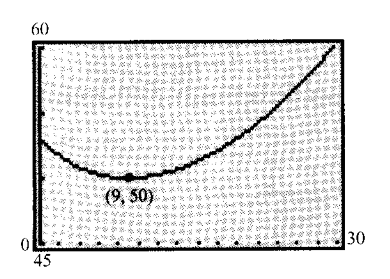


FIGURA 3.56
Puede verificarse el valor mínimo de W representando la gráfica en la calculadora.

En el Ejemplo 4 vemos que los problemas de optimización pueden requerir mucho trabajo algebraico. En una calculadora se puede comprobar que $x = 9$ da el mínimo valor de W, sin más que representar la gráfica de

$$W = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1.684}$$

como muestra la Figura 3.56.

En los cuatro ejemplos anteriores el valor extremo ocurría en un número crítico. Aunque es lo que sucede con frecuencia, recordemos que puede estar también en un punto terminal del intervalo, como confirma el Ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Un máximo en punto terminal

Con cuatro pies de alambre se desean construir un círculo y un cuadrado. ¿Cuánto alambre hay que emplear en cada figura para lograr que entre ambas encierren el área máxima posible?

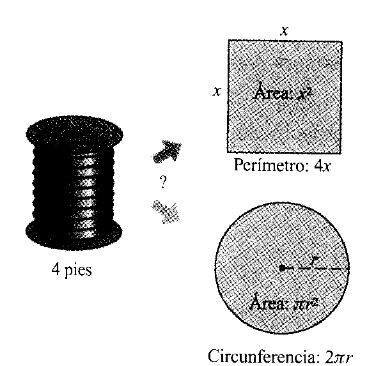


FIGURA 3.57
Deseamos maximizar el área: $A = x^2 + \pi r^2$.

Solución: El área total (Figura 3.57) viene dada por

$$A = (\text{área del cuadrado}) + (\text{área del círculo})$$

$$A = x^2 + \pi r^2 \qquad \text{Ecuación primaria}$$

Como la cantidad total de alambre es 4 pies, se tiene

$$4 = (\text{perímetro del cuadrado}) + (\text{circunferencia del círculo})$$

$$4 = 4x + 2\pi r$$

Así pues, $r = 2(1 - x)/\pi$, que sustituyendo en la ecuación primaria da

$$A = x^2 + \pi\left[\frac{2(1-x)}{\pi}\right]^2$$

$$= x^2 + \frac{4(1-x)^2}{\pi}$$

$$= \frac{1}{4}[(\pi + 4)x^2 - 8x + 4]$$

El dominio admisible es $0 \leqslant x \leqslant 1$, restringido por el perímetro del cuadrado. Puesto que

$$\frac{dA}{dx} = \frac{2(\pi + 4)x - 8}{\pi}$$

| Nota. ¿Cuál sería la respuesta si el Ejemplo 5 preguntase por las dimensiones necesarias para encerrar el área mínima posible?

el único número crítico en (0, 1) es $x = 4/(\pi + 4) \approx 0{,}56$. Por tanto, usando

$$A(0) \approx 1{,}273, \qquad A(0{,}56) \approx 0{,}56, \qquad \text{y} \qquad A(1) = 1$$

concluimos que el área máxima ocurre cuando $x = 0$, es decir, cuando todo el alambre se dedica a construir el círculo. □

Revisemos las ecuaciones primarias utilizadas en los cinco ejemplos precedentes. Aunque muy simples, estos cinco ejemplos han llevado a ecuaciones complicadas:

$$V = 27x - \frac{x^3}{4} \qquad W = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1.684}$$

$$d = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4} \qquad A = \frac{1}{\pi}[(\pi + 4)x^2 - 8x + 4]$$

$$A = 30 + 2x + \frac{72}{x}$$

Cabe esperar que las aplicaciones realistas de la vida cotidiana lleven a ecuaciones *al menos tan complicadas* como estas cinco. Recordemos que uno de los principales objetivos de este curso es precisamente enseñar a analizar ecuaciones de aspecto apabullante.

Ejercicios de la Sección 3.7

1. ***Investigación numérica, gráfica y analítica*** Hallar dos números positivos cuya suma sea 100 y su producto el máximo posible.
   a) Completar analíticamente seis filas de una tabla como la adjunta, en la que se muestran dos filas.

Primer número x	Segundo número	Producto P
10	$110 - 10$	$10(110 - 10) = 1.000$
20	$110 - 20$	$20(110 - 20) = 1.800$

   b) Usar una calculadora para generar nuevas filas. Usando la tabla, estimar la solución.
   c) Expresar el producto P como función de x.
   d) Representar en la calculadora la función del apartado *c*) y estimar la solución a la vista de esa gráfica.
   e) Hallar, por las técnicas del Cálculo, el número crítico de la función y encontrar entonces los dos números requeridos.

En los Ejercicios 2-6, calcular dos números positivos que cumplan los requisitos indicados.

2. Suma S y producto máximo.
3. Producto 192 y suma mínima.
4. Producto 192 y la suma del primero más el triple del segundo mínima.
5. El segundo número es el inverso del primero y la suma es mínima.
6. La suma del primero más el doble del segundo es 100, y el producto máximo.

En los Ejercicios 7 y 8, calcular la longitud y la anchura de un rectángulo con el perímetro dado y área máxima.

7. Perímetro: 100 metros.
8. Perímetro: P unidades.

En los Ejercicios 9 y 10, calcular la longitud y la anchura de un rectángulo con el área dada y perímetro mínimo

9. Área: 64 pies cuadrados.
10. Área: A cm^2.

En los Ejercicios 11 y 12, hallar el punto de la gráfica que está más cerca del punto especificado.

	Función	*Intervalo*
11.	$f(x) = \sqrt{x}$	$(4, 0)$
12.	$f(x) = x^2$	$\left(2, \frac{1}{2}\right)$

13. ***Reacción química*** En una reacción autocatalítica, el producto formado es catalizador de la reacción. Si Q_0 es la cantidad de sustancia inicial y x la de catalizador formado, el ritmo de reacción es

$$\frac{dQ}{dx} = kx(Q_0 - x)$$

¿Para qué valor de x es máximo el ritmo de la reacción?

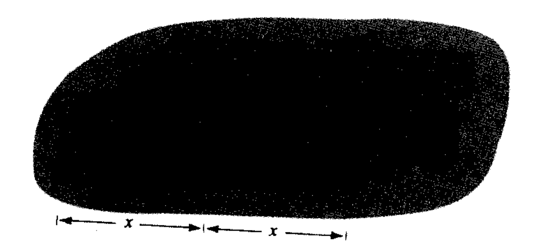
14. ***Control del tráfico*** Un cierto día, el flujo (número de automóviles por hora) de una carretera congestionada es

$$F = \frac{v}{22 + 0{,}02v^2}$$

donde v es la velocidad del tráfico en millas/h. ¿Qué velocidad hace máximo el flujo?

15. ***Área*** Un ganadero desea vallar un prado rectangular adyacente a un río. El prado ha de tener 180.000 m^2 con el fin de proporcionar suficiente pasto al ganado. ¿Qué dimensiones debe tener para que requiera la menor cantidad de valla posible, teniendo en cuenta que no hay que poner valla en el lado que da al río?

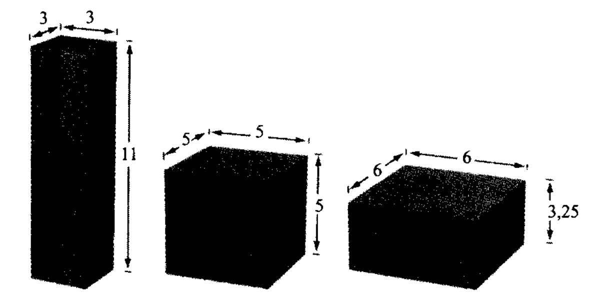
16. ***Área*** Un granjero dispone de 200 metros de valla para cerrar dos corrales rectangulares adyacentes (véase figura). ¿Qué dimensiones harán que el área encerrada sea máxima?



17. ***Volumen***
   a) Comprobar que los sólidos de la figura tienen todos 150 de área superficial.

b) Calcular el volumen de cada uno de ellos.

c) Determinar las dimensiones del sólido rectangular, con base cuadrada, de máximo volumen de entre todos los que tienen un área de 50.



18. ***Investigación numérica, gráfica y analítica*** Se desea construir una caja abierta de volumen máximo a partir de una pieza cuadrada de material de 24 cm de lado, cortando cuadrados iguales en las esquinas (véase figura).

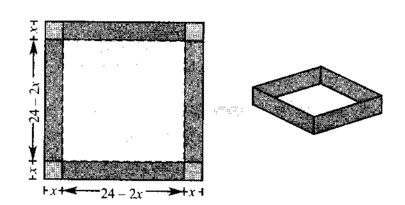
a) Completar analíticamente seis filas de una tabla como la adjunta, en la que se muestran dos filas. Usar la tabla para estimar el volumen máximo.

Altura	Longitud y anchura	Volumen
1	$24 - 2(1)$	$1[24 - 2(1)]^2 = 484$
2	$24 - 2(2)$	$2[24 - 2(2)]^2 = 800$

b) Expresar el volumen V como función de x.

c) Usar el Cálculo para hallar el número crítico de esa función y su valor máximo.

d) Representar en la calculadora esa función y verificar en la gráfica el volumen máximo.



19. *a*) Resolver el Ejercicio 18 para una pieza de s metros de lado.

b) Si las dimensiones de la pieza cuadrada se doblan, ¿cómo cambia el volumen?

20. ***Investigación numérica, gráfica y analítica*** Una pista de entrenamiento está formada por un rectángulo y un semicírculo adosado a su lado inferior y otro al superior, con un perímetro total de 200 pies.

a) Dibujar un esquema del problema, denotando por x la longitud y por y la anchura del rectángulo.

b) Completar analíticamente seis filas de una tabla como la adjunta, que muestra dos filas solamente. Usar la tabla para estimar el área máxima de la región rectangular.

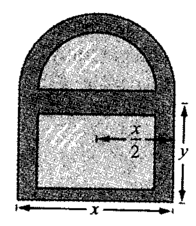
Longitud x	Anchura	Área
10	$\frac{2}{\pi}(100 - 10)$	$(10)\frac{2}{\pi}(100 - 10) \approx 573$
20	$\frac{2}{\pi}(100 - 20)$	$(20)\frac{2}{\pi}(100 - 20) \approx 1.019$

c) Expresar el área A en función de x.

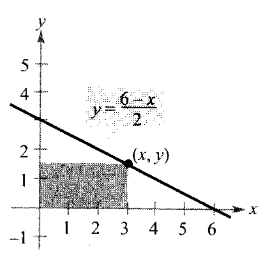
d) Usar el Cálculo para hallar el número crítico de esa función y su valor máximo.

e) Representar en la calculadora esa función y verificar en la gráfica el área máxima.

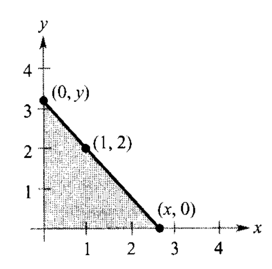
21. ***Área*** Se llama ventana de Norman a la formada por un semicírculo unido a una ventana rectangular ordinaria (véase figura). Hallar las dimensiones de una ventana de Norman que tenga 16 pies de perímetro y área máxima.



22. ***Área*** Un rectángulo está acotado por los ejes y por la gráfica de $y = (6 - x)/2$ (vése figura). ¿Qué longitud debe tener el rectángulo para que su área sea máxima?

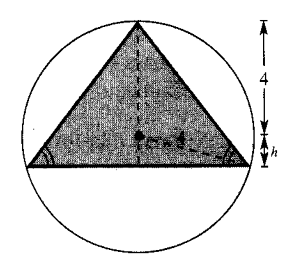


23. ***Longitud*** Un triángulo rectángulo está formado en el primer cuadrante por los ejes coordenados y por una recta que pasa por el punto (1, 2) (véase figura en la página siguiente).

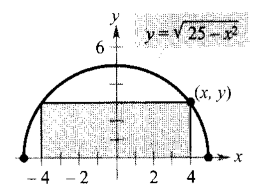


a) Expresar la longitud L de la hipotenusa como función de x.
b) Representarla en una calculadora con el fin de estimar el mínimo de esa longitud.
c) Calcular los vértices del triángulo de área mínima.

24. ***Área*** Calcular las dimensiones del triángulo isósceles de mayor área que puede inscribirse en un círculo de radio 4 (véase figura).



25. ***Área*** Un rectángulo está limitado por el eje x y por el semicírculo $y = \sqrt{25 - x^2}$. ¿Para qué longitud y anchura del rectángulo se hace mínima su área?



26. ***Área*** Calcular las dimensiones del mayor rectángulo inscrito en un semicírculo de radio r (véase Ejercicio 25).

27. ***Área*** Hallar las dimensiones del trapecio de área máxima inscrito en un semicírculo de radio r.

28. ***Área*** Una página ha de contener 30 pulgadas cuadradas de texto con márgenes de 1 pulgada por todas partes. ¿Qué dimensiones de la página requieren la mínima cantidad de papel?

29. ***Investigación numérica, gráfica y analítica*** Se desea fabricar un cilindro circular recto con 22 pulgadas cúbicas de capacidad (unas 12 onzas de líquido).

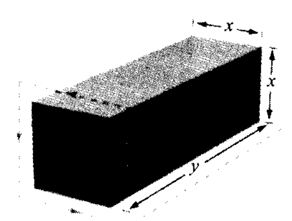
a) Completar analíticamente seis filas de una tabla como la adjunta, donde sólo se muestran dos filas.

Radio r	Altura	Área
0,2	$\frac{22}{\pi(0{,}2)^2}$	$2\pi(0{,}2)\left[0{,}2 + \frac{22}{\pi(0{,}2)^2}\right] \approx 220{,}3$
0,4	$\frac{22}{\pi(0{,}4)^2}$	$2\pi(0{,}4)\left[0{,}4 + \frac{22}{\pi(0{,}4)^2}\right] \approx 111{,}1$

b) Usar la calculadora gráfica para generar nuevas filas de la tabla y usar ésta para estimar el área mínima de la superficie.
c) Expresar el área S de la superficie en función de r.
d) Representar en la calculadora esa función y estimar, a la vista de la gráfica, el área mínima.
e) Usar el Cálculo para hallar el número crítico de esa función y calcular las dimensiones que producen área mínima.

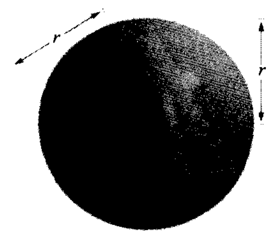
30. ***Área de la superficie*** Calcular las dimensiones del cilindro del Ejercicio 29 para que tenga un volumen de V_0 unidades cúbicas.

31. ***Volumen*** Un paquete enviado por correo puede tener un perímetro de la línea de trazos de 108 pulgadas (véase figura). Hallar las dimensiones que producen volumen máximo, supuesto que la sección es cuadrada.



32. ***Volumen*** Repetir el Ejercicio 31 para un paquete cilíndrico (ahora la sección es circular).

33. ***Volumen*** Hallar el volumen máximo de un cono circular recto inscrito en una esfera de radio r (véase figura).



34. ***Volumen*** Calcular el volumen máximo de un cono circular recto inscrito en una esfera de radio r.

35. ***Área de la superficie*** Se forma un sólido adosando dos hemisferios a las bases de un cilindro circular rec-

to. El volumen total del sólido es de 12 cm^3. Hallar el radio del cilindro que produce área mínima de la superficie del sólido.

36. ***Coste*** Un depósito industrial, de la forma indicada en el Ejercicio 35, debe tener un volumen de 3.000 pies cúbicos. Si el coste de fabricación de los hemisferios es, por pie cuadrado, doble que el del lateral, calcular las dimensiones que minimizan su coste.

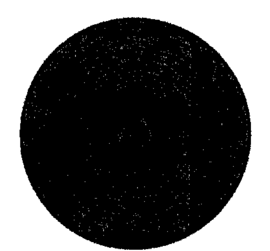
37. ***Área*** La suma de los perímetros de un triángulo equilátero y un cuadrado es 10. Hallar las dimensiones de ambos de manera que se obtenga un área total mínima.

38. ***Área*** Se utilizan 20 pies de hilo para formar dos figuras. En cada uno de los casos siguientes, ¿qué cantidad de hilo debe invertirse en cada figura para lograr que el área encerrada por ambas sea máxima?

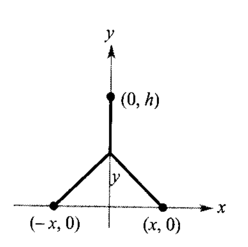
a) Triángulo equilátero y cuadrado.
b) Cuadrado y pentágono regular.
c) Pentágono regular y exágono regular.
d) Exágono regular y círculo.

¿Qué se desprende de todo ello? {*Ayuda:* El área de un polígono regular con n lados de longitud x es $A = (n/4)[\text{ctg}(\pi/n]x^2.$}

39. ***Resistencia de una viga*** Una viga de madera tiene sección rectangular de altura h y anchura w (véase figura). Su resistencia S es directamente proporcional a la anchura y al cuadrado de la altura. ¿Cuáles son las dimensiones de la viga más resistente que se puede cortar en un tronco de 24 pulgadas de diámetro? (*Ayuda:* $S = kh^2w$, donde k es la constante de proporcionalidad).



40. ***Longitud mínima*** Dos fábricas están situadas en las coordenadas $(-x, 0)$ y $(x, 0)$ y su central de suministro de energía en el punto $(0, h)$ (véase figura). Calcular el valor de y que hace mínima la longitud de la conducción de energía a las dos fábricas.



41. ***Alcance de un proyectil*** El alcance R de un proyectil lanzado con velocidad inicial v_0 y con un ángulo θ respecto de la horizontal es

$$R = \frac{v_0^2 \text{ sen } 2\theta}{g}$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Calcular el ángulo θ que produce alcance máximo.

42. ***Flujo de tráfico*** El departamento de la policía de tráfico debe determinar la velocidad límite que pemita un flujo máximo de automóviles por unidad de tiempo, teniendo en cuenta que, a más velocidad, más distancia de seguridad deben mantener entre ellos. Los datos experimentales sobre la distancia de frenada d, en metros, para diversas velocidades v, en km/h, se recogen en la tabla.

v	20	40	60	80	100
d	5,1	13,7	27,2	44,2	66,4

a) Convertir la velocidad a m/s. Usar regresión en la calculadora para ajustar a los datos un modelo del tipo $d(s) = as^2 + bs + c$.

b) Consideremos dos vehículos consecutivos de longitud media 5,5 metros que viajan a la velocidad de seguridad. Sea T la diferencia, en segundos, entre los tiempos en que los dos pasan por un punto concreto de la carretera. Comprobar que esta diferencia de tiempos viene dada por

$$T = \frac{d(s)}{s} + \frac{5{,}5}{s}$$

c) Representar en una calculadora la gráfica de la función T y estimar la velocidad s que minimiza ese tiempo entre vehículos.

d) Determinar, usando el Cálculo, la velocidad que minimiza T. ¿Cuál es el valor mínimo de T? Expresar la velocidad requerida en km/h.

e) Calcular la distancia óptima entre vehículos correspondiente a la velocidad hallada en el apartado *d*).

43. ***Conjetura*** Consideremos las funciones $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ y $g(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ en el dominio [0, 4].

a) Representarlas en la calculadora en ese dominio.

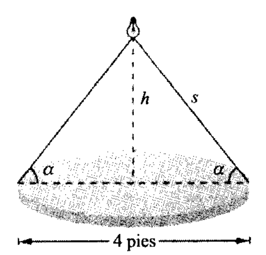
b) Expresar la distancia vertical entre ellas en función de x y hallar, con ayuda del Cálculo, el valor de x donde d es máxima.

c) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a las gráficas de f y g en ese número crítico del apartado

b). Representar las rectas tangentes. ¿Cuál es la relación entre las rectas?

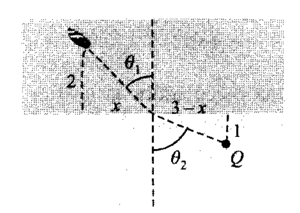
d) Enunciar una conjetura acerca de la relación entre las rectas tangentes a dos gráficas en el valor de x donde la distancia vertical entre ellas es máxima y demostrarla.

44. ***Iluminación*** Una lámpara está situada sobre el centro de una mesa circular de diámetro 4 pies (véase figura). Hallar la altura h para la cual la iluminación I en el perímetro de la mesa es máxima si $I = k\ (\text{sen}\ \alpha)/s^2$, donde k es una constante.



45. ***Iluminación*** La iluminación de una lámpara es directamente proprocional a su intensidad e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la lámpara. Dos lámparas de intensidades I_1, I_2 están separadas una distancia d. ¿Qué punto del segmento que las une tiene iluminación mínima?

46. ***Tiempo mínimo*** Un hombre está en un bote a 2 millas del punto más cercano de la costa y desea ir al punto Q de la figura, 3 millas costa abajo y 1 milla tierra adentro. Puede remar a 2 millas/h y caminar a 4 millas/h. ¿Hacia qué punto de la costa debe dirigirse con el fin de llegar a Q en el menor tiempo posible?



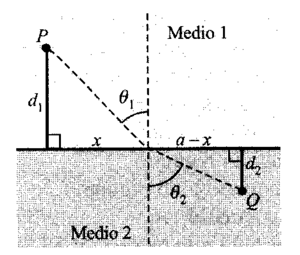
47. ***Tiempo mínimo*** Rehacer el ejercicio anterior suponiendo que el hombre puede navegar a v_1 millas/h y caminar a v_2 millas/h. Demostrar que si θ_1 y θ_2 denotan los ángulos de la figura, nuestro hombre alcanzará el punto Q en tiempo mínimo cuando

$$\frac{\text{sen}\ \theta_1}{v_1} = \frac{\text{sen}\ \theta_2}{v_2}$$

48. ***Tiempo mínimo*** Cuando las ondas luminosas, viajando por un medio transparente, llegan a la superficie de otro medio transparente, cambian de dirección. Este cambio de dirección se llama **refracción** y viene descrito por la **ley de la refracción de Snell**.

$$\frac{\text{sen}\ \theta_1}{v_1} = \frac{\text{sen}\ \theta_2}{v_2}$$

donde θ_1 y θ_2 denotan los ángulos de la figura y v_1, v_2 las velocidades de la luz en los dos medios. Demostrar que este problema es equivalente al Ejercicio 47 y que la luz viaja de P a Q siguiendo la trayectoria de tiempo mínimo.



49. Esbozar la gráfica de $f(x) = 2 - 2\ \text{sen}\ x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.

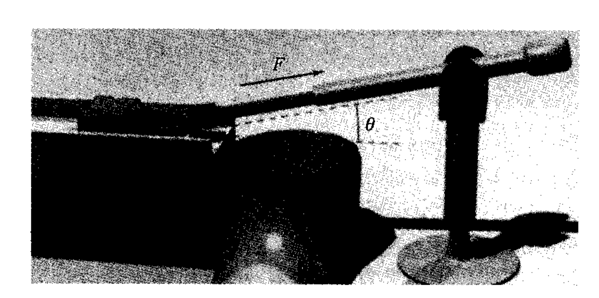
a) Calcular la distancia del origen a cada una de las intersecciones con los ejes.

b) Expresar la distancia d del origen a un punto de la gráfica de f como función de x. Usar la calculadora para representar d y hallar la distancia mínima.

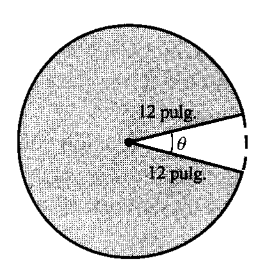
c) Calcular, con ayuda de la calculadora, el valor de x que minimiza la función d en ese intervalo. ¿Cuál es la distancia mínima?

(Sugerido por Tim Chapell, Penn Valley Community College, Kansas City, MO.)

50. ***Fuerza mínima*** El componente de la figura se ha diseñado con el fin de deslizar un bloque de peso W a lo largo de la mesa hasta el vertedero. El bloque sufre una fuerza de rozamiento proporcional a su peso aparente. Sea k la constante de proporcionalidad. Calcular la fuerza mínima F necesaria para deslizar el bloque y el valor correspondiente de θ. (*Ayuda:* $F \cos \theta$ es la fuerza en la dirección de movimiento, y F sen θ la fuerza que tiende a levantar el bloque. Por tanto, el peso aparente del bloque es $W - F$ sen θ).



51. ***Volumen*** El sector de la figura, cortado con ángulo central θ en un círculo de 12 pulgadas de radio, se utiliza, uniendo sus lados, para formar un cono. Hallar qué θ produce un cono de máximo volumen.



52. ***Investigación numérica, gráfica y analítica*** Las secciones de un canal de riego son trapecios isósceles con tres lados de 8 pies de longitud (véase figura). Determinar el ángulo de elevación θ tal que el área de la sección es máxima, siguiendo estos pasos:

a) Completar analíticamente seis filas de una tabla como la adjunta, en la que se muestran dos filas.

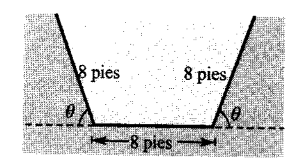
Base 1	Base 2	Altura	Área
8	$8 + 16 \cos 10°$	$8 \operatorname{sen} 10°$	$\approx 22{,}21$
8	$8 + 16 \cos 20°$	$8 \operatorname{sen} 20°$	$\approx 42{,}5$

b) Generar, con ayuda de la calculadora, nuevas filas y estimar el área máxima de la sección.

c) Expresar el área A de la sección en función de θ.

d) Usar técnicas del Cálculo para hallar el número crítico de esa función y el ángulo que da máxima área.

e) Representar en la calculadora esa función y verificar el valor máximo del área.



53. ***Investigación numérica, gráfica y analítica*** Un muro de 2 m está situado a 7 m de un silo. Una cinta transportadora de grano ha de llegar desde el suelo hasta lo alto del silo (véase figura). Completar lo que sigue con el fin de hallar la longitud mínima posible de la cinta.

a) Completar analíticamente seis filas de una tabla como la adjunta, en la que se muestran dos filas.

θ	L_1	L_2	$L_1 + L_2$
0,1	$\dfrac{2}{\operatorname{sen}(0{,}1)}$	$\dfrac{7}{\cos(0{,}1)}$	$\approx 27{,}1$
0,2	$\dfrac{2}{\operatorname{sen}(0{,}2)}$	$\dfrac{7}{\cos(0{,}2)}$	$\approx 17{,}2$

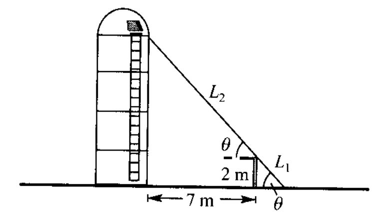
b) Generar, con ayuda de la calculadora, nuevas filas y estimar la longitud mínima de la cinta.

c) Expresar la longitud L de la sección en función de θ.

d) Representar en la calculadora esa función y estimar, a la vista de la gráfica, la longitud mínima. Comparar con la estimación del apartado *b*).

e) Usar el Cálculo para hallar el número crítico de esa función y el ángulo que proporciona la longitud mínima de cinta.

f) Determinar la altura del silo para la que la cinta requerida tiene longitud mínima.

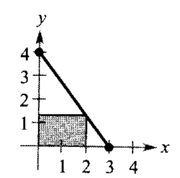


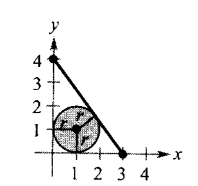
54. ***Rozamiento*** La eficiencia E de un cierto tornillo viene dada por

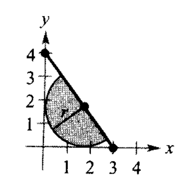
$$E = \frac{\operatorname{tg} \phi(1 - \mu \operatorname{tg} \phi)}{\mu + \operatorname{tg} \phi}$$

donde μ es el coeficiente de rozamiento al deslizamiento y ϕ el ángulo que forma el plano de inclinación de la hélice del tornillo con un plano perpendicular a su eje. Hallar el valor de ϕ que consigue la máxima eficiencia para $\mu = 0{,}1$.

55. ***Redacción*** La figura muestra un rectángulo, un círculo y un semicírculo inscritos en un triángulo limitado por los ejes y por la recta que une (3, 0) con (0, 4). Hallar las dimensiones de cada una de esas figuras de manera que su área sea máxima. Discutir si el Cálculo resulta eficaz en la resolución del problema. Explicar la respuesta.

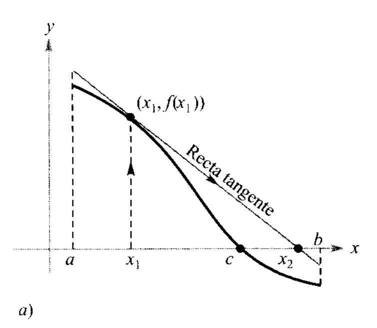




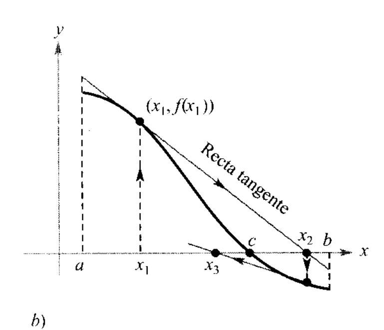


3.8 El método de Newton

CONTENIDO ▪
El método de Newton ▪
Soluciones algebraicas de ecuaciones polinómicas ▪



a)



b)

FIGURA 3.58
La x-intersección de la recta tangente aproxima el cero de f.

El método de Newton

Vamos a presentar ahora una técnica que permite aproximar los ceros de una función. Se llama **método de Newton** y utiliza las rectas tangentes para aproximar la gráfica de la función cerca de sus x-intersecciones.

Para ver cómo funciona el método de Newton, sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, el teorema del valor intermedio asegura la existencia de al menos un cero en el intervalo (a, b). Supongamos que estimamos su posición en

$$x = x_1 \qquad \text{Primera estimación}$$

como indica la Figura 3.58a. El método de Newton se basa en que la gráfica de f y la recta tangente en $(x_1, f(x_1))$ cruzan ambas el eje x aproximadamente por el mismo punto. Como es muy fácil calcular la x-intersección de la recta tangente, podemos usarla como segunda estimación (usualmente mejor que la primera) para el cero de f. La recta tangente pasa por el punto $(x_1, f(x_1))$ con pendiente $f'(x_1)$. En forma punto-pendiente la ecuación de esa recta tangente es, por tanto,

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$
$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$$

Haciendo $y = 0$, y despejando x da

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Así pues, de la primera estimación x_1 hemos pasado a una nueva estimación

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad \text{Segunda estimación (véase Figura 3.58}b\text{)}$$

Podemos mejorar x_2 y calcular una tercera estimación

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \qquad \text{Tercera estimación}$$

La aplicación repetida de este proceso constituye el método de Newton.

EL MÉTODO DE NEWTON PARA APROXIMAR CEROS DE FUNCIONES

Sea $f(c) = 0$, donde f es derivable en un intervalo abierto que contiene a c. Para aproximar c pueden seguirse estos pasos.

1. Hacer una estimación inicial x_1 «próxima a» c (una gráfica suele ser útil).
2. Determinar una nueva aproximación
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
3. Si $|x_n - x_{n+1}|$ está dentro de la precisión deseada, x_{n+1} sirve como aproximación final. De lo contrario, volver al paso 2 y calcular una nueva aproximación.

Cada repetición de este proceso se llama una **iteración**.

EL MÉTODO DE NEWTON

Isaac Newton describió por vez primera el método que lleva su nombre en su libro *Method of fluxions*, escrito en 1671, aunque no publicado hasta 1736. Entretanto, en 1690, Joseph Raphson (1648-1715) publicó un artículo que exponía un método muy similar. Por esta razón se cita hoy con frecuencia este método como método de Newton-Raphson.

Nota. Para muchas funciones, unas pocas iteraciones del método de Newton son suficientes para conseguir errores de aproximación muy pequeños, como ilustra el Ejemplo 1.

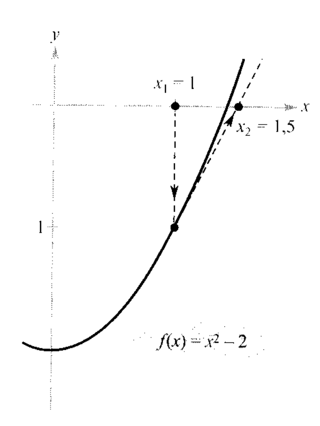


FIGURA 3.59
La primera iteración en el método de Newton.

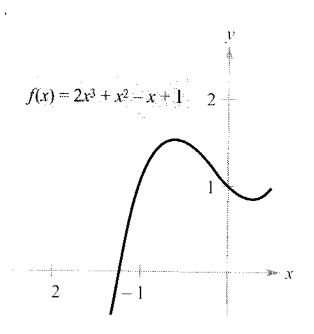


FIGURA 3.60
Después de tres iteraciones del método de Newton el cero de f queda ya aproximado con la precisión requerida.

EJEMPLO 1 Aplicación del método de Newton

Calcular tres iteraciones del método de Newton para aproximar un cero de $f(x) = x^2 - 2$. Usar $x_1 = 1$ como estimación inicial.

Solución: Como $f'(x) = 2x$, el proceso de iteración viene dado en este caso por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

La tabla muestra los cálculos de las tres iteraciones.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	1,000000	−1,000000	2,000000	−0,500000	1,500000
2	1,500000	0,250000	3,000000	0,083333	1,416667
3	1,416667	0,006945	2,833334	0,002451	1,414216
4	1,414216				

Claro está que los dos ceros de esta función son conocidos, $\pm\sqrt{2}$. Con seis cifras decimales es $\sqrt{2} = 1,414214$. Así pues, con tan sólo tres iteraciones del método de Newton hemos obtenido una aproximación que difiere en menos de 0,000002 de la solución exacta. La Figura 3.59 muestra la primera iteración de este ejercicio. □

EJEMPLO 2 Aplicación del método de Newton

Usar el método de Newton para aproximar los ceros de

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$$

Continuar las iteraciones hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de 0,0001.

Solución: Comenzamos esbozando la gráfica de f en la Figura 3.60. En ella observamos que la función tiene un único cero, que está cerca de $x = -1,2$. A continuación, derivamos f y escribimos la fórmula de iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2x_n^3 + x_n^2 - x_n + 1}{6x_n^2 + 2x_n - 1}$$

Los cálculos se presentan en la tabla siguiente.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	−1,20000	0,18400	5,24000	0,03511	−1,23511
2	−1,23511	0,00771	5,68276	0,00136	−1,23375
3	−1,23375	0,00001	5,66533	0,00000	−1,23375
4	−1,23375				

Como las dos aproximaciones sucesivas difieren ya en menos de 0,0001, podemos dar como estimación final del cero −1,23375. □

El método de Newton es muy eficaz en conjunción con una calculadora . El programa que sigue es para una Texas Instruments *TI-83* (para correr el programa, introducir la función como Y_1 y la estimación inicial como X).

```
PROGRAM:NEWTON
:(Xmax-Xmin)/100→D
:1→I
:Disp "INITIAL GUESS"
:Input X
:Lbl 1
:X-Y1/nDeriv(Y1,X,
X,D)→R
:If abs(X-R)≤abs(X/
1E10)
:Goto 2
:R→X
:I+1→I
:Goto 1
:Lbl 2
:Disp "ROOT=",R
:Disp "ITER=",I
```

Cuando, como sucede en los Ejemplos 1 y 2, las aproximaciones tienden hacia un valor límite, se dice que la sucesión $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\cdots$ **converge**. Además, si el límite es c se puede demostrar que c es necesariamente un cero de f.

El método de Newton no siempre da una sucesión convergente. La Figura 3.61 sugiere una situación en la que puede suceder esto. Como el método de Newton exige dividir por $f'(x_n)$, es claro que fallará cuando esa derivada sea nula para cualquier x_n de la sucesión. Este problema se puede soslayar cambiando el x_1 inicial. Otra situación en la que el método de Newton falla se ilustra en el próximo ejemplo.

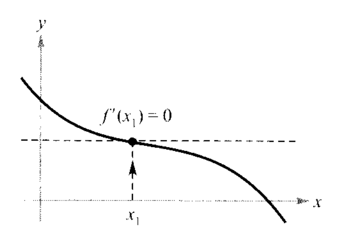


FIGURA 3.61
El método de Newton no converge si $f'(x_n) = 0$.

EJEMPLO 3 Un caso en el que el método de Newton falla

Usando $x_1 = 0{,}1$, probar que el método de Newton no converge para $f(x) = x^{1/3}$.

Solución: Como $f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-2/3}$, la fórmula de iteración es:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{1/3}}{\frac{1}{3}x_n^{-1/3}} = x_n - 3x_n = -2x_n$$

La tabla, que indica los cálculos, y la Figura 3.62 permiten ver que x_n continúa creciendo en magnitud al hacer $n \to \infty$ y que, por tanto, el límite de la sucesión no existe.

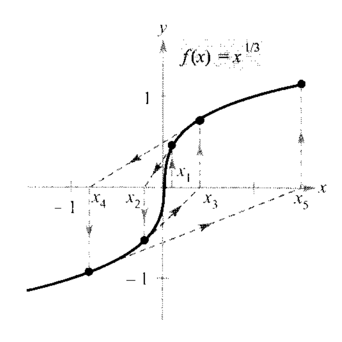


FIGURA 3.62
El método de Newton no converge para cualquier valor de x distinto del cero real de f.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	0,10000	0,46416	1,54720	0,30000	−0,20000
2	−0,20000	−0,58480	0,97467	−0,60000	0,40000
3	0,40000	0,73681	0,61401	1,20000	−0,80000
4	−0,80000	−0,92832	0,38680	−2,40000	−1,60000

□



NIELS HENRIK ABEL (1802-1829)



EVARISTE GALOIS (1811-1832)

Aunque sus vidas fueron breves, las contribuciones de Abel y Galois en Análisis y Álgebra proyectaron una influencia extraordinaria.

Nota. En el Ejemplo 3 la estimación 0,1 inicial no lleva a una sucesión convergente. Inténtese ver que también falla el método de Newton para otras elecciones del x_1 inicial (distintas del cero exacto).

Puede demostrarse que una condición suficiente para asegurar la convergencia del método de Newton a un cero de f es que

$$\left|\frac{f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1 \qquad \text{Condición de convergencia}$$

en un intervalo abierto que contenga al cero. Así, en el Ejemplo 1 este criterio da $f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, y

$$\left|\frac{f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| = \left|\frac{(x^2-2)(2)}{4x^2}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}\right| \qquad \text{Ejemplo 1}$$

En el intervalo (1, 3), esta cantidad es menor que 1, luego la convergencia del método de Newton queda garantizada..Por otra parte, en el Ejemplo 3 se tiene $f(x) = x^{1/3}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$, y

$$\left|\frac{f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| = \left|\frac{x^{1/3}(-2/9)(x^{-5/3})}{(1/9)(x^{-4/3})}\right| = 2 \qquad \text{Ejemplo 3}$$

que no es menor que 1 para ningún valor de x, luego el método de Newton no converge.

Soluciones algebraicas de ecuaciones polinómicas

Los ceros de funciones como

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

pueden hallarse por técnicas algebraicas, tales como la factorización. Los ceros de otras, como

$$f(x) = x^3 - x + 1$$

no se pueden hallar por métodos algebraicos *elementales*. Esta función particular tiene sólo un cero real, y usando técnicas algebraicas avanzadas se puede ver que es

$$x = -\sqrt[3]{\frac{3 - \sqrt{23/3}}{6}} - \sqrt[3]{\frac{3 + \sqrt{23/3}}{6}}$$

Como la solución *exacta* está expresada en términos de raíces cuadradas y cúbicas, se llama una **solución por radicales**.

Nota. Intentar aproximar el cero real de $f(x) = x^3 - x + 1$ y comparar el resultado obtenido con la solución exacta que acabamos de dar.

La determinación de soluciones por radicales de ecuaciones polinómicas es uno de los problemas fundamentales del Álgebra. El primer resultado de esta clase fue la fórmula cuadrática, conocida al menos en tiempos de Babilonia. La fórmula general para los ceros de una función cúbica fue descubierta mucho más tarde. En el siglo XVI, el matemático italiano Girolamo Cardano publicó un método para hallar soluciones por radicales para las ecuaciones de grados tres y cuatro. En los 300 años que siguieron, el problema de hallar una fórmula para la ecuación general de grado cinco permaneció abierto. Finalmente, en el siglo XIX, el problema fue resuelto por dos jóvenes matemáticos. Niels Henrik Abel, noruego, y Evariste Galois, francés, demostraron que no es posible resolver una ecuación polinómica general de grado cinco (o superior) por radicales. Claro está que se pueden resolver ciertas ecuaciones especiales, como $x^5 - 1 = 0$, pero Abel y Galois probaron que no existe solución general *por radicales*.

Ejercicios de la Sección 3.8

En los Ejercicios 1-4, completar dos iteraciones del método de Newton para la función, utilizando la estimación inicial que se indica.

1. $f(x) = x^2 - 3, \quad x_1 = 1{,}7$ **2.** $f(x) = 3x^2 - 2, \quad x_1 = 1$

3. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad x_1 = 3$ **4.** $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x_1 = 0{,}1$

En los Ejercicios 5-12, aproximar los ceros de la función. Usar el método de Newton, continuando el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de 0,001. Hallar entonces el cero con una calculadora gráfica y comparar los resultados.

5. $f(x) = x^3 + x - 1$ **6.** $f(x) = x^5 + x - 1$

7. $f(x) = 3\sqrt{x - 1} - x$ **8.** $f(x) = x^3 + 3$

9. $f(x) = x^3 - 3{,}9x^2 + 4{,}79x - 1{,}881$

10. $f(x) = x^4 - 10x^2 - 11$

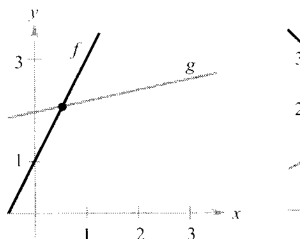
11. $f(x) = x + \operatorname{sen}(x + 1)$

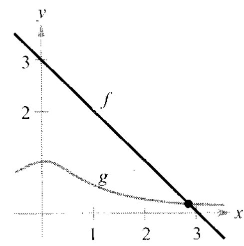
12. $f(x) = x^3 - \cos x$

En los Ejercicios 13-16, aproximar, mediante el método de Newton, el valor de x correspondiente al punto o puntos de intersección de las dos gráficas. Continuar el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de 0,001. [*Ayuda:* Tomar $h(x) = f(x) - g(x)$.]

13. $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = \sqrt{x + 4}$

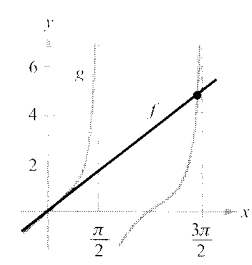
14. $f(x) = 3 - x$, $g(x) = 1/(x^2 + 1)$





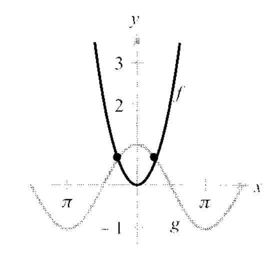
15. $f(x) = x$

$g(x) = \operatorname{tg} x$



16. $f(x) = x^2$

$g(x) = \cos x$



Punto fijo En los Ejercicios 17 y 18, aproximar el punto fijo de la función con dos cifras decimales. [Un punto fijo x_0 de una función f es un valor de x para el cual $f(x_0) = x_0$.]

17. $f(x) = \cos x$ **18.** $f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad 0 < x < \pi$

19. ***Redacción*** Considérese la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

a) Representarla en la calculadora.

b) Usar el método de Newton con $x_1 = 1$ como estimación inicial.

c) Repetir *b*) utilizando $x_1 = \frac{1}{4}$ y observar que el resultado es diferente.

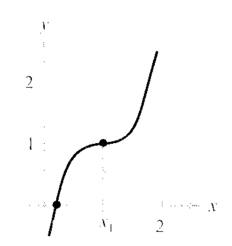
d) Para entender por qué, esbozar las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos $(1, f(1))$ y $(\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4}))$. Hallar la x-intersección de cada recta tangente y compararlas con la primera iteración del método de Newton usando las respectivas estimaciones iniciales.

e) Redactar un breve párrafo resumiendo cómo funciona el método de Newton. Usar los resultados de este ejercicio para describir la importancia de una buena selección para la estimación inicial.

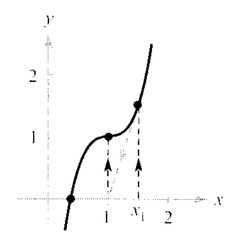
20. ***Redacción*** Repetir el Ejercicio 18 para $f(x) = \operatorname{sen} x$ con las estimaciones iniciales $x_1 = 1{,}8$ y $x_1 = 3$.

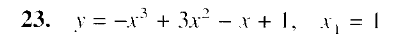
En los Ejercicios 21-24, aplicar el método de Newton con la estimación inicial indicada y explicar por qué falla el método.

21. $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 1, \quad x_1 = 1$

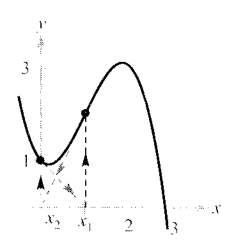


22. $y = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 3, \quad x_1 = \frac{3}{2}$

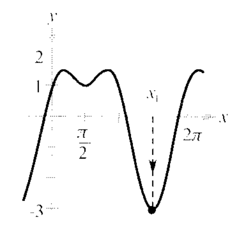




23. $y = -x^3 + 3x^2 - x + 1, \quad x_1 = 1$



24. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x, \quad x_1 = \frac{3\pi}{2}$



En los Ejercicios 25 y 26, usar el método de Newton para obtener una regla general para aproximar el radical propuesto.

25. $x = \sqrt{a}$ [*Ayuda:* Considerar $f(x) = x^2 - a$.]

26. $x = \sqrt[n]{a}$ [*Ayuda:* Considerar $f(x) = x^n - a$.]

En los Ejercicios 27-30, usar los resultados generales de los Ejercicios 25 y 26 para aproximar los radicales indicados con tres cifras decimales.

27. $\sqrt{7}$ **28.** $\sqrt{5}$

29. $\sqrt[4]{6}$ **30.** $\sqrt[3]{15}$

31. Usar el método de Newton para probar que la ecuación

$$x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$$

sirve para aproximar $1/a$ si x_1 es una estimación inicial del inverso de a. Nótese que este método de aproximación de inversos usa sólo las operaciones de producto y resta. [*Ayuda:* Considerar $f(x) = (1/x) - a$.]

32. Usando el resultado del ejercicio anterior, aproximar π con tres decimales aplicando el método de Newton a la función dada.

a) $\frac{1}{3}$ *b)* $\frac{1}{11}$

En los Ejercicios 33 y 34, aproximar π con tres decimales usando el método de Newton y la función propuesta.

33. $f(x) = 1 + \cos x$ **34.** $f(x) = \operatorname{tg} x$

En los Ejercicios 35 y 36, aproximar el número crítico de f en el intervalo $[0, \pi]$. Esbozar la gráfica de f, indicando sus extremos.

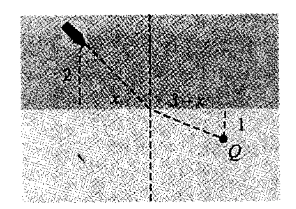
35. $f(x) = x \cos x$ **36.** $f(x) = x \operatorname{sen} x$

En los ejecicios 37-40, repasamos varios problemas tipo de las secciones previas. En cada caso, aplicar el método de Newton para aproximar la solución.

37. ***Distancia mínima*** Hallar el punto de la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ más cercano al punto $(1, 0)$.

38. ***Distancia mínima*** Hallar el punto de la gráfica de $f(x) = x^2$ más cercano al punto $(4, -3)$.

39. ***Tiempo mínimo*** Un hombre está en un bote a 2 millas del punto más cercano de la costa y desea ir al punto Q de la figura, 3 millas costa abajo y 1 milla tierra adentro. Puede remar a 2 millas/h y caminar a 4 millas/h. ¿Hacia qué punto de la costa debe dirigirse con el fin de llegar a Q en el menor tiempo posible?

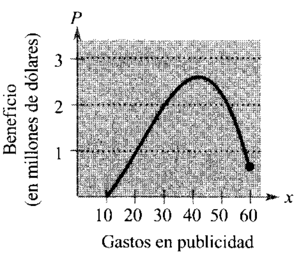


40. ***Medicina*** La concentración de un fármaco en la sangre t horas después de ser inyectado por vía intramuscular viene dada por $C = (3t^2 + t)/(50 + t^3)$. ¿Cuándo es máxima la concentración?

41. ***Costes de publicidad*** Una empresa que fabrica magnetófonos portátiles estima que el beneficio producido por la venta de un modelo particular es

$$P = -76x^3 + 4.830x^2 - 320.000, \quad 0 \leqslant x \leqslant 60$$

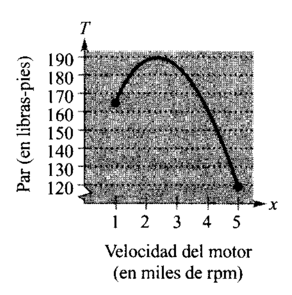
donde P es el beneficio en dólares y x el gasto en publicidad en decenas de miles de dólares (véase figura). De acuerdo con ese modelo, hallar el menor de los dos costes publicitarios que producen un beneficio $P = \$2.500.000$.



42. ***Potencia de un motor*** El par producido por un motor de automóvil viene aproximado por el modelo

$$T = 0{,}808x^3 - 17{,}974x^2 + 71{,}248x + 110\,843,$$
$$1 \leqslant x \leqslant 5$$

donde T es el par en libras-pies y x la velocidad del motor en revoluciones por minuto (véase figura). Aproximar las dos velocidades que producen un par $T = 170$ libras-pies.



¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 43-46, decidir si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

43. Los ceros de $f(x) = p(x)/q(x)$ coinciden con los de $p(x)$.

44. Si los coeficientes de una función polinómica son todos positivos, el polinomio no tiene ceros positivos.

45. Si $f(x)$ es un polinomio cúbico tal que $f'(x)$ nunca se anula, cualquier estimación inicial en el método de Newton hace que éste converja al cero de f.

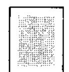
46. Las raíces de $\sqrt{f(x)} = 0$ coinciden con las raíces de $f(x) = 0$.

En los Ejercicios 47 y 48, escribir un programa de ordenador para hallar los ceros de una función mediante el método de Newton. Aproximar los ceros con tres cifras decimales. La respuesta debe ser una tabla con los siguientes encabezamientos.

$$n, \quad x_n, \quad f(x_n), \quad f'(x_n), \quad \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

47. $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + \frac{3}{4}x - 2$

48. $f(x) = \sqrt{4 - x^2} \operatorname{sen}(x - 2)$



3.9 Diferenciales

CONTENIDO ▪
Aproximaciones lineales ▪
Diferenciales ▪
Propagación del error ▪
Cálculo de diferenciales ▪

EXPLORACIÓN

Aproximación por la recta tangente Representar en la calculadora

$$f(x) = x^2$$

y, en la misma ventana, la recta tangente en el punto (1, 1). Ampliar dos veces con el *zoom* en el punto de tangencia. ¿Distingue la calculadora entre las dos gráficas? Usar la función «trace» para compararlas. Al acercarse x hacia 1 ¿qué 1 se puede decir de los valores de y?

Aproximaciones lineales

El método de Newton (Sección 3.8) es un ejemplo del uso de la recta tangente para aproximar la gráfica. En esta sección estudiaremos otras situaciones en las que la gráfica de una función puede ser aproximada por medio de rectas.

Para empezar, consideremos una función f derivable en c. La ecuación de su recta tangente en el punto $(c, f(c))$ es

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$
$$y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

Como c es constante, y es una función lineal de x. Además, restringiendo x a valores suficientemente cercanos a c, los valores de y pueden utilizarse como aproximaciones (hasta la precisión requerida) de los valores de la función f. En otras palabras, cuando $x \to c$, el límite de y es $f(x)$.

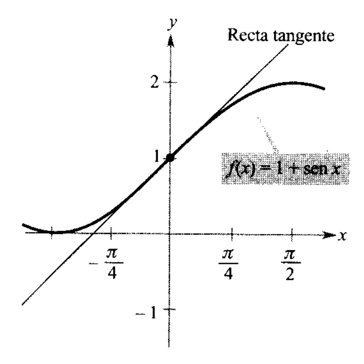


FIGURA 3.63
Aproximación de f mediante la recta tangente en el punto (0, 1).

EJEMPLO 1 Aproximación por la recta tangente

Aproximar, mediante la recta tangente, la función

$$f(x) = 1 + \text{sen } x \qquad \text{Función original}$$

en el punto (0, 1). A continuación, elaborar una tabla para comparar los valores y de la función lineal con los de $f(x)$ en un intervalo abierto que contenga a $x = 0$.

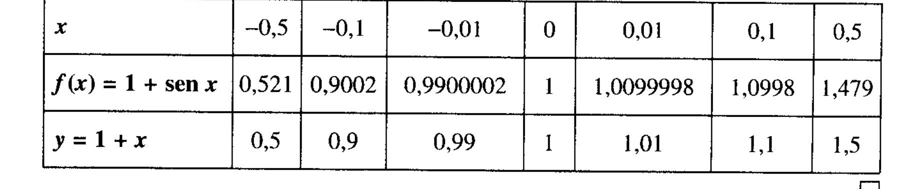
Solución: La derivada de f es

$$f'(x) = \cos x \qquad \text{Primera derivada}$$

luego la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (0, 1) es

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$
$$y - 1 = (1)(x - 0)$$
$$y = 1 + x \qquad \text{Aproximación por la recta tangente}$$

La tabla compara los valores y dados por la aproximación lineal con los de $f(x)$, cerca de $x = 0$. Nótese que cuanto más cerca está x de 0, mejor es la aproximación. Esto queda confirmado por la Figura 3.63.



x	−0,5	−0,1	−0,01	0	0,01	0,1	0,5
$f(x) = 1 + \text{sen } x$	0,521	0,9002	0,9900002	1	1,0099998	1,0998	1,479
$y = 1 + x$	0,5	0,9	0,99	1	1,01	1,1	1,5

□

Nota. Debe quedar claro que la aproximación lineal depende del punto de tangencia. En un punto diferente de la gráfica de $f(x) = 1 + \text{sen } x$, se obtendría una aproximación diferente mediante la recta tangente.

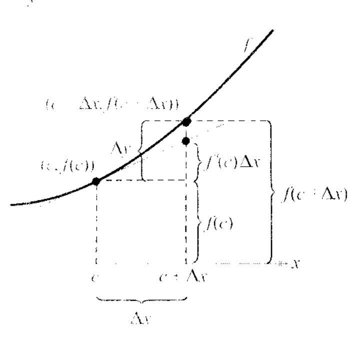


FIGURA 3.64
Cuando Δx es pequeño, $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c)$ viene dado aproximadamente por $f'(c)\Delta x$.

Diferenciales

Cuando se usa la recta tangente a f en el punto $(c, f(c))$

$$y = f(c) + f'(c)(x - c) \qquad \text{Recta tangente en } (c, f(c))$$

como aproximación de la gráfica de f, la cantidad $x - c$ se llama el *cambio en x*, y se denota por Δx (Figura 3.64). Cuando Δx es pequeño, el cambio en y (denotado Δy) se puede aproximar como sigue.

$$\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c) \qquad \text{Cambio aproximado de } y$$
$$\approx f'(c)\Delta x$$

En tales aproximaciones, la cantidad Δx se suele denotar por dx y se llama **diferencial de x**. La expresión $f'(x)dx$ se denota por dy y se llama **diferencial de y**.

DEFINICIÓN DE DIFERENCIALES

Sea $y = f(x)$ una función derivable en un intervalo abierto que contiene a x. La **diferencial de x** (denotada dx) es cualquier número real no nulo. La **diferencial de y** (denotada dy) es

$$dy = f'(x)dx$$

En muchas aplicaciones, la diferencial de y se puede utilizar como aproximación del cambio en y. Es decir,

$$\Delta y \approx dy \qquad \text{o} \qquad \Delta y \approx f'(x)dx$$

EJEMPLO 2 Comparación de Δy con dy

Sea $y = x^2$. Calcular dy para $x = 1$ y $dx = 0{,}01$. Comparar ese valor con Δy para $x = 1$ y $\Delta x = 0{,}01$.

Solución: Como $y = f(x) = x^2$, es $f'(x) = 2x$, y la diferencial dy viene dada por

$$dy = f'(x)dx \qquad \text{Diferencial de } y$$
$$= f'(1)(0{,}01)$$
$$= 2(0{,}01)$$
$$= 0{,}02$$

Ahora bien, usando $\Delta x = 0{,}01$, el incremento en y es

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \text{Incremento en } y$$
$$= f(1{,}01) - f(1)$$
$$= (1{,}01)^2 - 1^2$$
$$= 0{,}0201$$

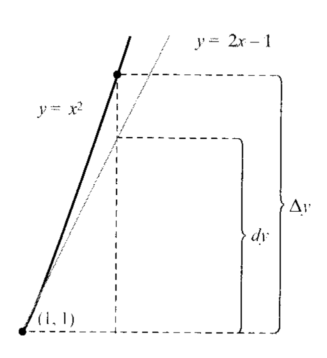


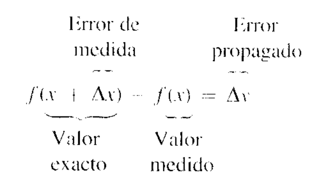
FIGURA 3.65
El cambio en y, Δy, viene dado aproximadamente por la diferencial de y, dy.

La Figura 3.65 muestra la comparación geométrica entre dy y Δy. Intente comparar los valores de dy y Δy. Comprobará que los valores son tanto más próximos cuanto más cerca de 0 está dx (o Δx).

□

Propagación del error

Los físicos y los ingenieros tienden a usar dy como aproximación de Δy de un modo muy libre. Tal sucede en la práctica al estimar errores propagados a partir de los cometidos por los aparatos de medida. Por ejemplo, si x denota el valor medido de una variable y $x + \Delta x$ representa el valor exacto, entonces Δx es el *error de medida*. Finalmente, si el valor medido de x es utilizado en el cálculo de algún otro valor $f(x)$, la diferencia entre $f(x + \Delta x)$ y $f(x)$ es el **error propagado**.



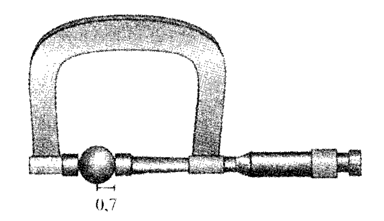


FIGURA 3.66
Bola de cojinete con un radio medido con error no superior a 0,01 pulgadas.

EJEMPLO 3 Estimación del error

La medida del radio de una bola de cojinete resulta ser 0,7 pulgadas (véase Figura 3.66). Si ese aparato de medida comete un error no superior a 0,01 pulgadas, estimar el error propagado en el volumen de la bola.

Solución: La fórmula para el volumen de una bola es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio. Así pues, podemos escribir

$$r = 0{,}7 \qquad \text{Radio medido}$$

y

$$-0{,}01 \leqslant \Delta r \leqslant 0{,}01 \qquad \text{Posible error}$$

Para aproximar el error propagado en el volumen, derivamos V, con lo que se obtiene $dV/dr = 4\pi r^2$ y escribimos

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx dV && \text{Aproximar } \Delta V \text{ por } dV \\ &= 4\pi r^2 dr \\ &= 4\pi(0{,}7)^2(\pm 0{,}01) && \text{Sustituir } r \text{ y } dr \\ &\approx \pm 0{,}06158 \end{aligned}$$

Por tanto, el volumen tiene un error propagado de unas 0,06 pulgadas cúbicas.

□

El error propagado en el Ejemplo 3, ¿es grande o pequeño? La respuesta se expresa mejor en términos *relativos*, comparando dV con V. La razón

$$\frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} \qquad \text{Razón de } dV \text{ a } V$$

$$= \frac{3dr}{r} \qquad \text{Simplificar}$$

$$\approx \frac{3}{0,7}(\pm 0,01) \qquad \text{Sustituir } dr \text{ y } r$$

$$\approx \pm 0,0429$$

se llama el **error relativo**. El correspondiente **error porcentual** (o **porcentaje de error**) viene a ser 4,29 por 100.

Cálculo de diferenciales

Todas y cada una de las reglas de derivación estudiadas en el Capítulo 2 admiten una traducción en términos de diferenciales. Así, si u y v son funciones derivables de x, por la definición de los diferenciales tenemos $du = u'dx$ y $dv = v'dx$. Por tanto, se puede escribir la regla del producto en forma diferencial como sigue.

$$d[uv] = \frac{d}{dx}[uv]dx \qquad \text{Diferencial de } uv$$

$$= [uv' + vu']dx \qquad \text{Regla del producto}$$

$$= uv'dx + vu'dx$$

$$= u\,dv + v\,du$$

FÓRMULAS DIFERENCIALES **Sean u y v funciones derivables de x.**

Múltiplo constante: $d[cu] = c\,du$

Suma o diferencia: $d[u \pm v] = du \pm dv$

Producto: $d[uv] = u\,dv + v\,du$

Cociente: $d\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

EJEMPLO 4 Cálculo de diferenciales

	Función	*Derivada*	*Diferencial*
a)	$y = x^2$	$\frac{dy}{dx} = 2x$	$dy = 2x\,dx$



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716)

Newton y Leibniz son considerados los creadores del Cálculo. Fue Leibniz, no obstante, quien intentó ampliar el Cálculo desarrollando reglas y notaciones formales. A menudo dedicaba jornadas enteras a buscar una notación apropiada para un concepto nuevo.

	Función	*Derivada*	*Diferencial*
b)	$y = 2 \text{ sen } x$	$\dfrac{dy}{dx} = 2 \cos x$	$dy = 2 \cos x \, dx$
c)	$y = x \cos x$	$\dfrac{dy}{dx} = -x \text{ sen } x + \cos x$	$dy = (-x \text{ sen } x + \cos x)dx$
d)	$y = \dfrac{1}{x}$	$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}$	$dy = -\dfrac{dx}{x^2}$

□

La notación del Ejemplo 4 es la **notación de Leibniz** para las derivadas y diferenciales, llamada así en honor del matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz. La belleza de esta notación se debe a que proporciona una forma muy simple de recordar varias fórmulas importantes del Cálculo, gracias a que da la impresión de que se deducen mediante sencillas manipulaciones algebraicas de las diferenciales. A título de ejemplo, la *regla de la cadena* en notación de Leibniz,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

aparece como obviamente válida por cancelación de las du. Aunque este razonamiento es *incorrecto*, la notación ayuda a recordar la regla de la cadena.

EJEMPLO 5 Diferencial de una función compuesta

$y = f(x) = \text{sen } 3x$	Función original
$f'(x) = 3 \cos 3x$	Aplicar la regla de la cadena
$dy = f'(x)(dx) = 3 \cos 3x \, dx$	Forma diferencial

□

EJEMPLO 6 Diferencial de una función compuesta

$y = f(x) = (x^2 + 1)^{1/2}$	Función original
$f'(x) = \dfrac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2}(2x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$	Aplicar la regla de la cadena
$dy = f'(x)(dx) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$	Forma diferencial

□

Las diferenciales se pueden utilizar para aproximar valores de las funciones. A tal fin, para una función $y = f(x)$ usamos la fórmula

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)dx}$$

que se deduce de la aproximación $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy$. La clave en el uso de esa fórmula reside en elegir un valor de x que haga sencillos los cálculos, como ilustra el Ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Aproximación de valores de funciones

Aproximar, usando diferenciales, $\sqrt{16{,}5}$

Solución: Tomando $f(x) = \sqrt{x}$, podemos escribir

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

Ahora, haciendo $x = 16$ y $dx = 0{,}5$ obtenemos la aproximación

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= \sqrt{16{,}5} \\ &\approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}}(0{,}5) \\ &= 4 + \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 4 + \frac{1}{16} \\ &= 4{,}0625 \end{aligned}$$

□

Nota. El uso de las diferenciales con el fin de aproximar valores de funciones ha perdido vigencia con la disponibilidad de calculadoras. En una calculadora podemos ver inmediatamente que

$$\sqrt{16{,}5} \approx 4{,}0620$$

lo que, de paso, da una idea de la precisión del método diferencial en el Ejemplo 7.

Ejercicios de la Sección 3.9

En los Ejercicios 1-6, hallar la ecuación de la recta tangente T a la gráfica de f en el punto indicado. Usar aproximación lineal para completar la tabla.

x	1,9	1,99	2	2,01	2,1
$f(x)$					
$T(x)$					

	Función	*Intervalo*
1.	$f(x) = x^2$	$(2, 4)$
2.	$f(x) = 1/x^2$	$(2, 1/4)$
3.	$f(x) = x^5$	$(2, 32)$
4.	$f(x) = \sqrt{x}$	$(2, \sqrt{2})$
5.	$f(x) = \operatorname{sen} x$	$(2, \operatorname{sen} 2)$
6.	$f(x) = \operatorname{cosec} x$	$(2, \operatorname{cosec} 2)$

En los Ejercicios 7-10, evaluar y comparar Δy y dy.

7. $y = x^3$ $\quad x = 1$ $\quad \Delta x = dx = 0{,}1$

8. $y = 1 - 2x^2$ $\quad x = 0$ $\quad \Delta x = dx = -0{,}1$

9. $y = x^4 + 1$ $\quad x = -1$ $\quad \Delta x = dx = 0{,}01$

10. $y = 2x + 1$ $\quad x = 2$ $\quad \Delta x = dx = 0{,}01$

En los Ejercicios 11-20, calcular la diferencial dy de la función dada.

11. $y = 3x^2 - 4$

12. $y = 2x^{3/2}$

13. $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$

14. $y = \sqrt{x^2 - 4}$

15. $y = x\sqrt{1 - x^2}$

16. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

17. $y = \dfrac{\sec^2 x}{x^2 + 1}$

18. $y = x \operatorname{sen} x$

19. $y = \dfrac{1}{3}\cos\left(\dfrac{6\pi x - 1}{2}\right)$

20. $y = x - \operatorname{tg}^2 x$

21. ***Área*** La medida del lado de un cuadrado da 12 pulgadas, con una cota de error de 1/64 de pulgada. Aproximar, mediante diferenciales, la cota de error propagado al calcular el área del cuadrado.

22. ***Área*** Las medidas de la base y de la altura de un rectángulo han dado 36 cm y 50 cm, con una cota de error en las medidas de 0,25 cm. Aproximar, usando diferenciales, la cota de error propagado al calcular su área.

23. ***Área*** La medida del radio de la base de un tronco da 14 pulgadas, con una cota de error de 1/4 de pulgada. Aproximar, mediante diferenciales, la cota de error propagado al calcular el área de la base de ese tronco.

24. ***Volumen y área superficial*** La medida de la arista de un cubo da 12 pulgadas, con una cota de error de 0,03 pulgadas. Aproximar, mediante diferenciales, la cota de error propagado al calcular

a) el volumen del cubo,

b) el área del cubo.

25. ***Área*** La medida del lado de un cuadrado ha dado 15 cm, con cota de error de 0,05 cm.

a) Aproximar el porcentaje de error en el cálculo de su área.

b) Estimar el máximo error porcentual admisible en la medida del lado para que el error cometido al calcular el área no supere el 2,5 por 100.

26. ***Circunferencia*** La medida de la circunferencia de un círculo ha dado 56 cm, con cota de error de 1,2 cm.

a) Aproximar el porcentaje de error en el cálculo del área del círculo.

b) Estimar el máximo error porcentual admisible en la medida de la circunferencia para que el error cometido al calcular el área no supere el 3 por 100.

27. ***Volumen y área superficial*** El radio de una esfera se ha medido en 6 pulgadas, con cota de error de 0,02 pulgadas. Usar diferenciales para aproximar el máximo error posible cometido al calcular *a)* el volumen de la esfera, *b)* el área de la esfera, y *c)* los errores relativos en los apartados *a)* y *b)*.

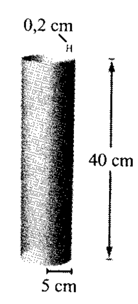
28. ***Beneficio*** El beneficio de una empresa es

$$P = (500x - x^2) - \left(\frac{1}{2}x^2 - 77x + 3.000\right)$$

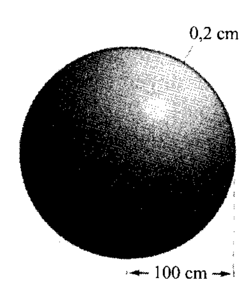
Aproximar el cambio y el porcentaje de cambio de los beneficios al cambiar la producción de $x = 115$ a $x = 120$ unidades.

En los Ejercicios 29 y 30, el grosor de la capa es 0,2 cm. Usar diferenciales para estimar el volumen de la capa.

29. Capa cilíndrica de altura 40 cm y radio 5 cm.



30. Capa esférica de radio 100 cm.



31. ***Péndulo*** El período de un péndulo viene dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

donde la longitud L se mide en pies, g es la aceleración de la gravedad y T el tiempo en segundos. Supongamos que el péndulo, a causa de la temperatura, ha aumentado su longitud en un 0,5 por 100.

a) Hallar el cambio porcentual aproximado en el período.

b) Usando el resultado de *a)*, calcular el error aproximado de este reloj de péndulo en un día.

32. ***Péndulo*** Supongamos que se usa un péndulo para medir la aceleración de la gravedad en un punto de la superficie terrestre. Usar la fórmula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

para aproximar el porcentaje de error en el valor de g si el período T se logra determinar con un error no superior al 0,1 por 100 respecto de su valor exacto.

33. ***Ley de Ohm*** Una corriente de I amperios pasa por una resistencia de R ohmios. La ley de Ohm establece que el voltaje E aplicado a la resistencia es

$$E = IR$$

Si el voltaje es constante, probar que la magnitud del error relativo en R causado por un cambio en I es igual a la magnitud del error relativo en I.

34. ***Medio ambiente*** El coste en dólares de la supresión del $p\%$ de la polución del humo que expulsa una central térmica es

$$C = \frac{80.000p}{100 - p}, \qquad 0 \leqslant p < 100$$

Usar diferenciales para aproximar el crecimiento en costes si el gobierno exige a la empresa que elimine un 2 por 100 más de polución, si p era antes *a*) 40 por 100 y *b*) 75 por 100.

35. ***Medida de triángulos*** Un cateto de un triángulo rectángulo mide 9,5 pulgadas y el ángulo opuesto $26°45'$, con un error no superior a $15'$.

a) Aproximar el porcentaje de error al calcular la longitud de la hipotenusa.

b) Estimar el error permisible en la medida del ángulo para que el error en el cálculo de la longitud de la hipotenusa no pase del 2 por 100.

36. ***Área*** Estimar el porcentaje de error en el cálculo del área del triángulo del Ejercicio 35.

37. ***Movimiento de un proyectil*** El recorrido R de un proyectil es

$$R = \frac{v_0^2}{32}(\text{sen } 2\theta)$$

donde v_0 es la velocidad inicial en pies/s y θ el ángulo de elevación. Si $v_0 = 2.200$ pies/s y θ se cambia de $10°$ a $11°$, usar diferenciales para estimar el cambio en el recorrido.

38. ***Agrimensura*** Un agrimensor está a 50 pies de la base de un árbol y mide el ángulo de elevación como $71{,}5°$. ¿Con qué precisión ha de medir el ángulo para que el porcentaje de error en el cálculo de la altura del árbol sea menor que el 6 por 100?

En los Ejercicios 39-42, usar diferenciales para aproximar el valor de la función. Comparar la respuesta con la calculadora.

39. $\sqrt{99{,}4}$

40. $\sqrt[3]{28}$

41. $\sqrt[4]{624}$

42. $(2{,}99)^3$

Redacción En los Ejercicios 43-46, explicar en unas líneas por qué la aproximación es válida.

43. $0{,}99^4 \approx 1 - 4(0{,}01)$

44. $\sqrt{4{,}02} \approx 2 + \frac{1}{2}(0{,}02)$

45. $\sec 0{,}03 \approx 1 + 0(0{,}03)$

46. $\text{tg } 0{,}05 \approx 0 + (0{,}05)$

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 47-50, discutir si la afirmación es correcta. En caso contrario, explicar la razón o exhibir un ejemplo que muestre su falsedad.

47. Si $y = x + c$, entonces $dy = dx$.

48. Si $y = ax + b$, entonces $\Delta y/\Delta x = dy/dx$.

49. Si y es derivable, entonces $\lim_{\Delta x \to 0} (\Delta y - dy) = 0$.

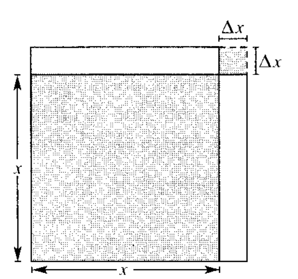
50. Si $y = f(x)$, f es creciente y derivable, y $\Delta x > 0$, entonces $\Delta y \geqslant dy$.

51. ***Razonamiento gráfico*** El área de un cuadrado de lado x es $A(x) = x^2$.

a) Calcular dA y ΔA en términos de x y Δx.

b) Usar la figura para identificar la región cuya área es dA.

c) Usar la figura para identificar la región cuya área es $\Delta A - dA$.



52. Demostrar que si $y = f(x)$ es una función derivable, entonces

$$\Delta y - dy = \varepsilon\Delta x$$

donde $\varepsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

CONTENIDO ▪
Aplicaciones a la economía y al comercio ▪

3.10 Aplicaciones a la economía y al comercio

Aplicaciones a la economía y al comercio

En la Sección 2.6 aprendimos que la situación más frecuente en que se miden cambios es respecto al tiempo. Ahora analizaremos algunos ritmos de cambio relevantes en Economía que no se miden respecto al tiempo. Así, los economistas denominan beneficio marginal, ingreso marginal y coste marginal a los ritmos de cambio de los beneficios, de los ingresos y de los costes con respecto al número de unidades producidas o vendidas.

RESUMEN DE TÉRMINOS Y FÓRMULAS COMERCIALES

Términos básicos	*Fórmulas básicas*
x es el número de unidades producidas (o vendidas)	
p es el precio por unidad	
R denota los ingresos totales obtenidos por la venta de x unidades	$R = xp$
C es el coste total de producción de x unidades	
$\overline{C}$ es el coste medio por unidad	$\overline{C} = \frac{C}{x}$
P es el beneficio total al vender x unidades	$P = R - C$

El punto de equilibrio es el número de unidades para el cual $R = C$.

Marginales

$\frac{dR}{dx}$ = (ingreso marginal) $\approx$ (ingreso *extra* en la venta de una unidad adicional)

$\frac{dC}{dx}$ = (coste marginal) $\approx$ (coste *extra* en la venta de una unidad adicional)

$\frac{dP}{dx}$ = (beneficio marginal) $\approx$ (beneficio *extra* en la venta de una unidad adicional)

En este resumen, nótese que los marginales se pueden utilizar para estimar el ingreso, beneficio o coste asociado a la producción o venta de una unidad adicional. Esto se ilustra gráficamente para el ingreso marginal en la Figura 3.67.

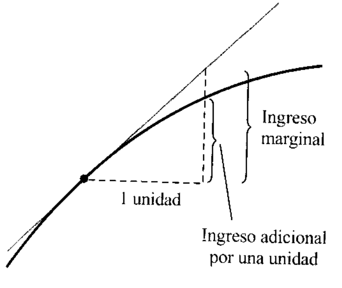


FIGURA 3.67
Una función de ingresos.

EXPLORACIÓN

Gráficas de funciones de ingresos La gráfica de la función de ingresos que muestra la Figura 3.67 es cóncava hacia abajo. ¿Cómo es posible? ¿No tendría que ser una función lineal del tipo

$$R = xp$$

donde x es el número de unidades y p el precio? Discutir esta cuestión en clase o en grupos. Considerar que el número de unidades vendidas x puede ser, él mismo, función del precio por unidad p. Por ejemplo, al bajar el precio unitario, es posible que aumente el número de unidades vendidas.

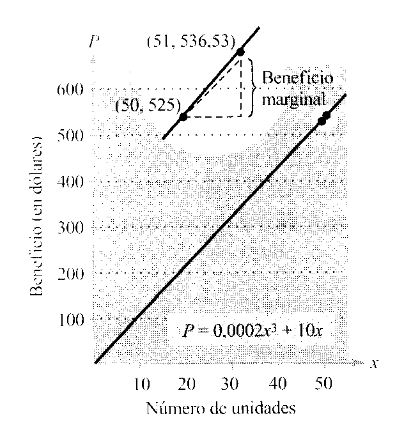


FIGURA 3.68
El beneficio marginal es el beneficio extra por la venta de una unidad adicional.

EJEMPLO 1 Los marginales como aproximaciones

Un empresario determina que el beneficio en la venta de x unidades de cierto artículo viene dado por $P = 0{,}0002x^3 + 10x$.

a) Calcular el beneficio marginal para una producción de 50 unidades.
b) Compararlo con el aumento real de beneficios obtenido al pasar de producir 50 a 51 unidades (véase Figura 3.68).

Solución:
a) El beneficio marginal viene dado por

$$\frac{dP}{dx} = 0{,}0006x^2 + 10$$

Cuando $x = 50$, el beneficio marginal es

$$\frac{dP}{dx} = (0{,}0006)(50)^2 + 10 = \$11{,}50 \qquad \text{Beneficio marginal}$$

b) Para $x = 50$ y 51, los beneficios reales son

$$P = (0{,}0002)(50^3) + 10(50) = 25 + 500 = \$525{,}00$$
$$P = (0{,}0002)(51^3) + 10(51) = 26{,}53 + 510 = \$536{,}53$$

Por tanto, el beneficio adicional al pasar la producción de 50 a 51 unidades es

$$536{,}53 - 525{,}00 = \$11{,}53 \qquad \text{Beneficio extra por una unidad}$$ □

La función de beneficios del Ejemplo 1 es inusual, por cuanto sigue creciendo siempre que el número de unidades vendidas aumente. En la práctica, es más frecuente encontrar situaciones en las que sólo bajando el precio por unidad es posible aumentar las ventas. Tales reducciones de precio acaban provocando la caída de los beneficios. El número x de unidades que los clientes están deseando adquirir a un precio dado p por unidad se conoce como la **función de** (la) **demanda**

$$\boxed{p = f(x)} \qquad \text{Función de demanda}$$

EJEMPLO 2 Una función de demanda

Un comerciante vende 2.000 unidades mensuales a $10 cada unidad. Se predice que las ventas mensuales crecerán 250 unidades por cada $0,25 de reducción en el precio. Hallar la función de demanda correspondiente a esta predicción.

Solución: Como está previsto que x aumente en 250 unidades cada vez que se baje en \$0,25 el precio, la situación queda descrita por la ecuación

$$x = 2.000 + 250\left(\frac{10 - p}{0,25}\right) = 12.000 - 1.000p$$

es decir,

$$p = 12 - \frac{x}{1.000}, \qquad x \geqslant 2.000 \qquad \text{Función de demanda}$$

La gráfica de esta función de demanda está recogida en la Figura 3.69. □

FIGURA 3.69
Una función de demanda p.

EJEMPLO 3 Cálculo del ingreso marginal

Un restaurante de comida rápida calcula que la demanda mensual de hamburguesas es

$$p = \frac{60.000 - x}{20.000}$$

Hallar el crecimiento del ingreso marginal (ingreso por hamburguesa) para unas ventas mensuales de 20.000 unidades (véase Figura 3.70).

Solución: Como los ingresos totales vienen dados por $R = xp$, se tiene

$$R = xp = x\left(\frac{60.000 - x}{20.000}\right) = \frac{1}{20.000}\,(60.000x - x^2)$$

y el ingreso marginal es

$$\frac{dR}{dx} = \frac{1}{20.000}(60.000 - 2x)$$

Para $x = 20.000$, el ingreso marginal es

$$\frac{dR}{dx} = \frac{1}{20.000}[60.000 - 2(20.000)] = \frac{20.000}{20.000} = \$1/\text{unidad} \qquad □$$

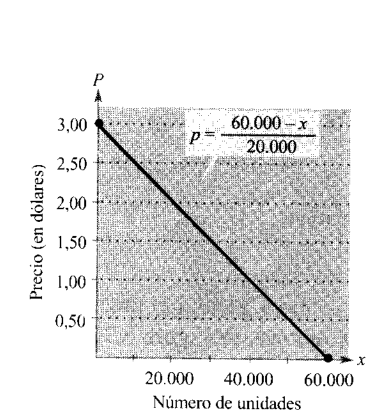


FIGURA 3.70
Al bajar el precio se venden más hamburguesas.

Nota. La función demanda del Ejemplo 3 es típica, en el sentido de que a un bajo precio corresponde una fuerte demanda, como muestra la Figura 3.70.

EJEMPLO 4 Cálculo del beneficio marginal

Puesto que en el Ejemplo 3 el coste de producción de x hamburguesas es

$$C = 5.000 + 0{,}56x$$

hallar el beneficio total y el beneficio marginal para 20.000, 24.000 y 30.000 unidades.

Solución: Al ser $P = R - C$, podemos usar la función de ingresos del Ejemplo 3 para ver que

$$P = \frac{1}{20.000}(60.000x - x^2) - 5.000 - 0{,}56x$$

$$= 2{,}44x - \frac{x^2}{20.000} - 5.000$$

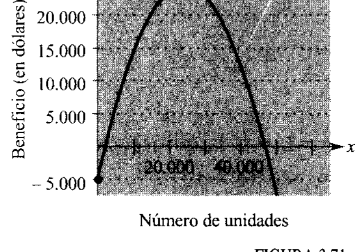
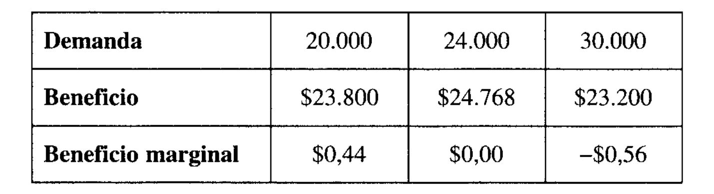


FIGURA 3.71
El máximo beneficio corresponde al punto donde el beneficio marginal es 0. Cuando se venden más de 24.000 hamburguesas, el beneficio marginal es negativo (un aumento de la producción más allá de este nivel producirá una *reducción* de beneficios, en lugar de un aumento de beneficios).

Así pues, el beneficio marginal es

$$\frac{dP}{dx} = 2{,}44 - \frac{x}{10.000}$$

La tabla muestra los beneficios total y marginal para cada una de las tres demandas especificadas.



Demanda	20.000	24.000	30.000
Beneficio	\$23.800	\$24.768	\$23.200
Beneficio marginal	\$0,44	\$0,00	−\$0,56

□

EJEMPLO 5 Cálculo del beneficio máximo

En la comercialización de un producto se ha comprobado que la demanda viene dada por

$$p = \frac{50}{\sqrt{x}} \qquad \text{Función de demanda}$$

El coste de producción de x unidades es $C = 0{,}5x + 500$. Calcular el precio por unidad para el que se consigue un beneficio máximo (véase Figura 3.72).

Solución: A la vista de la función de costes dada, es

$$P = R - C = xp - (0{,}5x + 500) \qquad \text{Ecuación primaria}$$

Sustituyendo la expresión dada por p obtenemos

$$P = x\left(\frac{50}{\sqrt{x}}\right) - (0{,}5x + 500) = 50\sqrt{x} - 0{,}5x - 500$$

Igualando a cero el beneficio marginal

$$\frac{dP}{dx} = \frac{25}{\sqrt{x}} - 0{,}5 = 0$$

vemos que $x = 2.500$. De ello podemos concluir que el beneficio máximo sucede cuando el precio es

$$p = \frac{50}{\sqrt{2.500}} = \frac{50}{50} = \$1{,}00$$ □

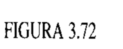


FIGURA 3.72
El máximo beneficio se logra cuando $\frac{dR}{dx} = \frac{dC}{dx}$.

Nota. Para hallar el beneficio máximo en el Ejemplo 5, hemos derivado la función de beneficios, $P = R - C$, y hemos igualado dP/dx a cero. De esta ecuación

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dR}{dx} - \frac{dC}{dx} = 0$$

se sigue que el máximo beneficio ocurre cuando el ingreso marginal es igual al coste marginal, tal como indica la Figura 3.72.

EJEMPLO 6 Minimizando el coste medio

Una empresa estima que el coste, en dólares, de producción de x unidades de cierto producto es $C = 800 + 0{,}04x + 0{,}0002x^2$. Calcular el nivel de producción que hace mínimo el coste medio por unidad.

Solución: Sustituyendo C de la ecuación dada se obtiene

$$\overline{C} = \frac{C}{x} = \frac{800 + 0{,}04x + 0{,}0002x^2}{x} = \frac{800}{x} + 0{,}04 + 0{,}0002x$$

Haciendo la derivada $d\overline{C}\, dx$ igual a cero resulta

$$\frac{d\overline{C}}{dx} = -\frac{800}{x^2} + 0{,}0002 = 0$$

$$x^2 = \frac{800}{0{,}0002} = 4.000.000 \Rightarrow x = 2.000 \text{ unidades}$$

(Véase Figura 3.73.) □

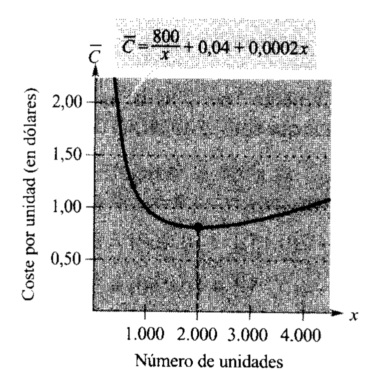
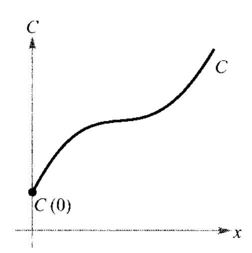


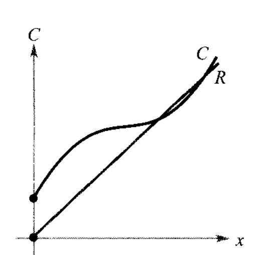
FIGURA 3.73
El mínimo coste medio se consigue cuando $\frac{d\overline{C}}{dx} = 0$.

Ejercicios de la Sección 3.10

1. ***Para pensar*** La figura muestra el coste C de producción de x unidades de un producto.
   a) ¿Cómo se llama $C(0)$?
   b) Esbozar la gráfica de la función coste marginal.
   c) ¿Tiene esa función algún extremo? Si lo tiene, describir su significado en términos de Economía.



2. ***Para pensar*** La figura muestra el coste C y los ingresos R de producción y venta de x unidades de un producto.
   a) Esbozar la gráfica de la función ingreso marginal.
   b) Esbozar la gráfica de la función de beneficios. Aproximar la posición del valor de x en el que el beneficio es máximo.



En los Ejercicios 3-6, calcular el número x de unidades que proporciona unos ingresos máximos.

3. $R = 900x - x^2$
4. $R = 600x^2 - 0{,}02x^3$
5. $R = \dfrac{1.000.000x}{0{,}02x^2 + 1.800}$
6. $R = 30x^{2/3} - 2x$

En los Ejercicios 7-10, hallar el número x de unidades para el cual el coste medio por unidad es mínimo.

7. $C = 0{,}125x^2 + 20x + 5.000$
8. $C = 0{,}001x^3 - 5x + 250$
9. $C = 3.000x - x^2\sqrt{300 - x}$
10. $C = \dfrac{2x^3 - x^2 + 5.000x}{x^2 + 2.500}$

En los Ejercicios 11-14, calcular el precio unitario que produce un beneficio P máximo.

	Función de coste	*Función de demanda*
11.	$C = 100 + 30x$	$p = 90 - x$
12.	$C = 2.400x + 5.200$	$p = 6.000 - 0{,}4x^2$
13.	$C = 4.000 - 40x + 0{,}02x^2$	$p = 50 - \dfrac{x}{100}$
14.	$C = 35x + 2\sqrt{x - 1}$	$p = 40 - \sqrt{x - 1}$

Coste medio En los Ejercicios 15 y 16, usar la función de costes para calcular el valor de x en el que el coste medio es mínimo. Para tal valor de x, mostrar que el coste marginal y el coste medio son iguales.

15. $C = 2x^2 + 5x + 18$
16. $C = x^3 - 6x^2 + 13x$
17. Probar que el coste medio es mínimo en el valor de x para el cual el coste medio es igual al coste marginal.
18. ***Beneficio máximo*** El beneficio de cierta empresa es

$$P = 230 + 20s - \frac{1}{2}s^2$$

donde s es la cantidad (en cientos de dólares) gastada en publicidad. ¿Qué valor de s hace máximo el beneficio?

19. ***Investigación numérica, gráfica y analítica*** El coste por unidad para la producción de un modelo de radio es \$60. El fabricante cobra \$90 por unidad para pedidos que no superen las 100 unidades. Con el fin de incentivar grandes pedidos, reduce el precio en \$0,15 por cada unidad que pase de 100 (por ejemplo, las cobraría a \$87 si el pedido fuese de 120).
   a) Completar analíticamente seis filas de una tabla como la adjunta, en la que sólo se muestran dos filas.

x	*Precio*	*Beneficio*
102	90 – 2(0,15)	102[90 – 2(0,15)] – 102(60) = 3.029,40
104	90 – 4(0,15)	104[90 – 4(0,15)] – 104(60) = 3.057,60

   b) Usando la calculadora, generar nuevas filas y usar la tabla para estimar el beneficio máximo.
   c) Expresar el beneficio P en función de x.
   d) Hallar, usando el Cálculo, el número crítico de la función y la orden de pedido requerida.

e) Representar la función en la calculadora e identificar el beneficio máximo en la gráfica.

20. ***Beneficio máximo*** Una agencia inmobiliaria dispone de 50 apartamentos. Cuando los alquila a \$720 por mes, están todos ocupados. Pero, en promedio, por cada \$40 de aumento en el alquiler, se produce una vacante. Cada apartamento alquilado exige una inversión mensual de \$48 para su limpieza y mantenimiento. ¿Qué alquiler producirá un beneficio máximo?

Coste mínimo En los Ejercicios 21 y 22, hallar la velocidad v, en millas/h, que minimiza los costes en un trayecto de 110 millas. El coste del combustible por hora es C dólares y el conductor cobra W dólares la hora. (Se supone que no hay más costes.)

21. Coste del fuel: $C = \dfrac{v^2}{600}$

Conductor: $W = \$5$

22. Coste del fuel: $C = \dfrac{v^2}{500}$

Conductor: $W = \$7{,}50$

23. ***Coste mínimo*** Una central de energía está a un lado de un río de 1/2 milla de anchura, y una fábrica se encuentra situada 6 millas aguas abajo, al otro lado del río. El tendido de líneas cuesta \$12 por pie en tierra y \$16 por pie bajo el agua. Hallar el tendido más económico desde la central hasta la fábrica.

24. ***Coste mínimo*** Una plataforma petrolífera está 2 km mar adentro y la refinería 4 km costa abajo. Si el coste del metro de oleoducto es doble en el mar que en tierra firme, ¿qué trayecto debe tener el oleoducto para minimizar costes?

Coste mínimo En los Ejercicios 25-28, considérese un centro de distribución de combustible situado en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares (unidades en millas, véanse figuras). El centro surte a tres fábricas con coordenadas (4, 1), (5, 6) y (10, 3). Una carretera sale del centro siguiendo la recta $y = mx$, y otras desde ésta hacia las fábricas. El objetivo es hallar un m que haga mínima la longitud de las carreteras secundarias.

25. Minimizar la suma de los cuadrados de las longitudes de las carreteras verticales

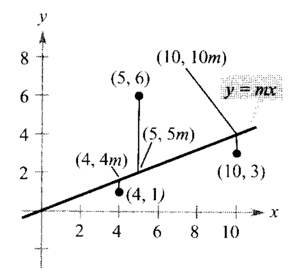
$$S_1 = (4m - 1)^2 + (5m - 6)^2 + (10m - 3)^2$$

Hallar la ecuación de la carretera principal por este método y determinar la suma de longitudes de las secundarias.

26. Minimizar la suma de los valores absolutos de las longitudes de las carreteras secundarias verticales

$$S_2 = |4m - 1| + |5m - 6| + |10m - 3|$$

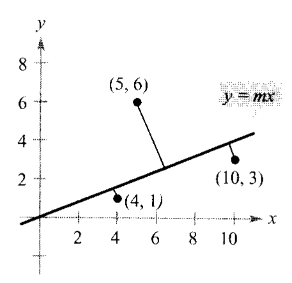
Hallar la ecuación de la carretera principal por este método y determinar la suma de longitudes de las secundarias. (*Ayuda:* Representar en la calculadora la gráfica de S_2 y aproximar el número crítico requerido.)



27. Minimizar la suma de distancias perpendiculares (véanse Ejercicios 75-81 de la Sección P.2) desde la carretera principal a las fábricas, dada por

$$S_3 = \frac{|4m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{|5m - 6|}{\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{|10m - 3|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

Hallar la ecuación de la carretera principal por este método y determinar la suma de longitudes de las secundarias. (*Ayuda:* Representar en la calculadora la gráfica de S_3 y aproximar el número crítico requerido.)



28. ***Redacción*** Explicar por escrito cuál de los métodos de los Ejercicios 25-27 es más sencillo de aplicar y cuál logra con más eficacia el objetivo de minimizar costes.

29. ***Beneficio máximo*** Supongamos que el capital depositado en un banco es proporcional al cuadrado de la tasa de interés abonada por la entidad, y que el banco puede reinvertir ese dinero al 12 por 100. Calcular la tasa de interés que produce beneficios máximos para el banco. (Usar la fórmula del interés simple.)

30. ***Ingresos máximos*** Cuando un comerciante vende un cierto producto a \$25 la unidad, vende 800 unidades semanales. Después de aumentar el precio en \$5, las ventas caen a 775 unidades semanales. Suponiendo que la función de demanda es lineal, calcular el precio que hará máximos los ingresos totales.

31. ***Coste mínimo*** El coste C de pedido y transporte de las componentes utilizadas en la fabricación de cierto producto es

$$C = 100\left(\frac{200}{x^2} + \frac{x}{x+30}\right), \qquad 1 \leqslant x$$

donde C se mide en miles de dólares y x es el tamaño del pedido en cientos. Calcular el tamaño x que minimiza el coste. (*Ayuda:* Usar el método de Newton o una calculadora.)

32. ***Coste medio*** Una empresa calcula que el coste en dólares de producción de x unidades de un producto es

$$C = 800 + 0{,}4x + 0{,}02x^2 + 0{,}0001x^3$$

Hallar el nivel de producción que hace mínimo el coste medio por unidad. (*Ayuda:* Usar el método de Newton o una calculadora.)

33. ***Ingresos*** Los ingresos R de una compañía por la venta de x unidades es

$$R = 900x - 0{,}1x^2$$

Usar diferenciales para aproximar el cambio en los ingresos cuando las ventas crecen de $x = 3.000$ a $x = 3.001$ unidades.

34. ***Beneficios*** Los beneficios P de una compañía por la venta de x unidades vienen dados por

$$P = (500x - x^2) - \left(\frac{1}{2}x^2 - 77x + 3.000\right)$$

Usar diferenciales para aproximar el cambio y el cambio porcentual de los beneficios cuando la producción cambia de $x = 175$ a $x = 180$ unidades.

35. ***Investigación analítica y gráfica*** Un fabricante de fertilizantes estima que las ventas siguen el esquema

$$F = 100.000\left\{1 + \text{sen}\left[\frac{2\pi(t-60)}{365}\right]\right\}$$

donde F se mide en libras y el tiempo t en días, con $t = 1$ correspondiendo al 1 de enero.

a) Usar el Cálculo para determinar el día de máxima venta de fertilizante.
b) Representar la función en la calculadora y estimar el día de mínima venta.

36. ***Un modelo matemático*** La tabla muestra la distribución mensual de gasolina G en miles de millones de galones en EE.UU. el año 1994. El tiempo t se representa en meses, de 1 a 12. *(Fuente: Federal Highway Electronic Bulletin Board.)*

t	1	2	3	4	5	6
G	8,91	9,18	9,79	9,83	10,37	10,16

t	7	8	9	10	11	12
G	10,37	10,81	10,03	9,97	9,85	9,51

Un modelo para esos datos es

$$G = 9{,}90 - 0{,}64\cos\left(\frac{\pi t}{6} - 0{,}62\right)$$

a) Representar en la calculadora los datos y el modelo.
b) Aproximar, mediante ese modelo, el mes de máxima venta.
c) ¿Qué factor del modelo provoca la variación temporal de las ventas? ¿Qué parte del modelo da las ventas medias mensuales?
d) Si el Ministerio de Energía añade un término $0{,}02\,t$ al modelo, ¿qué significaría ese término? Con este nuevo modelo, estimar el máximo consumo mensual en el año 2000.

37. ***Ingresos de los ferrocarriles*** Los ingresos anuales (en millones de dólares) de la Union Pacific en los años 1985-1994 siguen el modelo

$$R = 4{,}7t^4 - 193{,}5t^3 + 2.941{,}7t^2 - 19.294{,}7t + 52.012$$

donde $t = 0$ corresponde a 1980. *(Fuente: Union Pacific Corporation.)*

a) ¿En cuál de esos años fueron menores los ingresos?
b) ¿En qué año fueron máximos?
c) Calcular el montante de los ingresos en esos dos años.
d) Confirmar los resultados en la calculadora.

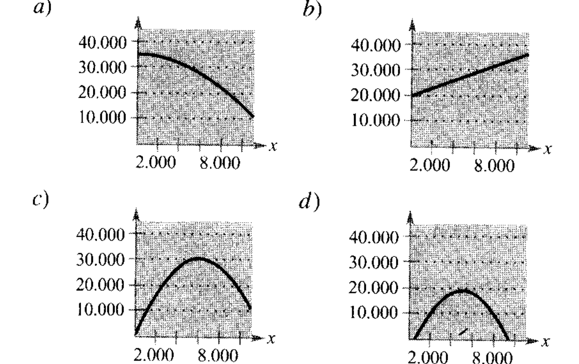
38. ***Un modelo matemático*** Un departamento de ventas ha registrado las ventas trimestrales S (en miles de dólares en la tabla) de un producto nuevo durante dos años.

t	1	2	3	4	5	6	7	8
S	7,5	6,2	5,3	7,0	9,1	7,8	6,9	8,6

a) Representar los datos en la calculadora.
b) Ajustar un modelo $S = a + bt + c$ sen βt a esos datos. (*Ayuda:* Empezar hallando β. A continuación, usar la calculadora para hallar $a + bt$. Finalmente, estimar c.)

c) Representar el modelo en la calculadora y hacer los retoques necesarios para lograr el mejor ajuste.
d) Usar el modelo para predecir las ventas trimestrales máximas en el año 2000.

39. ***Para pensar*** Emparejar cada gráfica con la función que represente mejor, una función de demanda, de ingresos, de costes o de beneficios. Justificar la elección.



40. ***Disminución de ingresos*** Los beneficios P (en miles de dólares) de una empresa cuyos gastos en publicidad ascienden a s miles de dólares vienen dados por

$$P = -\frac{1}{10}s^3 + 6s^2 + 400$$

a) ¿Cuánto debe gastar la empresa en publicidad con el fin de conseguir los máximos beneficios?
b) Hallar el punto de *disminución de ingresos* (que es el punto en el que el ritmo de crecimiento de la función de beneficios comienza a caer).

La respuesta relativa de los consumidores a un cambio en el precio de un bien de consumo se llama la *elasticidad de precios de la demanda.* Si $p = f(x)$ es una función de demanda derivable, la elasticidad de precios de la demanda es

$$\eta = \frac{p/x}{dp/dx}$$

Para un precio dado, si $|\eta| < 1$, se dice que la demanda es *inelástica*, y si $|\eta| > 1$, se dice que es *elástica*.

Elasticidad En los Ejercicios 41-44, calcular η para la función de demanda en el valor de x que se especifica. La demanda, en ese valor de x, ¿es elástica, inelástica o ni lo uno ni lo otro?

41. $p = 400 - 3x$
$x = 20$

42. $p = 5 - 0{,}03x$
$x = 100$

43. $p = 400 - 0{,}5x^2$
$x = 20$

44. $p = \dfrac{500}{x + 2}$
$x = 23$

Ejercicios de repaso del Capítulo 3

1. ***Para pensar*** Enunciar la definición de número crítico y representar una función f que presente los diversos tipos de números críticos.

2. Sea f una función impar, continua derivable y con los valores indicados en la tabla.

x	−5	−4	−1	0	2	3	6
$f(x)$	1	3	2	0	−1	−4	0

a) Hallar $f(4)$.
b) Determinar $f(-3)$.
c) Representar los puntos y esbozar una posible gráfica de f en el intervalo $[-6, 6]$. ¿Cuál es el menor número de puntos críticos en ese intervalo? Justificar la respuesta.
d) ¿Existe al menos un número c en el intervalo $(-6, 6)$ tal que $f'(c) = -1$? ¿Por qué?
e) ¿Es posible que no exista $\lim_{x\to 0} f(x)$? Explicar la respuesta.
f) ¿Es necesario que exista $f'(x)$ en $x = 2$? ¿Por qué?

En los Ejercicios 3 y 4, localizar los extremos absolutos de la función en el intervalo cerrado. Representar en la calculadora la función para confirmar los resultados.

3. $g(x) = 2x + 5 \cos x, \quad [0, 2\pi]$

4. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad [0, 2]$

5. ***Para pensar*** Consideremos la función
a) Representarla y verificar que $f(1) = f(7)$.
b) Nótese que $f'(x)$ no se anula en ningún punto de $[1, 7]$. Explicar por qué esto no contradice al teorema de Rolle.

6. ***Para pensar*** ¿Es aplicable el teorema del valor medio a la función $f(x) = 1/x^2$ en el intervalo $[-2, 1]$? ¿Por qué?

En los Ejercicios 7-10, hallar el punto (o puntos, en su caso) cuya existencia asegura el teorema del valor medio para el intervalo especificado.

7. $f(x) = x^{2/3}$

$1 \leqslant x \leqslant 8$

8. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$1 \leqslant x \leqslant 4$

9. $f(x) = x - \cos x$

$-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

10. $f(x) = \sqrt{x} - 2x$

$0 \leqslant x \leqslant 4$

11. ***Para la función*** $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, determinar el valor c que anuncia el teorema del valor medio en el intervalo $[x_1, x_2]$.

12. Comprobar el resultado del Ejercicio 11 para la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ en el intervalo $[0, 4]$.

En los Ejercicios 13-16, hallar los números críticos (si los hay) y los intervalos abiertos en los cuales la función es creciente o decreciente.

13. $f(x) = (x - 1)^2(x - 3)$

14. $g(x) = (x + 1)^3$

15. $h(x) = \sqrt{x}(x - 3)$

16. $f(x) = \text{sen}\, x + \cos x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

En los Ejercicios 17 y 18, usar el criterio de la primera derivada para hallar los extremos relativos y verificar los resultados en la calculadora.

17. $h(t) = \dfrac{1}{4}t^4 - 8t$

18. $g(x) = \dfrac{3}{2}\, \text{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2} - 1\right), \qquad [0, 4]$

En los Ejercicios 19 y 20, hallar los puntos de inflexión de la función propuesta.

19. $f(x) = x + \cos x$

$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

20. $f(x) = (x + 2)^2(x - 4)$

En los Ejercicios 21-24, calcular el límite.

21. $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{3x^2 + 5}$

22. $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{3x^2 + 5}$

23. $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{5 \cos x}{x}$

24. $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

En los Ejercicios 25-28, hallar las asíntotas horizontales y verticales, y verificar los resultados mediante una gráfica en la calculadora.

25. $h(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 4}$

26. $g(x) = \dfrac{5x^2}{x^2 + 2}$

27. $f(x) = \dfrac{3}{x} - 2$

27. $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

En los Ejercicios 29-32, representar la función en la calculadora. Usar la gráfica para aproximar los extremos relativos y las asíntotas.

29. $f(x) = x^3 + \dfrac{243}{x}$

30. $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2x|$

31. $f(x) = \dfrac{x - 1}{1 + 3x^2}$

32. $f(x) = \dfrac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + \cos 2x$

En los Ejercicios 33-50, estudiar dominio, recorrido, simetrías, asíntotas, intersecciones con los ejes, extremos relativos y puntos de inflexión para lograr una gráfica fiel de la función.

33. $f(x) = 4x - x^2$

34. $f(x) = 4x^3 - x^4$

35. $f(x) = x\sqrt{16 - x^2}$

36. $f(x) = (x^2 - 4)^2$

37. $f(x) = (x - 1)^3(x - 3)^2$

38. $f(x) = (x - 3)(x + 2)^3$

39. $f(x) = x^{1/3}(x + 3)^{2/3}$

40. $f(x) = (x - 2)^{1/3}(x + 1)^{2/3}$

41. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

42. $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

43. $f(x) = \dfrac{4}{1 + x^2}$

44. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^4}$

45. $f(x) = x^3 + x + \dfrac{4}{x}$

46. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$

47. $f(x) = |x^2 - 9|$

48. $f(x) = |x - 1| + |x - 3|$

49. $f(x) = x + \cos x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

50. $f(x) = \dfrac{1}{\pi}(2\, \text{sen}\, \pi x - \text{sen}\, 2\pi x), \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1$

51. ***Distancia mínima*** A media noche, el barco A está a 100 km al este del barco B. El barco A navega a 12 km/h y el B a 10 km/h. ¿A qué hora se encontrarán a distancia mínima uno de otro? ¿Cuál es esa distancia?

52. ***Área máxima*** Calcular las dimensiones del rectángulo de lados paralelos a los ejes y de área máxima que puede inscribirse en la elipse dada por

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{16} = 1$$

53. ***Longitud mínima*** Consideremos los triángulos rectángulos en el primer cuadrante con catetos en los ejes coordenados y con hipotenusa que pasa por el punto (1, 8). Hallar los vértices que hacen mínima la longitud de la hipotenusa.

54. ***Longitud mínima*** Hay que reforzar un muro con una viga que debe pasar por encima de una valla paralela de 5 pies de altura situada a 4 pies del muro. Calcular la longitud mínima de esa viga.

55. ***Área máxima*** Tres lados de un trapecio tienen la misma longitud s. De todos los trapecios con esa condición, probar que el de área máxima tiene su cuarto lado de longitud $2s$.

56. ***Área máxima*** Probar que el área máxima de un rectángulo inscrito en un triángulo es la mitad de la del triángulo.

57. ***Longitud máxima*** Calcular la longitud de la tubería más larga que se puede transportar por dos pasillos en ángulo recto, de anchuras 4 y 6 pies. (No usar trigonometría.)

58. ***Longitud máxima*** Rehacer el Ejercicio 57 con pasillos de anchuras a y b.

59. ***Longitud máxima*** Dos pasillos, de 6 y 9 pies de anchura se encuentran en ángulo recto. Hallar la máxima longitud de una viga que pueda pasar por él. [*Ayuda:* Si L es la longitud de la viga, probar que

$$L = 6 \operatorname{cosec} \theta + 9 \operatorname{cosec} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

donde θ es el ángulo entre la viga y el pasillo más estrecho.]

60. ***Longitud máxima*** Rehacer el Ejercicio 59 con pasillos de anchuras a y b. Probar que el resultado es el mismo que en el Ejercicio 58.

61. ***Movimiento armónico*** La altura de un objeto atado a un muelle viene dada por la ecuación armónica

$$y = \frac{1}{3} \cos 12t - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 12t$$

donde y se mide en pulgadas y t en segundos.

a) Calcular su altura y velocidad cuando $t = \pi/8$ segundos.
b) Probar que el máximo desplazamiento del objeto es 5/12 pulgadas.
c) Hallar el período P de y. Calcular, asimismo, la frecuencia f (número de oscilaciones por segundo) si $f = 1/P$.

62. ***Redacción*** La ecuación general que describe la altura de un objeto oscilante atado a un muelle es

$$y = A \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + B \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

donde k es la constante del muelle y m la masa del objeto.

a) Probar que su desplazamiento máximo es

$$\sqrt{A^2 + B^2}$$

b) Probar que oscila con una frecuencia

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

c) ¿Cómo cambia la frecuencia si el valor de k crece?
d) ¿Cómo cambia la frecuencia si la masa m crece?

En los Ejercicios 63 y 64, usar el método de Newton para aproximar los ceros reales de la función con tres decimales. Verificar los resultados en la calculadora.

63. $f(x) = x^3 - 3x - 1$

64. $f(x) = x^3 + 2x + 1$

En los Ejercicios 65 y 66, usar el método de Newton para aproximar, con tres decimales, el valor x del punto de intersección de las ecuaciones. Verificar los resultados con la calculadora.

65. $y = x^4$, $y = x + 3$

66. $y = \operatorname{sen} \pi x$, $y = 1 - x$

En los Ejercicios 67 y 68, hallar la diferencial dy.

67. $y = x(1 - \cos x)$

68. $y = \sqrt{36 - x^2}$

69. ***Un modelo matemático*** Los gastos en defensa (en miles de millones de dólares) entre 1970 y 1995 vienen expuestos en la tabla de la página siguiente, con el tiempo t medido en años y $t = 0$ correspondiendo a 1970. *(Fuente: U.S. Office of Management and Budget.)*

t	0	1	2	3	4	5	6
S	81,7	78,9	79,2	76,7	79,3	86,5	89,6

t	7	8	9	10	11	12	13
S	97,2	104,5	116,3	134,0	157,5	185,3	209,9

t	14	15	16	17	18	19	20
S	227,4	252,7	273,4	282,0	290,4	303,6	299,3

t	21	22	23	24	25
S	273,3	298,4	291,1	281,6	271,6

a) Usar regresión en la calculadora para ajustar a los datos un modelo de la forma $S = at^3 + bt^2 + ct + d$.
b) Representar en ella los datos y el modelo.
c) Según el modelo, ¿en qué momento de ese período es máximo el gasto?
d) Según el modelo, ¿cuándo están creciendo a ritmo más rápido?

70. ***Un modelo matemático*** Las importaciones de petróleo I (en miles de millones de dólares) entre 1980 y 1994, con $t = 0$ correspondiendo a 1980, se recogen en la tabla adjunta.

t	0	1	2	3	4
I	77,6	75,6	59,4	52,3	55,9

t	5	6	7	8	9
I	49,6	34,1	41,5	38,8	49,1

t	10	11	12	13	14
I	60,5	50,1	50,4	49,7	49,6

a) Usar regresión en la calculadora para ajustar a los datos un modelo de la forma

$$I = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$$

b) Representar en ella los datos y el modelo.
c) Según el modelo, ¿cuándo es mínima la importación de petróleo dentro de ese período?
d) Según el modelo, ¿cuándo está decreciendo el gasto de importación a ritmo más rápido?

71. ***Volumen y área superficial*** El diámetro de una esfera se ha medido como 18 cm, con un error no superior a 0,05 cm. Usar la diferencial para aproximar el posible error propagado y el porcentaje de error en el cálculo de su área y de su volumen.

72. ***Función de demanda*** Sea una función de demanda

$$p = 75 - \frac{1}{4}x$$

Si x pasa de 7 a 8, calcular y comparar los valores de Δp y dp.

73. ***Beneficios*** Calcular el beneficio máximo si la ecuación de la demanda es $p = 36 - 4x$ y el coste total si $C = 2x^2 + 6$

74. ***Beneficios*** El coste de producción de x unidades diarias es

$$C = \frac{1}{4}x^2 + 62x + 125$$

y el precio por unidad es

$$p = 75 - \frac{1}{3}x$$

a) ¿Qué producción diaria hace máximo el beneficio?
b) ¿Cuál hace mínimo el coste medio?
c) Estudiar la elasticidad de la demanda.

75. ***Ingresos*** Para grupos de 80 o más, una empresa de autobuses aplica el precio por persona de acuerdo con la fórmula

$$\text{Precio} = \$8{,}00 - \$0{,}05(n - 80), \qquad n \geqslant 80$$

¿Qué número de pasajeros producirá los máximos ingresos para la empresa?

76. ***Coste*** El coste de combustible para una locomotora es proporcional a la potencia $\frac{3}{2}$ de la velocidad ($s^{3/2}$) y para una velocidad de 25 millas/h es de $50 por hora. Hallar la velocidad que minimiza el coste por milla.

77. ***Coste de inventario*** El coste de inventario depende de los costes de pedido y de almacenaje de acuerdo con la fórmula

$$C = \left(\frac{Q}{x}\right)s + \left(\frac{x}{2}\right)r$$

Determinar el tamaño de la orden de pedido que minimiza el coste, supuesto que las ventas se producen a ritmo constante, Q es el número de unidades vendidas al año, r el coste anual de almacenaje de una unidad, s el coste de pedido y x el número de unidades por pedido.

78. ***Impuestos*** Las ecuaciones de demanda y de coste de cierto producto son $p = 600 - 3x$ y $C = 0{,}3x^2 + 6x + 600$, donde p es el precio por unidad, x el número de unidades, y C el coste de producción de x unidades. Si t es el impuesto por unidad, el beneficio al producir x unidades es $P = xp - C - xt$. Hallar el beneficio máximo para

a) $t = 5$, *b*) $t = 10$, y *c*) $t = 20$

79. Hallar el máximo y el mínimo en la gráfica de

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$$

a) sin usar el Cálculo,
b) usando el Cálculo.

80. Sea $f(x) = x^n$, para valores enteros positivos de n.
a) ¿Para qué valores de n tiene un mínimo relativo en el origen?
b) ¿Para qué valores de n tiene un punto de inflexión en el origen?

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 81 y 82, decidir si la afirmación propuesta es correcta. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

81. Si c es un número crítico de f, entonces f tiene un extremo relativo en $x = c$.

82. Una función $y = f(x)$ puede tener a lo sumo una asíntota horizontal.

83. ***Redacción*** El titular de un periódico afirma que «El ritmo de crecimiento del déficit público está decreciendo». ¿Qué implica esto acerca del déficit como función del tiempo?

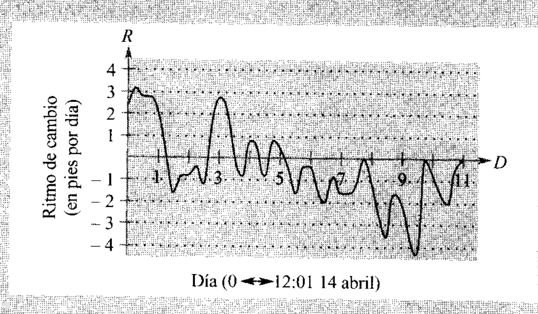
84. ***Un modelo matemático*** La tabla recoge las ventas anuales S de un producto durante 7 años, con $t = 1$ correspondiendo a 1991.

t	1	2	3	4	5	6	7
S	5,4	6,9	11,5	15,5	19,0	22,0	23,6

a) Usar regresión en la calculadora para ajustar a esos datos un modelo del tipo $S = at^3 + bt^2 + ct + d$.
b) Representar en ella los datos y el modelo.
c) Estimar, mediante el Cálculo, el tiempo t en el que las ventas crecieron al ritmo máximo.
d) ¿Es fiable ese modelo para predecir ventas futuras? ¿Por qué?

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

Cada vez que el río Connecticut alcanza un nivel de 105 pies sobre el nivel del mar, dos observatorios de Northampton, Massachusetts, refuerzan su servicio de vigilancia. Cada dos horas, miden el nivel y recogen los datos. En la primavera de 1996, iniciaron la vigilancia el 4 de abril, en que el río alcanzó 105 pies y crecía 0,2 pies/h hasta el 25 de abril, en que el nivel bajó de los 105 pies. Entre esas fechas, los registros muestran varias crecidas y descensos del nivel, llegando en algún momento cerca de 115 pies. Si el río hubiese alcanzado los 115 pies, la ciudad se hubiera visto amenazada.



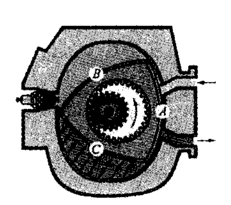
La gráfica adjunta muestra el *ritmo de cambio* del nivel del agua. Usar la gráfica para responder las cuestiones siguientes.

a) ¿Qué día crecía más rápidamente el nivel? ¿Cómo lo sabe?
b) ¿Qué día decrecía más rápidamente el nivel? ¿Cómo lo sabe?
c) Hubo dos fechas en las que el río creció, descendió y volvió a subir de nivel. ¿En cuáles?
d) Un minuto pasada la medianoche del 14 de abril, el nivel estaba en 111 pies. Estime su altura 24 y 48 horas más tarde. Explicar cómo se han hallado esas estimaciones.
e) El nivel llegó hasta un máximo nivel de 114,4 pies. ¿Qué día ocurrió eso?

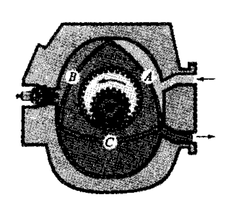
Capítulo 4

MOTIVACIÓN DEL CAPÍTULO

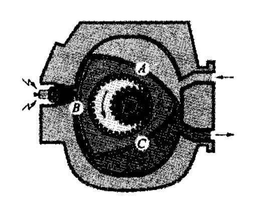
El ciclo del motor rotatorio de cuatro tiempos



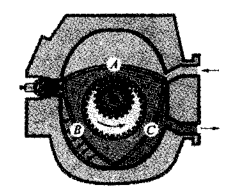
A tapa la salida, *B* comienza su compresión y *C* está terminando su expansión.



A gira para permitir admisión, *B* continúa en compresión y *C* inicia el escape.



Se produce la explosión en *B*, *A* sigue en admisión y *C* continúa permitiendo la expulsión por el escape.



A está terminando la admisión, *B* inicia la expansión y *C* casi ha finalizado su escape.

El motor rotatorio de Wankel y el área

Debe su nombre a Felix Wankel, quien desarrolló sus principios básicos en la década de los años cincuenta y constituye una alternativa al motor de pistón usual en los automóviles. Muchos fabricantes, incluidos Mercedes-Benz, Citröen y Ford, han experimentado con él, pero con diferencia su máxima implantación la han conseguido en los vehículos Mazda, cuyo modelo de motor rotatorio es el RX-7.

El motor de Wankel tiene varias ventajas sobre el de pistón. Su tamaño y su peso son la mitad que el equivalente en potencia en la versión con pistón. Frente a las 97 partes móviles de éstos, el de Wankel sólo tiene tres partes móviles importantes. Como resultado, el motor de Wankel requiere menores costes laborales y materiales, así como menor consumo interno de energía.

Aunque hay muchos posibles diseños para un motor rotatorio, el más común consta de una cavidad con dos lóbulos que contiene un rotor de tres lados. El tamaño del rotor, respecto del de la cavidad, es crítico en la determinación del factor de compresión y, en consecuencia, de la eficiencia del motor.

CUESTIONES

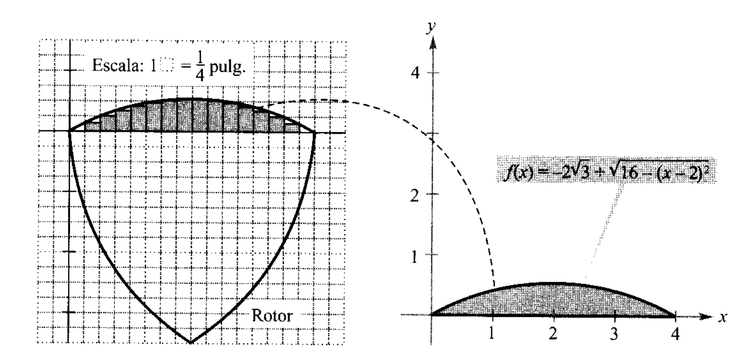
1. La región de la figura de abajo está acotada superiormente por la gráfica de

$$f(x) = -2\sqrt{3} + \sqrt{16 - (x - 2)^2}$$

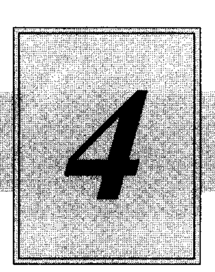
e inferiormente por el eje x. Describir diversas maneras de aproximar el área de esa región. Elegir una de ellas y usarla para estimar dicha área. ¿Cuánta precisión se espera de esta estimación?

2. Una vez estimada aproximadamente el área, pensar alguna forma de mejorar la aproximación obtenida. La nueva técnica, ¿permitiría lograr aproximaciones arbitrariamente precisas? Explicar la respuesta.

3. Usar la aproximación para estimar el área del «triángulo» curvado que se muestra en la figura.



El motor rotatorio de Wankel tiene la forma de un triángulo equilátero algo curvado. El área de este «triángulo» es utilizada por los ingenieros para optimizar el tamaño de la cámara de combustión.



Integración



4.1 Primitivas e integración indefinida

EXPLORACIÓN

Cálculo de primitivas. Para cada una de las derivadas siguientes, describa la función original F.

a) $F'(x) = 2x$

b) $F'(x) = x$

c) $F'(x) = x^2$

d) $F'(x) = \dfrac{1}{x^2}$

e) $F'(x) = \dfrac{1}{x^3}$

f) $F'(x) = \cos x$

¿Qué estrategia ha utilizado para hallarlas?

Primitivas

Supongamos que se nos pide encontrar una función F cuya derivada sea

$$f(x) = 3x^2$$

Por lo que sabemos de derivación, probablemente diríamos que

$$F(x) = x^3 \text{ ya que } \frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$$

La función F es una *primitiva* (o *antiderivada*) de f. En general, una función F es una **primitiva** (o **antiderivada**) de f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.

Decimos que F es *una* primitiva de f y no que es *la* primitiva de f. La razón es que, por ejemplo,

$$F_1(x) = x^3,\ F_2(x) = x^3 - 5,\ \text{y}\ F_3(x) = x^3 + 97$$

son, todas ellas, primitivas de $f(x) = 3x^2$. De hecho, para cualquier valor de la constante C, $F(x) = x^3 + C$ es primitiva de f.

TEOREMA 4.1 FAMILIA DE PRIMITIVAS

Si F es una primitiva de f en un intervalo I, entonces G es una primitiva de f en I si y sólo si G es de la forma

$$G(x) = F(x) + C, \text{ para todo } x \text{ en } I$$

donde C denota una constante.

Demostración: En una dirección, la demostración es obvia. En efecto, si $G(x) = F(x) + C$, $F'(x) = f(x)$ y C es constante, entonces

$$G'(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + C] = F'(x) + 0 = f(x)$$

Para demostrar la otra implicación, definimos

$$H(x) = G(x) - F(x)$$

Si H no es constante en el intervalo I, deben existir a y b ($a < b$) en I tales que $H(a) \neq H(b)$. Además, por ser H derivable en (a, b), del teorema del valor medio podemos deducir que existe algún c en (a, b) para el cual

$$H'(c) = \frac{H(b) - H(a)}{b - a}$$

Como $H(b) \neq H(a)$, se sigue que $H'(c) \neq 0$. Sin embargo, de $G'(c) = F'(c)$ se deduce que $H'(c) = G'(c) - F'(c) = 0$, en contradicción con $H'(c) \neq 0$. Por consiguiente, concluimos que $H(x)$ es una constante, digamos C. Por tanto, $G(x) - F(x) = C$, o sea $G(x) = F(x) + C$. □

Según el Teorema 4.1 se pueden representar todas las primitivas de una función añadiendo una constante a una primitiva concreta *conocida*. Así, una vez sabido que $D_x[x^2] = 2x$ la familia de *todas* las primitivas de $f(x) = 2x$ viene dada por

$$G(x) = x^2 + C \qquad \text{Familia de todas las primitivas de } f(x) = 2x$$

donde C es una constante, llamada **constante de integración**. La familia de funciones representada por G se llama la **primitiva general** de f, y $G(x) = x^2 + C$ es la **solución general** de la *ecuación diferencial*

$$G'(x) = 2x \qquad \text{Ecuación diferencial}$$

Una **ecuación diferencial** en x e y es una ecuación que involucra a x, a y y a derivadas de y. Por ejemplo, $y' = 3x$ o $y' = x^2 + 1$ son ecuaciones diferenciales.

EJEMPLO 1 Resolviendo una ecuación diferencial

Hallar la solución general de la ecuación diferencial $y' = 2$.

Solución: Para empezar, hemos de hallar una función cuya derivada sea 2. Es válida

$$y = 2x$$

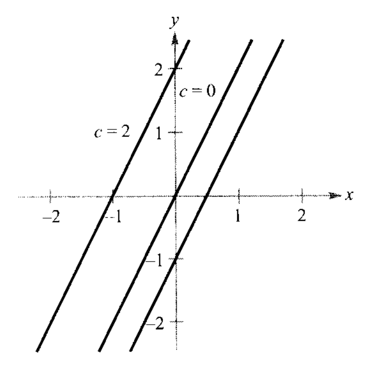


FIGURA 4.1
Funciones de la forma $y = 2x + C$.

Ahora, el Teorema 4.1 nos permite saber que la solución general de la ecuación diferencial propuesta es

$$y = 2x + C$$

Las gráficas de varias funciones de la forma $y = 2x + C$ se muestran en la Figura 4.1. □

Notación para las primitivas

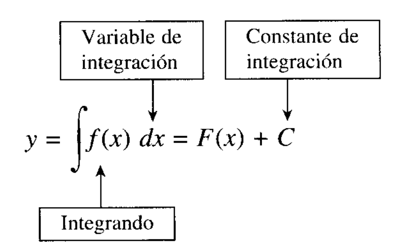
Al resolver una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

conviene expresarla en la forma equivalente

$$dy = f(x)\,dx$$

La operación de hallar todas las soluciones de esta ecuación se llama **integración indefinida** o **antiderivación,** y se denota por un signo integral $\int$. La solución general se denota por



$$y = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

La expresión $\int f(x)\,dx$ se lee *«la integral indefinida de f con respecto a x»*. Así pues, la diferencial dx sirve para identificar x como la variable de integración.

En este libro, siempre que escribimos $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ queremos significar que F es una primitiva de f *en un intervalo.*

Reglas básicas de integración

La naturaleza inversa de la integración y la derivación puede verificarse sustituyendo f por F' en la definición de integral indefinida, con lo que se obtiene

$$\boxed{\int F'(x)\,dx = F(x) + C}$$ La integración es la «inversa» de la derivación

Además, si $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, entonces

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)}$$ La derivación es la «inversa» de la integración

Estas dos ecuaciones permiten obtener fórmulas de integración directamente de las fórmulas de derivación, como muestra el siguiente resumen.

Reglas básicas de integración

Fórmula de derivación	Fórmula de integración	
$\frac{d}{dx}[C] = 0$	$\int 0\,dx = C$	
$\frac{d}{dx}[kx] = k$	$\int k\,dx = kx + C$	
$\frac{d}{dx}[kf(x)] = kf'(x)$	$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$	
$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$	$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$	
$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$	Regla de las potencias
$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	
$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	
$\frac{d}{dx}[\operatorname{tg} x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$	
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \operatorname{tg} x$	$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C$	
$\frac{d}{dx}[\operatorname{ctg} x] = -\operatorname{cosec}^2 x$	$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$	
$\frac{d}{dx}[\operatorname{cosec} x] = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x$		

Nota. Nótese que la regla de las potencias para la integración tiene la restricción $n \neq -1$. La evaluación de $\int 1/x\,dx$ deberá esperar hasta la entrada en escena de la función logaritmo natural en el Capítulo 5.

EJEMPLO 2 Aplicación de las reglas básicas de integración

Describir las primitivas de $3x$.

Solución:

$$\int 3x\,dx = 3\int x\,dx \qquad \text{Regla del múltiplo constante}$$

$$= 3\int x^1\,dx \qquad \text{Reescribir } (x = x^1)$$

$$= 3\left(\frac{x^2}{2}\right) + C \qquad \text{Regla de las potencias } (n = 1)$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + C \qquad \text{Simplificar}$$

□

Al evaluar integrales indefinidas, la aplicación estricta de las reglas básicas de integración tiende a producir complicadas constantes de integración. Así, en el Ejemplo 2 podríamos haber escrito

$$\begin{aligned}\int 3x\,dx &= 3\int x\,dx\\ &= 3\left(\frac{x^2}{2}+C\right)\\ &= \frac{3}{2}x^2+3C\end{aligned}$$

Sin embargo, ya que C representa una constante *arbitraria*, es no sólo embarazoso sino innecesario escribir $3C$ como constante de integración y optamos por la forma más simple $\frac{3}{2}x^2 + C$.

En el Ejemplo 2 vemos que el proceso de integración es similar al de derivación.



EJEMPLO 3 Reescribir antes de integrar

	Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
a)	$\int \frac{1}{x^3}\,dx$	$\int x^{-3}\,dx$	$\frac{x^{-2}}{-2}+C$	$-\frac{1}{2x^2}+C$
b)	$\int \sqrt{x}\,dx$	$\int x^{1/2}\,dx$	$\frac{x^{3/2}}{3/2}+C$	$\frac{2}{3}x^{3/2}+C$
c)	$\int 2\,\text{sen}\,x\,dx$	$2\int \text{sen}\,x\,dx$	$2(-\cos x)+C$	$-2\cos x + C$ □

Programas de *software* como Derive, Maple, Mathcad o Mathematica y el TI-92 son capaces de efectuar integración indefinida. Si dispone de alguno de ellos, verifique con él los resultados del Ejemplo 3.

Recordemos que se puede comprobar si una primitiva es correcta sin más que derivarla. Así, en el Ejemplo 3*b*, con el fin de saber si $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$ es primitiva correcta, basta derivarla, obteniendo

$$D_x\left[\frac{2}{3}x^{3/2}+C\right] = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)x^{1/2} = \sqrt{x}$$

Las reglas básicas de integración antes expuestas permiten integrar *cualquier* función polinómica, como ilustra el Ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Integración de funciones polinómicas

a) $$\begin{aligned}\int dx &= \int 1\,dx\\ &= x + C\end{aligned}$$

b) $$\int (x+2)\,dx = \int x\,dx + \int 2\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + C_1 + 2x + C_2$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + C \qquad C = C_1 + C_2$$

La segunda línea suele omitirse.

c) $$\int (3x^4 - 5x^2 + x)\,dx = 3\left(\frac{x^5}{5}\right) - 5\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{3}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$$ □

EJEMPLO 5 Reescribir antes de integrar

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \qquad \text{Reescribir como dos fracciones}$$

$$= \int (x^{1/2} + x^{-1/2})\,dx \qquad \text{Reexpresar con exponentes racionales}$$

$$= \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C \qquad \text{Integrar}$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C \qquad \text{Simplificar}$$ □

Nota. Al integrar cocientes, no deben integrarse separadamente numerador y denominador. Eso es tan incorrecto en integración como lo era en derivación. Así, el Ejemplo 5 deja bien claro que

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx \neq \frac{\int (x+1)\,dx}{\int \sqrt{x}\,dx}$$

EJEMPLO 6 Reescribir antes de integrar

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) dx \qquad \text{Reescribir como un producto}$$

$$= \int \sec x \operatorname{tg} x\,dx \qquad \text{Reexpresar usando identidades trigonométricas}$$

$$= \sec x + C \qquad \text{Integrar}$$ □

Condiciones iniciales y soluciones particulares

Ya hemos visto que la ecuación $y = \int f(x)\,dx$ tiene muchas soluciones, que difieren unas de otras en una constante. Eso quiere decir que las gráficas de dos primitivas de f son traslación vertical una de otra. Así, la Figura 4.2 muestra varias primitivas

$$y = \int (3x^2 - 1)\,dx = x^3 - x + C \qquad \text{Solución general}$$

para varios valores enteros de C. Cada una de estas primitivas es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1$$

FIGURA 4.2
La solución particular que satisface la condición inicial $F(2) = 4$ es $F(x) = x^3 - x - 2$.

En muchas aplicaciones de la integración se nos da suficiente información para determinar una **solución particular**. Para ello basta el valor de $y = F(x)$ en un valor de x. (Esta información se llama una **condición inicial**.) Por ejemplo, en la Figura 4.2 sólo una de las curvas pasa por el punto (2, 4). Para determinar esa curva se utiliza la siguiente información.

$$F(x) = x^3 - x + C \qquad \text{Solución general}$$

$$F(2) = 4 \qquad \text{Condición inicial}$$

Usando la condición inicial en la solución general podemos hallar que $F(2) = 8 - 2 + C = 4$, lo cual implica que $C = -2$. Por tanto, obtenemos

$$F(x) = x^3 - x - 2 \qquad \text{Solución particular}$$

EJEMPLO 7 Cálculo de una solución particular

Hallar la solución general de

$$F'(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$$

y la solución particular que satisface la condición inicial $F(1) = 0$.

Solución: Para hallar la solución general integramos:

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \int x^{-2}\,dx$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + C$$

$$= -\frac{1}{x} + C \qquad \text{Solución general}$$

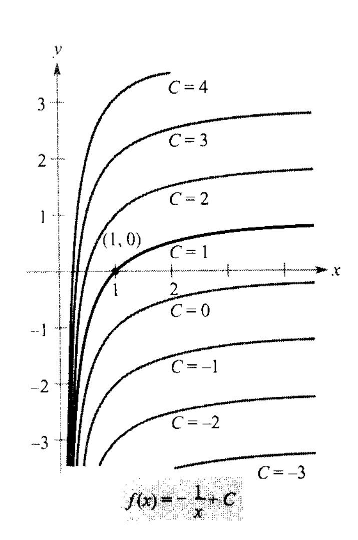


FIGURA 4.3
La solución particular que satisface la condición inicial $F(1) = 0$ es $F(x) = -(1/x) + 1$, $x > 0$.

Usando la condición inicial $F(1) = 0$, podemos hallar C de esta manera:

$$F(1) = -\frac{1}{1} + C = 0 \implies C = 1$$

En consecuencia, la solución particular es (Figura 4.3)

$$F(x) = -\frac{1}{x} + 1, \quad x > 0 \qquad \text{Solución particular}$$ □

Hasta ahora, en esta sección hemos usado x como variable de integración. En las aplicaciones es conveniente, con frecuencia, usar una variable diferente. En el próximo ejemplo, la variable de integración es el *tiempo t*.

EJEMPLO 8 Un problema de movimiento vertical

Se lanza una bola hacia arriba con una velocidad inicial de 64 pies/s desde una altura inicial de 80 pies (Figura 4.4).

a) Escribir la función posición que expresa la altura s en función del tiempo t.

b) ¿Cuándo llega la bola al suelo?

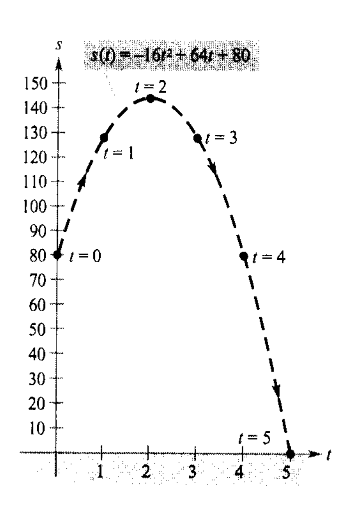


FIGURA 4.4
Posición de la bola en el instante t.

Solución:

a) Sea $t = 0$ el instante inicial. Las dos condiciones iniciales dadas afirman que

$$s(0) = 80 \qquad \text{La altura inicial es 80 pies}$$

$$s'(0) = 64 \qquad \text{La velocidad inicial es 64 pies/s}$$

Tomando -32 pies/s^2 como valor de la aceleración de la gravedad, tenemos

$$s''(t) = -32$$

$$s'(t) = \int s''(t)\,dt = \int -32\,dt = -32t + C_1$$

Usando la velocidad inicial obtenemos $s'(0) = 64 = -32(0) + C_1$, lo cual implica que $C_1 = 64$. Integrando ahora $s'(t)$, vemos que

$$s(t) = \int s'(t)\,dt = \int (-32t + 64)\,dt = -16t^2 + 64t + C_2$$

y usando la altura inicial

$$s(0) = 80 = -16(0^2) + 64(0) + C_2$$

de donde se sigue que $C_2 = 80$. Por tanto, la función posición es

$$s(t) = -16t^2 + 64t + 80$$

b) Podemos hallar el momento de impacto en el suelo igualando a cero la función posición del apartado anterior.

$$s(t) = -16t^2 + 64t + 80 = 0$$

$$-16(t + 1)(t - 5) = 0$$

$$t = -1, 5$$

Como t ha de ser positivo, concluimos que la bola llega al suelo 5 segundos después de haber sido lanzada. □

Nota. En el Ejemplo 8 la función posición tiene la forma

$$s(t) = \tfrac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0,$$

donde $g = -32$, v_0 es la velocidad inicial y s_0 la altura inicial (véase Sección 2.2).

El Ejemplo 8 enseña cómo usar el Cálculo para resolver problemas en los que la aceleración viene determinada por una fuerza gravitatoria. Una estrategia análoga sirve para analizar otros problemas de movimiento rectilíneo (horizontal o vertical) en los que la aceleración (o deceleración) es el resultado de alguna otra fuerza, como ocurre en los Ejercicios 67-76.

Antes de hacer los ejercicios, tenga bien en cuenta que uno de los pasos más importantes en la integración consiste en *reexpresar el integrando* en una forma que se adapte a las reglas básicas. Con el fin de ilustrar más este aspecto, adjuntamos algunos ejemplos adicionales.

Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
$\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$	$2\displaystyle\int x^{-1/2}dx$	$2\left(\dfrac{x^{1/2}}{1/2}\right) + C$	$4x^{1/2} + C$
$\displaystyle\int (t^2 + 1)^2\,dt$	$\displaystyle\int (t^4 + 2t^2 + 1)\,dt$	$\dfrac{t^5}{5} + 2\left(\dfrac{t^3}{3}\right) + t + C$	$\dfrac{1}{5}t^5 + \dfrac{2}{3}t^3 + t + C$
$\displaystyle\int \frac{x^3 + 3}{x^2}\,dx$	$\displaystyle\int (x + 3x^{-2})\,dx$	$\dfrac{x^2}{2} + 3\left(\dfrac{x^{-1}}{-1}\right) + C$	$\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{x} + C$
$\displaystyle\int \sqrt[3]{x}(x - 4)\,dx$	$\displaystyle\int (x^{4/3} - 4x^{1/3})\,dx$	$\dfrac{x^{7/3}}{7/3} - 4\left(\dfrac{x^{4/3}}{4/3}\right) + C$	$\dfrac{3}{7}x^{4/3}(x - 7) + C$

Ejercicios de la Sección 4.1

En los Ejercicios 1-4, verificar la igualdad probando que la derivada del miembro de la derecha coincide con el integrando del de la izquierda.

1. $\displaystyle\int \left(-\frac{9}{x^4}\right) dx = \frac{3}{x^3} + C$

2. $\displaystyle\int \left(4x^3 - \frac{1}{x^2}\right) dx = x^4 + \frac{1}{x} + C$

3. $\displaystyle\int (x - 2)(x + 2)\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 - 4x + C$

4. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x^{3/2}}\,dx = \frac{2(x^2 + 3)}{3\sqrt{x}} + C$

En los Ejercicios 5-10, completar la tabla utilizando los ejemplos previos a los ejercicios como modelos.

Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
5. $\int \sqrt[3]{x}\, dx$			
6. $\int \frac{1}{x^2}\, dx$			
7. $\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\, dx$			
8. $\int x(x^2+3)\, dx$			
9. $\int \frac{1}{2x^3}\, dx$			
10. $\int \frac{1}{(2x)^3}\, dx$			

En los Ejercicios 11-14, hallar la solución general de la ecuación diferencial y comprobar el resultado por derivación.

11. $\frac{dy}{dt} = 3t^2$ **12.** $\frac{dr}{d\theta} = \pi$

13. $\frac{dy}{dx} = x^{3/2}$ **14.** $\frac{dy}{dx} = 3x^{-4}$

En los Ejercicios 15-30, evaluar la integral indefinida y verificar el resultado por derivación.

15. $\int (x^3 + 2)\, dx$ **16.** $\int (x^2 - 2x + 3)\, dx$

17. $\int (x^{3/2} + 2x + 1)\, dx$ **18.** $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$

19. $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx$ **20.** $\int (\sqrt[4]{x^3} + 1)\, dx$

21. $\int \frac{1}{x^3}\, dx$ **22.** $\int \frac{1}{x^4}\, dx$

23. $\int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x}}\, dx$ **24.** $\int \frac{x^2 + 1}{x^2}\, dx$

25. $\int (x + 1)(3x - 2)\, dx$ **26.** $\int (2t^2 - 1)^2\, dt$

27. $\int y^2\sqrt{y}\, dy$ **28.** $\int (1 + 3t)t^2\, dt$

29. $\int dx$ **30.** $\int 3\, dt$

En los Ejercicios 31-38, evaluar la integral trigonométrica y comprobar el resultado por derivación.

31. $\int (2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x)\, dx$ **32.** $\int (t^2 - \operatorname{sen} t)\, dt$

33. $\int (1 - \operatorname{cosec} t \operatorname{ctg} t)\, dt$ **34.** $\int (\theta^2 + \sec^2 \theta)\, d\theta$

35. $\int (\sec^2 \theta - \operatorname{sen} \theta)\, d\theta$ **36.** $\int \sec y (\operatorname{tg} y - \sec y)\, dy$

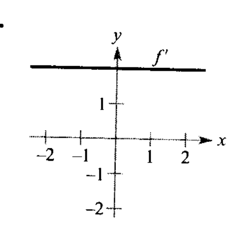
37. $\int (\operatorname{tg}^2 y + 1)\, dy$ **38.** $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

En los Ejercicios 39 y 40, esbozar las gráficas de la función $g(x) = f(x) + C$ para $C = -2$, $C = 0$ y $C = 3$ sobre unos mismos ejes coordenados.

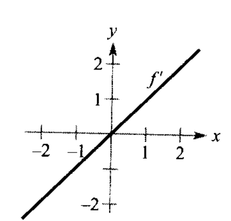
39. $f(x) = \cos x$ **40.** $f(x) = \sqrt{x}$

En los Ejercicios 41-44, se da la gráfica de la derivada de una función. Esbozar las gráficas de dos funciones que tengan esa derivada (hay más de una respuesta correcta).

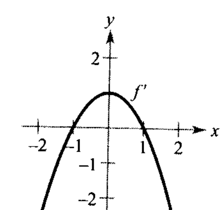
41.



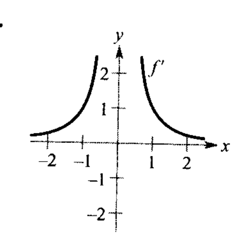
42.



43.



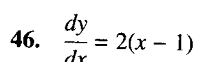
44.

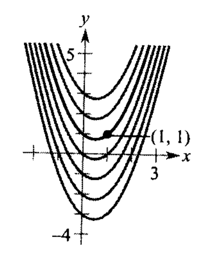


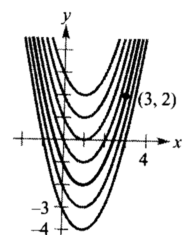
En los Ejercicios 45-48, hallar la ecuación para y, dada su derivada y el punto que se indica sobre la curva.

45. $\frac{dy}{dx} = 2x - 1$

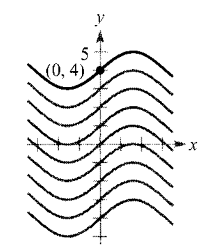
46. $\frac{dy}{dx} = 2(x - 1)$



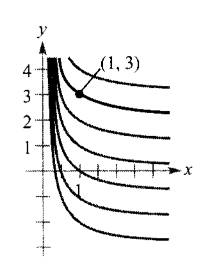




47. $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$

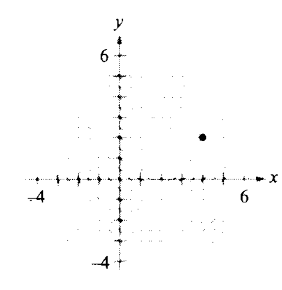


48. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}, \quad x > 0$

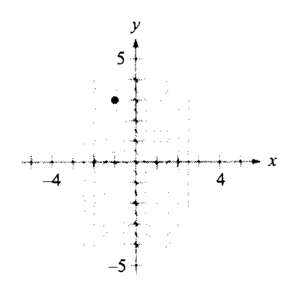


Campos de direcciones En los Ejercicios 49 y 50, se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo de direcciones. Un *campo de direcciones* consta de segmentos rectos, con pendientes fijadas por la ecuación diferencial, que ofrecen una visualización de sus soluciones. *a*) Esbozar dos soluciones aproximadas de la ecuación sobre el campo de direcciones, una de las cuales pase por el punto especificado. *b*) Hallar, por integración, la solución particular de la ecuación diferencial y representarla en la calculadora. Comparar el resultado con los esbozos del apartado *a*).

49. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}x - 1, (4, 2)$



50. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - 1, (-1, 3)$



En los Ejercicios 51-54, resolver la ecuación diferencial.

51. $f''(x) = 2, f'(2) = 5, f(2) = 10$

52. $f''(x) = x^2, f'(0) = 6, f(0) = 3$

53. $f''(x) = x^{-3/2}, f'(4) = 2, f(0) = 0$

54. $f''(x) = \text{sen}\, x, f'(0) = 1, f(0) = 6$

55. ***Crecimiento de un árbol*** Un vivero suele vender los árboles tras 6 años de crecimiento. El ritmo de crecimiento en esos 6 años viene dado por

$$\frac{dh}{dt} = 1{,}5t + 5$$

donde t es el tiempo en años y h la altura en cm. En el momento de plantarlos, miden 12 cm (en $t = 0$).

a) Calcular su altura tras t años.

b) ¿Qué altura tienen en el momento de ser vendidos?

56. ***Crecimiento de una población*** El ritmo de crecimiento dP/dt de una población de bacterias es proporcional a la raíz cuadrada de t, donde P es el tamaño de la población y t el tiempo en días ($0 \leqslant t \leqslant 10$). Esto es,

$$\frac{dP}{dt} = k\sqrt{t}$$

El tamaño inicial de la población es 500. Tras un día, ha crecido hasta 600. Estimar la población a los 7 días.

Movimiento vertical En los Ejercicios 57-60, despreciar la resistencia del aire y tomar $a(t) = -32$ pies/s^2 como aceleración de la gravedad.

57. Se lanza una bola verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 60 pies/s. ¿Qué altura alcanza?

58. Probar que la altura alcanzada por un objeto lanzado verticalmente hacia arriba desde una altura de s_0 pies, con velocidad inicial v_0 pies/s, viene dada por la función

$$f(t) = -16t^2 + v_0 t + s_0$$

59. ¿Con qué velocidad inicial ha de lanzarse un objeto hacia arriba, desde el suelo, para que alcance lo más alto del monumento a Washington, que mide 550 pies?

60. Desde un globo, que asciende a 16 pies/s, se suelta un saco de arena cuando el globo está a 64 pies de altura.

a) ¿Cuántos segundos tarda el saco en llegar al suelo?

b) ¿Con qué velocidad impacta en el suelo?

Movimiento vertical En los Ejercicios 61-64, tomar $a(t) = -32$ pies/s^2 como aceleración de la gravedad y despreciar la resistencia del aire.

61. Probar que la altura de un objeto lanzado hacia arriba desde una altura de s_0 metros sobre el nivel del suelo y con velocidad inicial v_0 m/s, viene dada por

$$f(t) = -4{,}9t^2 + v_0 t + s_0$$

62. ***El Gran Cañón*** tiene 1.600 m de máxima profundidad. Se deja caer una piedra desde encima de ese punto. Expresar la altura de la piedra en función del tiempo t (en segundos). ¿Cuánto tardará la piedra en llegar al suelo?

63. Una pelota se lanza hacia arriba, desde el suelo, con velocidad inicial de 10 m/s. Calcular su máxima altura.

64. ¿Con qué velocidad inicial hay que lanzar un objeto hacia arriba, desde el suelo, para que llegue a una altura máxima de 200 m?

65. ***Gravedad lunar*** En la Luna, la aceleración de la gravedad es $-1{,}6 \text{ m/s}^2$. Se deja caer una piedra desde cierta altura y tarda 20 segundos en llegar al suelo de la Luna. ¿Desde qué altura ha caído? ¿Con qué velocidad ha impactado en el suelo?

66. ***Velocidad de escape*** La velocidad mínima requerida para que un objeto lanzado desde la Tierra escape de la atracción gravitatoria de ésta se obtiene como solución de la ecuación

$$\int v\,dv = -GM \int \frac{1}{y^2}\,dy$$

donde v es la velocidad, y la distancia al centro de la Tierra, G la constante de la gravitación y M la masa de la Tierra.

Demostrar que v e y están relacionados por la ecuación

$$v^2 = v_0^2 + 2GM\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R}\right)$$

donde v_0 es la velocidad inicial del objeto y R el radio de la Tierra.

Movimiento rectilíneo En los Ejercicios 67-70, considerar una partícula que se mueve a lo largo del eje x. Su posición en el instante t viene dada por $x(t)$, su velocidad por $x'(t)$ y su aceleración por $x''(t)$.

67. $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 5$

a) Hallar la velocidad y la aceleración de la partícula.

b) Hallar los intervalos abiertos de t en que la partícula se mueve hacia la derecha.

c) Calcular la velocidad de la partícula cuando su aceleración es cero.

68. Repetir el Ejercicio 67 con la función posición

$$x(t) = (t-1)(t-3)^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 5$$

69. Una partícula se mueve por el eje x con velocidad $v(t) = 1/\sqrt{t}$, $t > 0$. En el instante $t = 1$ su posición es $x = 4$. Hallar la aceleración y la función posición de esta partícula.

70. Una partícula, inicialmente en reposo, se mueve por el eje x de manera tal que su aceleración en $t > 0$ es $a(t) = \cos t$. En el instante $t = 0$ su posición es $x = 3$.

a) Calcular su velocidad y su función posición.

b) ¿En qué instante t está en reposo?

71. ***Aceleración*** Un automóvil tarda 13 segundos en acelerar de 25 km/h a 80 km/h. Suponiendo aceleración constante, calcular:

a) La aceleración en m/s^2.

b) La distancia que recorre en esos 13 segundos.

72. ***Deceleración*** Un automóvil viaja a 45 millas/h y se detiene en un stop, con deceleración constante, 132 pies más allá del punto en que actuaron los frenos.

a) ¿Cuánto había recorrido en el momento en que su velocidad se había reducido a 30 millas/h?

b) ¿Cuánto había recorrido en el momento en que su velocidad se había reducido a 15 millas/h?

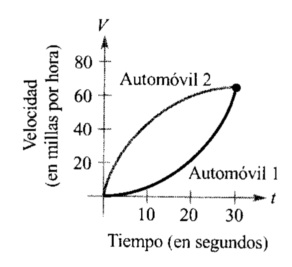
c) Dibujar la recta real entre 0 y 132 y representar en ella los puntos hallados en *a)* y *b)*. ¿Qué conclusión puede extraerse?

73. ***Aceleración*** Cuando un semáforo se pone verde, un automóvil arranca con aceleración constante de 6 pies/s^2. En el mismo momento un camión, que lleva velocidad constante de 30 pies/s, le adelanta.

a) ¿A qué distancia adelantará el automóvil al camión?

b) ¿Qué velocidad llevará el automóvil en ese instante?

74. ***Para pensar*** Dos automóviles, que parten del reposo, aceleran en 30 segundos hasta 65 millas/h. La figura muestra la velocidad de cada uno de ellos. ¿Están uno junto al otro al final de esos 30 segundos? Explicar la respuesta.



75. ***Aceleración*** Un avión cargado parte del reposo con aceleración constante. Para despegar necesita 0,7 millas de pista y una velocidad de 160 millas/h. ¿Qué aceleración necesita?

76. ***Separación entre aviones*** Dos aviones están en la misma dirección de aterrizaje y, de acuerdo con las normas de la FAA, han de mantener 3 millas de separación. El avión A está a 10 millas del punto de aterrizaje y va decreciendo su velocidad desde 150 millas/h hasta la velocidad de aterrizaje, que es 100 millas/h. El B está a 17 millas del punto de aterrizaje y va bajando su velocidad desde 250 millas/h hasta su velocidad de aterrizaje, que es 115 millas/h.

a) Suponiendo que los dos tienen deceleraciones constantes, hallar las funciones posición respectivas, s_1 y s_2, de A y B. Denotemos por $t = 0$ el instante en que los aviones están a 10 y 17 millas de distancia del aeropuerto.

b) Representar esas funciones en la calculadora.

c) Hallar una fórmula para la distancia d entre los dos aviones como función del tiempo t. Representar d en la calculadora. ¿Es $d < 3$ en algún momento anterior al aterrizaje de A? En caso afirmativo, hallar ese instante.

d) Si los aviones no guardan la distancia exigida, determinar cuánto tendría que reducir B su velocidad de 250 millas/h para cumplir los requisitos de la FAA.

Coste marginal En los Ejercicios 77 y 78, hallar la función de coste y el coste medio para el coste marginal dado (coste cuando $x = 0$).

	Coste marginal	*Coste fijo*
77.	$\dfrac{dC}{dx} = 2x - 12$	\$50
78.	$\dfrac{dC}{dx} = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{10} + 10$	\$2.300

En los Ejercicios 79 y 80, hallar las funciones de ingresos y de demanda para el ingreso marginal que se especifica.

79. $\dfrac{dR}{dx} = 100 - 5x$ **80.** $\dfrac{dR}{dx} = 100 - 6x - 2x^2$

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 81-84, decidir si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar la razón o exhibir un ejemplo que demuestre su falsedad.

81. Toda primitiva de un polinomio de grado n es un polinomio de grado $n + 1$.

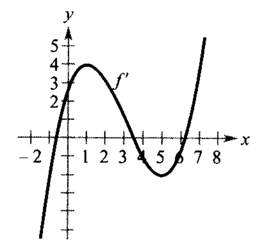
82. Si $p(x)$ es una función polinómica, p tiene exactamente una primitiva cuya gráfica pasa por el origen.

83. Si $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de $f(x)$, entonces $F(x) = G(x) + C$.

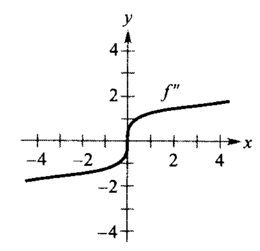
84. Si $f'(x) = g(x)$ entonces $\int g(x)\,dx = f(x) + C$.

85. ***Para pensar*** Usar la gráfica de f' dada en la figura con el fin de responder estas cuestiones, supuesto que $f(0) = -4$. Explicar las respuestas.

a) Aproximar la pendiente de f en $x = 4$.
b) ¿Es posible que $f(2) = -1$?
c) ¿Es $f(5) - f(4) > 0$?
d) Estimar el valor de x en el que f es máxima.
e) Aproximar los intervalos en que la gráfica de f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo. Estimar las coordenadas x de los puntos de inflexión.
f) Aproximar la coordenada x del mínimo de $f''(x)$.
g) Esbozar la gráfica de f.



86. ***Para pensar*** Las gráficas de f y de f' pasan por el origen. Usar la gráfica de f'' que se muestra en la figura para esbozar las de f y f'.



87. ***Aceleración*** Galileo Galilei (1564-1642) estableció la siguiente proposición relativa a la caída de objetos: El tiempo en el que un cuerpo uniformemente acelerado recorre una distancia cualquiera es igual al tiempo que tardaría ese mismo objeto viajando a una velocidad uniforme cuyo valor fuese la media de la velocidad inicial y final del objeto acelerado. Utilizar las técnicas de esta sección para probarla.

88. Sean $s(x)$ y $c(x)$ dos funciones tales que $s'(x) = c(x)$ y $c'(x) = -s(x)$ para todo x. Si $s(0) = 0$ y $c(0) = 1$, demostrar que $[s(x)]^2 + [c(x)]^2 = 1$.

4.2 Área

Notación sigma

En la sección anterior hemos estudiado la antiderivación. En esta sección investigaremos un problema citado en la Sección 1.1, en el cálculo del área de una región en el plano. A primera vista, parece que esos dos conceptos no tengan relación alguna. No obstante, descubriremos en la Sección 4.4 que están íntimamente ligados por el importantísimo teorema fundamental del Cálculo.

Empezamos introduciendo una notación concisa para las sumas, que se denomina **notación sigma** debido a que utiliza la letra griega Σ, la sigma mayúscula.

NOTACIÓN SIGMA **La suma de n términos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ se escribe**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

donde i es el índice de suma, a_i es el i-ésimo término de la suma, y los límites inferior y superior de la suma son 1 y n.

Nota. Los límites inferior y superior de la suma han de ser constantes *respecto del índice de suma.* Sin embargo, el límite inferior no tiene por qué ser 1. Cualquier entero menor o igual que el límite superior es lícito.

EJEMPLO 1 Utilización de la notación sigma

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} (i+1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

c) $\displaystyle\sum_{j=3}^{7} j^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(k^2+1) = \frac{1}{n}(1^2+1) + \frac{1}{n}(2^2+1) + \cdots + \frac{1}{n}(n^2+1)$

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$

Observemos, de *a)* y *b)*, que una misma suma se puede representar de maneras diferentes mediante la notación sigma. □

PARA MÁS INFORMACIÓN
Para una interpretación geométrica de las fórmulas de suma, véase el artículo «Looking at $\sum_{k=1}^{n} k$ y $\sum_{k=1}^{n} k^2$ Geometrically», de Eric Hegblom en *Mathematics Teacher*, octubre 1993.

Aunque se puede usar cualquier variable como índice de suma, se suelen usar i, j y k. En el Ejemplo 1, el índice de suma no aparece en la suma desarrollada.

LA SUMA DE LOS 100 PRIMEROS ENTEROS

El maestro de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) pidió a sus alumnos que sumaran los enteros del 1 al 100. Cuando Gauss dio con la respuesta correcta momentos después, el maestro no pudo evitar mirarle en silencio, atónito. He aquí lo que Gauss hizo:

$$\begin{array}{r} 1 + \ \ 2 + \ \ 3 + \cdots + 100 \\ 100 + 99 + 98 + \cdots + \ \ \ 1 \\ \hline 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 \end{array}$$

$$\frac{100 \times 101}{2} = 5.050$$

Esto se generaliza en el Teorema 4.2, donde

$$\sum_{i=1}^{100} i = \frac{100(101)}{2} = 5.050$$

Las siguientes propiedades se deducen usando las leyes asociativa y conmutativa de la suma y la distributiva de la suma respecto de la multiplicación. (En la primera propiedad, k es una constante.)

1. $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k \sum_{i=1}^{n} a_i$
2. $\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

El próximo teorema, cuya demostración se expone en el apéndice, resume varias fórmulas útiles de suma de potencias.

TEOREMA 4.2 FÓRMULAS DE SUMA

1. $\sum_{i=1}^{n} c = cn$
2. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

EJEMPLO 2 Evaluación de una suma

Calcular $\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2}$ para $n = 10$, 100, 1.000 y 10.000.

Solución: Aplicando el Teorema 4.2 vemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i+1) \qquad \text{Sacamos fuera de la suma el factor constante } 1/n^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right) \qquad \text{Escribir como dos sumas}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2} + n\right] \qquad \text{Aplicar el Teorema 4.2}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\frac{n^2+3n}{2}\right]$$

$$= \frac{n+3}{2n} \qquad \text{Simplificar}$$

n	$\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2} = \frac{n+3}{2n}$
10	0,65000
100	0,51500
1.000	0,50150
10.000	0,50015

Ahora ya podemos evaluar la suma sustituyendo los valores de n deseados, como muestra la tabla del margen. □

En la tabla las sumas parecen tender a un límite cuando n crece. Aunque la discusión de los límites en el infinito de la Sección 3.5 era aplicable a una variable x, donde x puede tomar cualquier valor real, muchos de los resultados

mantienen su validez para límites que afectan a la variable n, restringida a tomar valores enteros positivos. Así, para el límite de $(n + 3)/2n$ cuando n tiende a infinito, se puede escribir

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+3}{2n} = \frac{1}{2}$$

Área

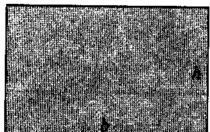




FIGURA 4.5
Rectángulo: $A = bh$.

En la geometría euclídea, la región plana más simple es el rectángulo. Aunque suele decirse que la *fórmula* para el área del rectángulo es $A = bh$ (Figura 4.5), es más apropiado decir que eso es la *definición* del **área del rectángulo**.

De esa definición se pueden deducir fórmulas para las áreas de otras regiones planas. Así, para determinar la de un triángulo, formamos un rectángulo de área doble (Figura 4.6). Y una vez que sabemos hallar la del triángulo, el área de los polígonos se calcula dividiéndolos en triángulos (Figura 4.7).

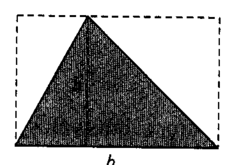
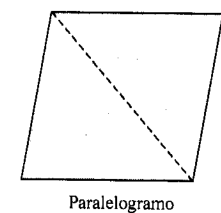
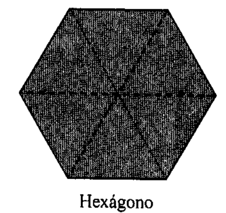


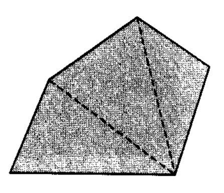
FIGURA 4.6
Triángulo: $A = \frac{1}{2}bh$.



Paralelogramo

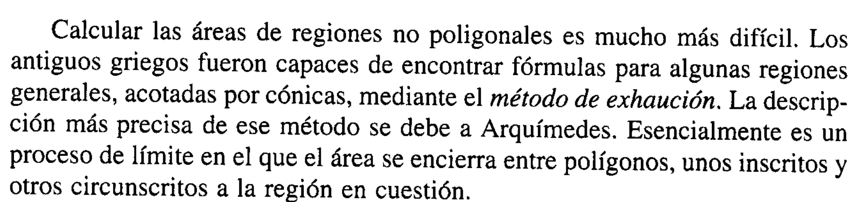


Hexágono



Polígono

FIGURA 4.7



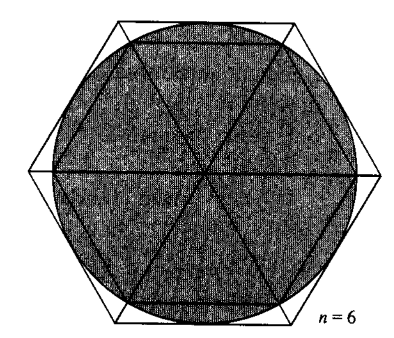
Calcular las áreas de regiones no poligonales es mucho más difícil. Los antiguos griegos fueron capaces de encontrar fórmulas para algunas regiones generales, acotadas por cónicas, mediante el *método de exhaución*. La descripción más precisa de ese método se debe a Arquímedes. Esencialmente es un proceso de límite en el que el área se encierra entre polígonos, unos inscritos y otros circunscritos a la región en cuestión.

Por ejemplo, en la Figura 4.8 el círculo se aproxima por polígonos inscrito y circunscrito de n lados. Para cada valor de n, el área del polígono inscrito es menor que la del círculo y la del circunscrito es mayor que la del círculo. Más aún, al crecer n las áreas de los polígonos se acercan más y más a la de la región circular.



ARQUÍMEDES (287-212 a.C.)

Arquímedes usaba el método de exhaución para las áreas de elipses, segmentos parabólicos y sectores de una espiral. Está considerado como el más grande de los matemáticos aplicados de la Antigüedad.



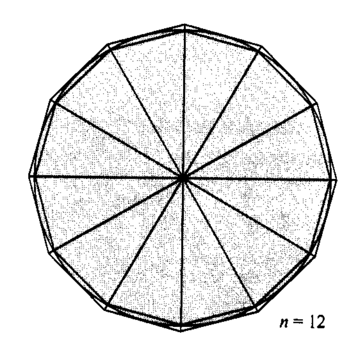


FIGURA 4.8
El método de exhaución para hallar el área del círculo.

En los restantes ejemplos de esta sección usaremos un proceso análogo al de Arquímedes para calcular el área de regiones planas.

PARA MÁS INFORMACIÓN
Un desarrollo alternativo de la fórmula para el área de un círculo puede verse en el artículo «Proof Without Words: Area of a Disk is πR^2», de Russell Jay Hendel, en *Mathematics Magazine*, junio 1990.

Área de una región plana

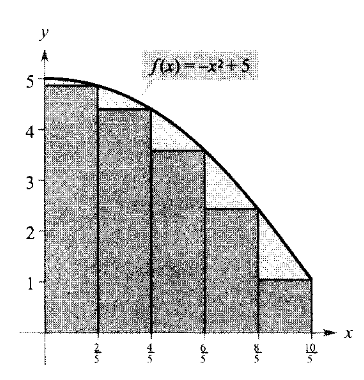
Comenzamos investigando el problema general del cálculo de áreas de regiones en el plano con un ejemplo concreto.

EJEMPLO 3 Aproximando el área de una región plana

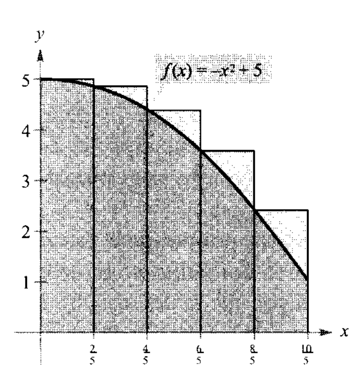
Usar los cinco rectángulos de la Figura 4.9*a* y *b* para hallar dos aproximaciones del área de la región acotada por la gráfica de

$$f(x) = -x^2 + 5$$

y el eje x, entre $x = 0$ y $x = 2$.



a) El área de la región parabólica es mayor que el área de los rectángulos



b) El área de la región parabólica es menor que el área de los rectángulos

FIGURA 4.9

Solución:

a) Los puntos terminales de la derecha en los cinco intervalos son $\frac{2}{5}i$, donde $i = 1, 2, 3, 4, 5$. La anchura de cada rectángulo es $\frac{2}{5}$, y la altura puede obtenerse evaluando f en el punto terminal derecho de cada intervalo.

$$\left[0, \frac{2}{5}\right], \left[\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right], \left[\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right], \left[\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right], \left[\frac{8}{5}, \frac{10}{5}\right]$$

Evaluar f en los puntos terminales de la derecha de estos intervalos

La suma de las áreas de los cinco rectángulos es

$$\sum_{i=1}^{5} \overbrace{f\left(\frac{2i}{5}\right)}^{\text{Altura}} \overbrace{\left(\frac{2}{5}\right)}^{\text{Anchura}} = \sum_{i=1}^{5} \left[-\left(\frac{2i}{5}\right)^2 + 5\right]\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{162}{25} = 6{,}48$$

Como cada rectángulo está dentro de la región parabólica, concluimos que el área de ésta es mayor que 6,48.

b) Los puntos terminales de la izquierda en los cinco intervalos son $\frac{2}{5}(i - 1)$, donde $i = 1, 2, 3, 4, 5$. La anchura de cada rectángulo es $\frac{2}{5}$ y la altura puede obtenerse evaluando f en el punto terminal izquierdo de cada intervalo.

$$\sum_{i=1}^{5} \overbrace{f\left(\frac{2i-2}{5}\right)}^{\text{Altura}} \overbrace{\left(\frac{2}{5}\right)}^{\text{Anchura}} = \sum_{i=1}^{5} \left[-\left(\frac{2i-2}{5}\right)^2 + 5\right]\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{202}{25} = 8{,}08$$

Como la región parabólica está contenida en la unión de los cinco rectángulos, concluimos que su área es menor que 8,08.

Combinando ambos resultados, deducimos que

$$6{,}48 < \text{Área de la región} < 8{,}08. \qquad \square$$

Nota. Tomando más rectángulos se van obteniendo aproximaciones cada vez más precisas del área de la región. Así, tomando 25 rectángulos, de anchura $\frac{2}{25}$ cada uno de ellos, se llega a la conclusión de que

$$7{,}17 < \text{Área de la región} < 7{,}49$$

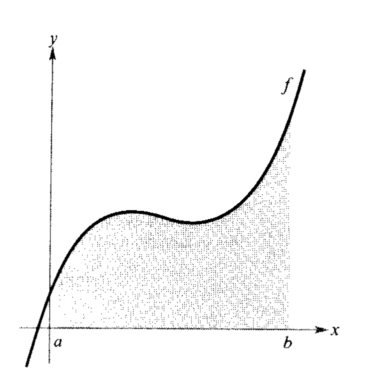


FIGURA 4.10
La región bajo una curva.

Sumas inferiores y superiores

El proceso utilizado en el Ejemplo 3 admite la siguiente generalización. Consideremos una región plana acotada superiormente por la gráfica de una función $y = f(x)$, continua, no negativa, como en la Figura 4.10. La región está limitada por abajo por el eje x y lateralmente por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

Para aproximar su área comenzamos dividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = (b - a)/n$, como indica la Figura 4.11. Sus puntos terminales son

$$\overbrace{a + 0(\Delta x)}^{a = x_0} < \overbrace{a + 1(\Delta x)}^{x_1} < \overbrace{a + 2(\Delta x)}^{x_2} < \cdots < \overbrace{a + n(\Delta x)}^{x_n = b}$$

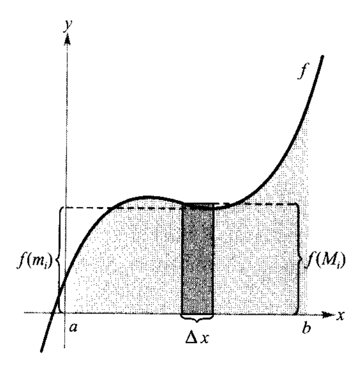


FIGURA 4.11
El intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos de longitud $\Delta x = \dfrac{(b-a)}{n}$.

Por ser f continua, el teorema de los valores extremos asegura la existencia de un mínimo y de un máximo de $f(x)$ en *cada* subintervalo.

$f(m_i)$ = valor mínimo de $f(x)$ en el i-ésimo subintervalo

$f(M_i)$ = valor máximo de $f(x)$ en el i-ésimo subintervalo

A continuación, definimos un **rectángulo inscrito** *dentro* de la i-ésima subregión, de altura $f(m_i)$, y un **rectángulo circunscrito** que se extiende *fuera* de esa i-ésima subregión, de altura $f(M_i)$. Para cada i, el área del rectángulo inscrito es menor o igual que el área del circunscrito.

$$\begin{pmatrix}\text{Área del rectángulo}\\ \text{inscrito}\end{pmatrix} = f(m_i)\,\Delta x \leqslant f(M_i)\,\Delta x = \begin{pmatrix}\text{Área del rectángulo}\\ \text{circunscrito}\end{pmatrix}$$

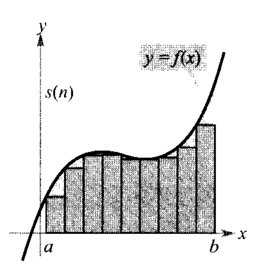
La suma de las áreas de los rectángulos inscritos se llama una **suma inferior**, y la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos se llama una **suma superior**.

$$\text{Suma inferior} = s(n) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x \qquad \text{Área de rectángulos inscritos}$$

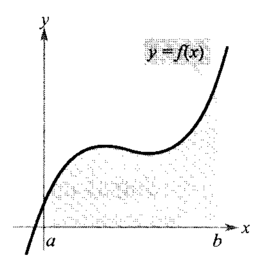
$$\text{Suma superior} = S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x \qquad \text{Área de rectángulos circunscritos}$$

Vemos en la Figura 4.12 que la suma inferior $s(n)$ es menor o igual que la suma superior $S(n)$. Además, el área de la región está comprendida entre esas dos sumas.

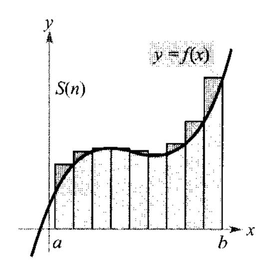
$$s(n) \leqslant (\text{Área de la región}) \leqslant S(n)$$



El área de los rectángulos inscritos es menor que el área de la región



Área de la región

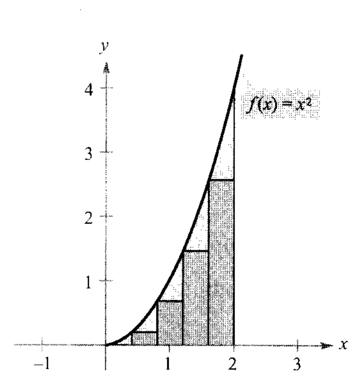


El área de los rectángulos circunscritos es mayor que el área de la región

FIGURA 4.12

EJEMPLO 4 Cálculo de las sumas inferiores y superiores

Calcular las sumas inferiores y superiores para la región limitada por la gráfica de $f(x) = x^2$ y el eje x, entre $x = 0$ y $x = 2$.



Rectángulos inscritos

Rectángulos circunscritos

FIGURA 4.13

Solución: En primer lugar, partimos [0, 2] en n subintervalos, cada uno de longitud

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - 0}{n} = \frac{2}{n}$$

La Figura 4.13 muestra sus puntos terminales y varios rectángulos inscritos y circunscritos. Como f es creciente en [0, 2], en cada subintervalo el valor mínimo de f ocurre en el punto terminal de la izquierda y el máximo en el de la derecha.

Puntos terminales izquierdos

$$m_i = 0 + (i - 1)\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2(i - 1)}{n}$$

Puntos terminales derechos

$$M_i = 0 + i\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2i}{n}$$

Usando los de la izquierda, obtenemos la suma inferior

$$\begin{aligned} s(n) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\, \Delta x &= \sum_{i=1}^{n} f\left[\frac{2(i - 1)}{n}\right]\left(\frac{2}{n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{2(i - 1)}{n}\right]^2 \left(\frac{2}{n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8}{n^3}\right)(i^2 - 2i + 1) \end{aligned}$$

$$= \frac{8}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right)$$

$$= \frac{8}{n^3}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + n\right\}$$

$$= \frac{4}{3n^3}(2n^3 - 3n^2 + n)$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

Y usando los de la derecha, la suma superior

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8}{n^3}\right) i^2$$

$$= \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \frac{4}{3n^3}(2n^3 + 3n^2 + n)$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

EXPLORACIÓN

Para la región del Ejemplo 4, evaluar la suma inferior

$$s(n) = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

y la suma superior

$$S(n) = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

para $n = 10$, 100 y 1.000. Usar los resultados obtenidos para hallar el área de la región.

El Ejemplo 4 ilustra algunos hechos importantes relativos a las sumas inferiores y superiores. En primer lugar, nótese que para cualquier valor de n la suma inferior es menor o igual que la superior.

$$s(n) = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} < \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} = S(n)$$

En segundo lugar, la diferencia entre ellas disminuye conforme n crece. De hecho, si tomamos el límite $n \to \infty$, tanto las sumas inferiores como las superiores tienden a $\frac{8}{3}$.

$$\lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3}$$ Límite de las sumas inferiores

$$\lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3}$$ Límite de las sumas superiores

El teorema siguiente muestra que la equivalencia de los límites (cuando $n \to \infty$) de las sumas inferiores y superiores no es mera coincidencia. Sucede así para toda función continua y no negativa en un intervalo cerrado $[a, b]$. La demostración queda para cursos más avanzados.

TEOREMA 4.3 **LÍMITE DE LAS SUMAS INFERIORES Y SUPERIORES**

Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. Los límites, cuando $n \to \infty$, de las sumas inferiores y de las superiores son idénticos. Es decir,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s(n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} S(n)\end{aligned}$$

con $\Delta x = (b - a)/n$ y donde $f(m_i), f(M_i)$ son los valores mínimo y máximo de f en el i-ésimo subintervalo.

Ya que se llega al mismo límite con el valor mínimo que con el valor máximo, el teorema del encaje (Teorema 1.8) permite concluir que la elección de x en el i-ésimo subintervalo no afecta al límite. Eso significa que tenemos libertad absoluta para elegir un valor arbitrario de x en cada subintervalo, lo cual se aprovecha en la próxima definición del *área de una región del plano.*

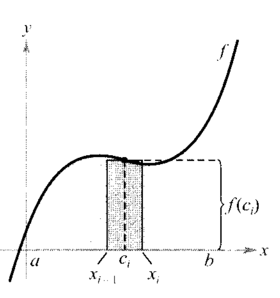


FIGURA 4.14
La longitud del i-ésimo subintervalo es $\Delta x = x_i - x_{i-1}$.

DEFINICIÓN DEL ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA

Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. El **área** de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x, \qquad x_{i-1} \leqslant c_i \leqslant x_i$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$ (véase Figura 4.14).

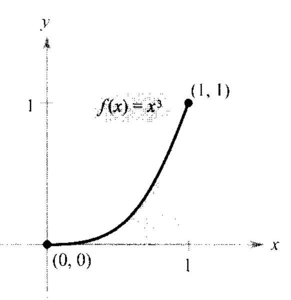


FIGURA 4.15
El área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x, $x = 0$ y $x = 1$ es $\frac{1}{4}$.

EJEMPLO 5 Cálculo del área usando la definición

Hallar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = x^3$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$ (véase Figura 4.15).

Solución: Antes de nada, observemos que f es continua y no negativa en $[0, 1]$. A continuación, partimos $[0, 1]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = 1/n$. De acuerdo con la definición de área, podemos elegir cualquier valor de x en el i-ésimo subintervalo. En este caso, conviene tomar los puntos terminales derechos ($c_i = i/n$).

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^3 \left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

Así pues, el área de la región es $\frac{1}{4}$. □

EJEMPLO 6 *Cálculo del área usando la definición*

Hallar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$, el eje x y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 2$ (véase Figura 4.16).

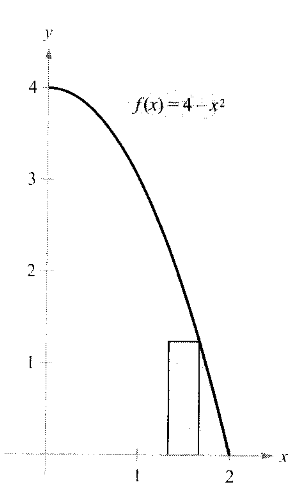
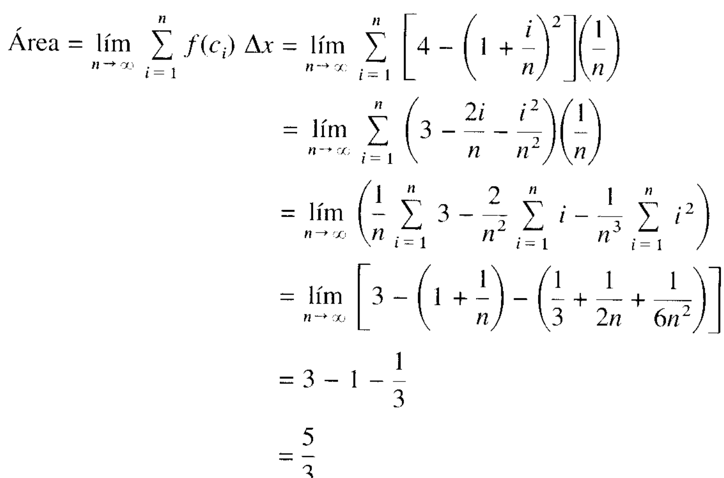


FIGURA 4.16
El área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x, $x = 1$ y $x = 2$ es $\frac{5}{3}$.

Solución: La función f es continua y no negativa en $[1, 2]$, luego procedemos ya a partir el intervalo en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = 1/n$. Escogiendo ahora los puntos terminales de la derecha, $c_i = 1 + (i/n)$ de cada subintervalo, obtenemos:



$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[4 - \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2\right]\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(3 - \frac{2i}{n} - \frac{i^2}{n^2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 3 - \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right)$$

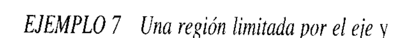
$$= \lim_{n\to\infty} \left[3 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\right]$$

$$= 3 - 1 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{5}{3}$$

Así pues, el área de la región es $\frac{5}{3}$. □

El último ejemplo considera una región limitada por el eje y, no por el eje x.



EJEMPLO 7 *Una región limitada por el eje y*

Calcular el área de la región limitada por la gráfica de $f(y) = y^2$ y por el eje y, para $0 \leqslant y \leqslant 1$, como muestra la Figura 4.17.

Solución: Cuando f es una función continua y no negativa de y, se puede utilizar todavía el mismo procedimiento de los Ejemplos 5 y 6. Empezamos partiendo el intervalo [0, 1] en n subintervalos de la misma longitud $\Delta y = 1/n$. Entonces, usando los puntos terminales de la derecha, $c_i = i/n$, obtenemos

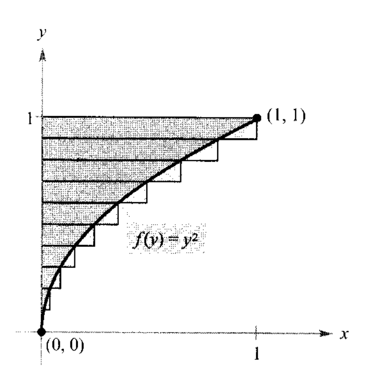


FIGURA 4.17
El área de la región limitada por la gráfica de $f(y) = y^2$ y por el eje y, entre $y = 0$ e $y = 1$ es $\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}
\text{Área} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta y &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3\left(\frac{1}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)\\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

En consecuencia, el área de la región es $\frac{1}{3}$.

Ejercicios de la Sección 4.2

En los Ejercicios 1-6, hallar la suma. Comprobar el resultado con la calculadora.

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}(2i+1)$
2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{5}(k+1)(k-3)$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{k^2+1}$
4. $\displaystyle\sum_{j=3}^{5}\frac{1}{j}$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}c$
6. $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}[(i-1)^2+(i+1)^3]$

En los Ejercicios 7-14, usar notación sigma para expresar la suma.

7. $\dfrac{1}{3(1)}+\dfrac{1}{3(2)}+\dfrac{1}{3(3)}+\cdots+\dfrac{1}{3(9)}$
8. $\dfrac{5}{1+1}+\dfrac{5}{1+2}+\dfrac{5}{1+3}+\cdots+\dfrac{5}{1+15}$
9. $\left[2\left(\frac{1}{8}\right)+3\right]+\left[2\left(\frac{2}{8}\right)+3\right]+\cdots+\left[2\left(\frac{8}{8}\right)+3\right]$
10. $\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]+\left[1-\left(\frac{2}{4}\right)^2\right]+\cdots+\left[1-\left(\frac{4}{4}\right)^2\right]$
11. $\left[\left(\frac{2}{n}\right)^3-\frac{2}{n}\right]\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\left[\left(\frac{2n}{n}\right)^3-\frac{2n}{n}\right]\left(\frac{2}{n}\right)$
12. $\left[1-\left(\frac{2}{n}-1\right)^2\right]\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\left[1-\left(\frac{2n}{n}-1\right)^2\right]\left(\frac{2}{n}\right)$
13. $\left[2\left(1+\frac{3}{n}\right)^2\right]\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+\left[2\left(1+\frac{3n}{n}\right)^2\right]\left(\frac{3}{n}\right)$
14. $\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1+\left(\frac{0}{n}\right)^2}+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$

En los Ejercicios 15-20, usar las propiedades de la notación sigma y fórmulas de suma para calcular el valor de la suma. Comprobar el resultado con la calculadora.

15. $\displaystyle\sum_{i=1}^{20}2i$
16. $\displaystyle\sum_{i=1}^{15}(2i-3)$
17. $\displaystyle\sum_{i=1}^{20}(i-1)^2$
18. $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}(i^2-1)$
19. $\displaystyle\sum_{i=1}^{15}i(i-1)^2$
20. $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}i(i^2+1)$

En los Ejercicios 21 y 22, hallar la suma con la calculadora y usar entonces las propiedades de la notación sigma para verificar el resultado.

21. $\displaystyle\sum_{i=1}^{20}(i^2+3)$
22. $\displaystyle\sum_{i=1}^{15}(i^3-2i)$

En los Ejercicios 23-28, calcular el límite de $s(n)$ cuando $n \to \infty$.

23. $s(n) = \left(\frac{4}{3n^3}\right)(2n^3 + 3n^2 + n)$

24. $s(n) = \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right)$

25. $s(n) = \frac{81}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$

26. $s(n) = \frac{64}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

27. $s(n) = \frac{18}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$

28. $s(n) = \frac{1}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$

En los Ejercicios 29-34, hallar una fórmula para la suma de n términos. Con esa fórmula, calcular el límite cuando $n \to \infty$.

29. $\lim\limits_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{16i}{n^2}$

30. $\lim\limits_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)$

31. $\lim\limits_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3}(i-1)^2$

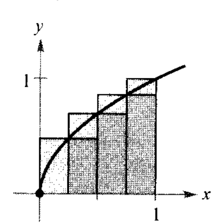
32. $\lim\limits_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)$

33. $\lim\limits_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)$

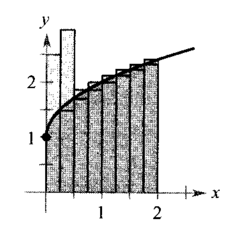
34. $\lim\limits_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3\left(\frac{2}{n}\right)$

En los Ejercicios 35-38, usar sumas inferiores y superiores para estimar el área de la región tomando el número de subintervalos indicado (todos de igual longitud).

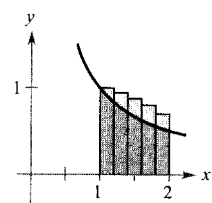
35. $y = \sqrt{x}$



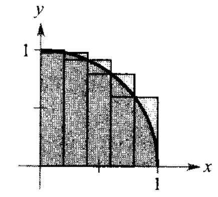
36. $y = \sqrt{x} + 1$



37. $y = \frac{1}{x}$



38. $y = \sqrt{1 - x^2}$



39. ***Razonamiento numérico*** Consideremos un triángulo de área 2, limitado por las gráficas de $y = x$, $y = 0$ y $x = 2$.

a) Esbozar esa región triangular.

b) Dividir el intervalo [0, 2] en n subintervalos iguales y probar que sus puntos terminales son

$$0 < 1\left(\frac{2}{n}\right) < \cdots < (n-1)\left(\frac{2}{n}\right) < n\left(\frac{2}{n}\right)$$

c) Probar que $s(n) = \sum_{i=1}^{n}\left[(i-1)\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$

d) Probar que $S(n) = \sum_{i=1}^{n}\left[i\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$

e) Completar la tabla

n	5	10	50	100
$s(n)$				
$S(n)$				

f) Demostrar que $\lim\limits_{n \to \infty} s(n) = \lim\limits_{n \to \infty} S(n) = 2$.

40. ***Razonamiento numérico*** Consideremos un trapecio de área 4, limitado por las gráficas de $y = x$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = 3$.

a) Esbozar su gráfica.

b) Dividir [1, 3] en n subintervalos de igual longitud y probar que sus puntos terminales son

$$1 < 1 + 1\left(\frac{2}{n}\right) < \cdots < 1 + (n-1)\left(\frac{2}{n}\right) < 1 + n\left(\frac{2}{n}\right)$$

c) Probar que $s(n) = \sum_{i=1}^{n}\left[1 + (i-1)\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$

d) Probar que $S(n) = \sum_{i=1}^{n}\left[1 + i\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$

e) Completar la tabla

n	5	10	50	100
$s(n)$				
$S(n)$				

f) Demostrar que $\lim\limits_{n \to \infty} s(n) = \lim\limits_{n \to \infty} S(n) = 4$

En los Ejercicios 41-48, usar límites para hallar el área de la región acotada por la gráfica de la función y el eje x en el intervalo que se indica. Dibujar la región.

	Función	*Intervalo*
41.	$y = -2x + 3$	$[0, 1]$
42.	$y = 3x - 4$	$[2, 5]$
43.	$y = x^2 + 2$	$[0, 1]$
44.	$y = 1 - x^2$	$[-1, 1]$
45.	$y = 27 - x^3$	$[1, 3]$
46.	$y = 2x - x^3$	$[0, 1]$
47.	$y = x^2 - x^3$	$[-1, 1]$
48.	$y = x^2 - x^3$	$[-1, 0]$

En los Ejercicios 49 y 50, usar límites para hallar el área de la región acotada por la gráfica de la función y el eje y en el y-intervalo que se indica. Dibujar la región.

49. $f(y) = 3y, 0 \leqslant y \leqslant 2$ **50.** $f(y) = y^2, 0 \leqslant y \leqslant 3$

En los Ejercicios 51-54, usar la *regla del punto medio*

$$\text{Área} \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \Delta x$$

con $n = 4$ para aproximar el área de la región limitada por la gráfica de la función y el eje x en el intervalo indicado.

	Función	*Intervalo*
51.	$f(x) = x^2 + 3$	$[0, 2]$
52.	$f(x) = x^2 + 4x$	$[0, 4]$
53.	$f(x) = \operatorname{tg} x$	$\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
54.	$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Escribir un programa que permita aplicar la regla del punto medio para calcular áreas, supuesta f positiva y subintervalos de igual longitud. En los Ejercicios 55-58, usar ese programa para aproximar el área entre la función y el eje x sobre el intervalo indicado, y completar la tabla.

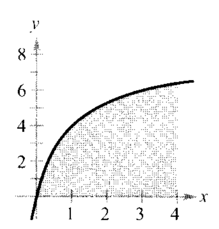
n	4	8	12	16	20
Área aproximada					

	Función	*Intervalo*
55.	$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, 4]$
56.	$f(x) = \dfrac{8}{x^2 + 1}$	$[2, 6]$
57.	$f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{8}\right)$	$[1, 3]$
58.	$f(x) = \cos \sqrt{x}$	$[0, 2]$

59. ***Razonamiento gráfico*** Consideremos la región limitada por las gráficas de

$$f(x) = \frac{8x}{x + 1}$$

$x = 0$, $x = 4$ e $y = 0$ (véase figura).



a) Rehacer y completar la figura indicando y sombreando los rectángulos inferiores para $n = 4$. Hallar esa suma inferior.

b) Rehacer y completar la figura indicando y sombreando los rectángulos superiores para $n = 4$. Hallar esa suma superior.

c) Rehacer y completar la figura sombreando los rectángulos cuyas alturas vienen dadas por los valores de la función en el punto medio de cada subintervalo, para $n = 4$. Calcular esa suma aplicando la regla del punto medio.

d) Verificar las siguientes fórmulas para aproximar el área de la región usando n subintervalos de igual longitud.

Suma inferior: $s(n) = \sum_{i=1}^{n} f\left[(i - 1)\frac{4}{n}\right]\left(\frac{4}{n}\right)$

Suma superior: $S(n) = \sum_{i=1}^{n} f\left[(i)\frac{4}{n}\right]\left(\frac{4}{n}\right)$

Regla del punto medio: $M(n) = \sum_{i=1}^{n} f\left[\left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{4}{n}\right]\left(\frac{4}{n}\right)$

e) Con ayuda de las fórmulas anteriores y de una calculadora, completar la tabla.

n	4	8	20	100	200
s(n)					
S(n)					
M(n)					

f) Explicar por qué, como mostrará la tabla, $s(n)$ crece y $S(n)$ decrece.

60. Completar, con la calculadora, la tabla de la página siguiente para aproximar el área de la región acotada por las gráficas de $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 0$, $x = 8$ e $y = 0$.

n	4	8	20	100	200
$s(n)$					
$S(n)$					
$M(n)$					

Aproximación En los Ejercicios 61 y 62, determinar qué valor aproxima mejor el área acotada por la gráfica y el eje x en el intervalo indicado. (Tomar la decisión teniendo en cuenta un esbozo de la región, no efectuando cálculos.)

61. $f(x) = 4 - x^2$, $[0, 2]$

a) -2 *b)* 6 *c)* 10 *d)* 3 *e)* 8

62. $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{4}$, $[0, 4]$

a) 3 *b)* 1 *c)* -2 *d)* 8 *e)* 6

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 63 y 64, decidir si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que lo ponga de manifiesto.

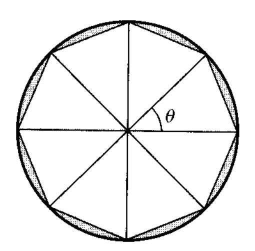
63. La suma de los primeros n enteros positivos es $n(n + 1)/2$.

64. Si f es continua y no negativa en $[a, b]$, los límites cuando $n \to \infty$ de sus sumas inferiores $s(n)$ y superiores $S(n)$ existen y son iguales.

65. ***Método de Montecarlo*** El programa adjunto aproxima el área de la región limitada por una gráfica monótona y por el eje x, entre $x = a$ y $x = b$. Correr el programa con $a = 0$ y $b = \pi/2$ para varios valores de N2. Explicar por qué el método de Montecarlo funciona correctamente. *(Adaptación del programa de James M. Sonyers, «Approximation of Area Under a Curve», MATHEMATICS TEACHER 77, núm. 2 (febrero 1984). Copyright © 1984 del National Council of Teachers of Mathematics. Copiado con permiso.)*

```
10 DEF FNF (X)=SIN(X)
20 A=0
30 B=1.570796
40 PRINT "Input Number of Random Points"
50 INPUT N2
60 N1 = 0
70 IF FNF(A)>FNF(B) THEN YMAX=FNF(A) ELSE
   YMAX=FNF(B)
80 FOR I=1 TO N2
90 X=A+(B-A)*RND(1)
100 Y=YMAX*RND(1)
110 IF Y>=FNF(X) THEN GOTO 130
120 N1=N1+1
130 NEXT I
140 AREA=(N1/N2)*(B-A)*YMAX
150 PRINT "Approximate Area:"; AREA
160 END
```

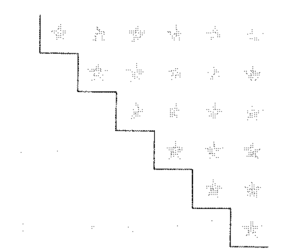
66. ***Razonamiento gráfico*** Consideremos un polígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio r. Unimos sus vértices al centro del círculo, formando n triángulos congruentes (véase figura).



a) Expresar el ángulo central θ en términos de n.
b) Probar que el área de cada triángulo es $\frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} \theta$.
c) Sea A_n la suma de las áreas de los n triángulos. Calcular $\lim_{n \to \infty} A_n$.

67. ***Redacción*** Usar la figura para escribir un párrafo explicando por qué es válida para todo n entero positivo la fórmula

$$1 + 2 + \cdots + n = \tfrac{1}{2} n(n + 1)$$



68. Verificar la fórmula

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

demostrando lo siguiente:

a) $(1 + i)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$

b) $-1 + (n + 1)^3 = \sum_{i=1}^{n} (3i^2 + 3i + 1)$

c) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$

69. ***Un modelo matemático*** La tabla recoge las medidas de un terreno acotado por un río y dos carreteras rectas que se cortan en ángulo recto (véase figura).

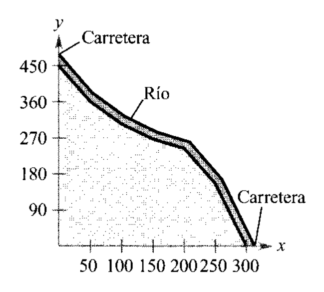
x	0	50	100	150	200	250	300
y	450	362	305	268	245	156	0

a) Usando regresión en la calculadora, ajustar a esos datos un modelo de la forma

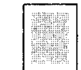
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

b) Representar en ella los datos y el modelo.

c) Usar el modelo para estimar el área del terreno.



CONTENIDO ▪
Sumas de Riemann ▪
Integrales definidas ▪
Propiedades de las integrales definidas ▪



4.3 Sumas de Riemann e integrales definidas

Sumas de Riemann

En la definición de área de la Sección 4.2, las particiones se hacían en subintervalos de *igual longitud.* Pero era sólo por facilitar los cálculos. El ejemplo que abre esta sección muestra que no es necesario tomar subintervalos de la misma longitud.

EJEMPLO 1 Una partición con subintervalos de longitudes diversas

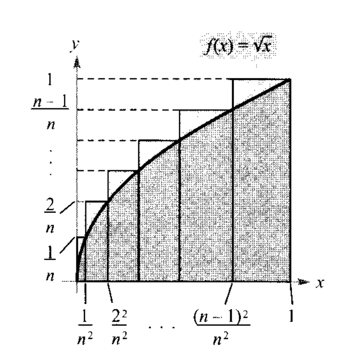


FIGURA 4.18
Los subintervalos no tienen todos la misma longitud.

La Figura 4.18 muestra la región acotada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ y el eje x en $0 \leqslant x \leqslant 1$. Evaluar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

donde c_i es el punto terminal derecho de la partición dada por $x_i = i^2/n^2$ y Δx_i es la anchura del i-ésimo subintervalo.

Solución: La longitud del i-ésimo subintervalo es

$$\begin{aligned}
\Delta x_i &= \frac{i^2}{n^2} - \frac{(i-1)^2}{n^2} \\
&= \frac{i^2 - i^2 + 2i - 1}{n^2} \\
&= \frac{2i - 1}{n^2}
\end{aligned}$$

Por tanto, el límite es

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i^2}{n^2}}\left(\frac{2i-1}{n^2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (2i^2 - i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left[2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) - \frac{n(n+1)}{2}\right]
\end{aligned}$$

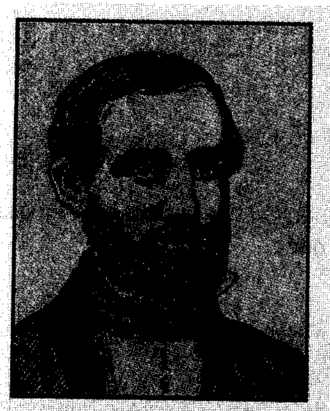
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6n^3}$$

$$= \frac{2}{3}$$ □

FIGURA 4.19
El área de la región limitada por la gráfica de $x = y^2$ y el eje y, para $0 \leqslant y \leqslant 1$ es $\frac{1}{3}$.

Por el Ejemplo 7 de la Sección 4.2 sabemos que la región de la Figura 4.19 tiene área $\frac{1}{3}$. Como el cuadro acotado por $0 \leqslant x \leqslant 1$ y $0 \leqslant y \leqslant 1$ tiene área 1, concluimos que el área de la región de la Figura 4.18 es $\frac{2}{3}$. Esto coincide con el límite calculado en el Ejemplo 1, aunque en ese ejemplo se ha utilizado una partición con subintervalos de longitudes diversas. La razón de que esta partición particular proporcione el área correcta es que al crecer n, *la longitud del subintervalo más grande tiende a cero*. Éste es un hecho clave en el desarrollo de las integrales definidas.

En la sección precedente se usó el límite de una suma para definir el área de una región plana. Ésta es sólo una de las múltiples aplicaciones de los límites de sumas. Un procedimiento similar se puede utilizar para calcular magnitudes tan distintas como longitudes de arco, valores medios, centroides, volúmenes, trabajos y áreas superficiales. El desarrollo que vamos a presentar lleva el nombre de Georg Friedrich Bernhard Riemann. Si bien la integración definida se usó mucho antes de Riemann, éste generalizó el concepto y lo hizo aplicable a clases muy amplias de funciones.



GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866)

El matemático alemán Riemann efectuó sus principales contribuciones en Geometría no euclídea, ecuaciones diferenciales y teoría de números. Sus resultados en Física y Matemáticas constituyeron la base estructural de la teoría de la relatividad general de Einstein.

En la definición que sigue debe hacerse notar que la única restricción sobre f es que esté definida en el intervalo $[a, b]$. (En la sección anterior se suponía que f era continua y no negativa, porque tratábamos el área bajo una curva.)

DEFINICIÓN DE LAS SUMAS DE RIEMANN

Sea f definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea Δ una partición de $[a, b]$ dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

donde Δx_i es la longitud del i-ésimo subintervalo. Si c_i es *cualquier* punto del i-ésimo subintervalo, la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i, \qquad x_{i-1} \leqslant c_i \leqslant x_i$$

es la **suma de Riemann** de f asociada a la partición Δ.

Nota. Las sumas de la Sección 4.2 constituyen ejemplos de sumas de Riemann, pero hay sumas de Riemann más generales que esas.

La longitud del subintervalo más grande de una partición Δ se llama **norma** de la partición y se denota por $\|\Delta\|$. Si todos los subintervalos son de la misma longitud, se dice que la partición es **regular** y la norma se denota por

$$\|\Delta\| = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$ Partición regular

Para una partición general, la norma está relacionada con el número de subintervalos de $[a, b]$ de esta manera:

$$\frac{b-a}{\|\Delta\|} \leqslant n \qquad \text{Partición general}$$

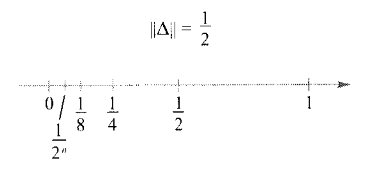


FIGURA 4.20
$n \to \infty$ no implica que $\|\Delta\| \to 0$.

Así pues, el número de subintervalos en una partición tiende a infinito si la norma de la partición tiende a cero. Esto es, $\|\Delta\| \to 0$ implica que $n \to \infty$.

El recíproco no es cierto. Por ejemplo, sea Δ_n la partición del intervalo $[0, 1]$ dada por

$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}} < \cdots < \frac{1}{8} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1$$

Como indica la Figura 4.20, para cualquier valor positivo de n la norma de la partición Δ_n es $\frac{1}{2}$. Por tanto, hacer tender n a infinito no obliga a que $\|\Delta\|$ tienda a cero. En una partición regular, sin embargo, las afirmaciones $\|\Delta\| \to 0$ y $n \to \infty$ son equivalentes.



Integrales definidas

Para definir la integral definida, consideremos el siguiente límite.

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i = L$$

Decir que este límite existe significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier partición con $\|\Delta\| < \delta$ se sigue que

$$\left| L - \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i \right| < \varepsilon$$

(Esto ha de ser cierto para cualquier elección de c_i en el i-ésimo subintervalo de Δ.)

DEFINICIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA

Si f está definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ y existe el límite

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i$$

entonces f es **integrable** en $[a, b]$ y el límite se denota

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx$$

Ese límite se llama la **integral definida** de f entre a y b. El número a se llama **límite inferior** de integración y el b **límite superior** de integración.

PARA MÁS INFORMACIÓN
Para una visión más completa de la historia de la integral definida, véase el artículo «The Evolution of Integration» de A. Shenitzer y J. Sreprāns en *The American Mathematical Monthly*, enero de 1994.

No es coincidencia que la notación para la integral definida sea similar a la de la integral indefinida. Veremos el porqué en la próxima sección, cuando estudiemos el teorema fundamental del Cálculo. Por el momento, baste decir que las integrales definidas e indefinidas son entes distintos. Una integral definida es un *número*, mientras que una integral indefinida es una *familia de funciones*.

La continuidad es condición suficiente para que una función sea integrable en $[a, b]$, si bien la demostración de este resultado escapa al nivel de este libro.

TEOREMA 4.4 CONTINUIDAD IMPLICA INTEGRABILIDAD

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

EXPLORACIÓN

El recíproco del Teorema 4.4 ¿Es cierto el recíproco del Teorema 4.4? O sea, si una función es integrable, ¿tiene que ser necesariamente continua? Explicar la respuesta e ilustrarla con ejemplos.

Describir la relación entre continuidad, derivabilidad e integrabilidad. ¿Cuál es la condición más fuerte? ¿Y la más débil? ¿Cuál de ellas implica otras?

EJEMPLO 2 Cálculo de una integral definida como límite

Calcular la integral definida $\displaystyle\int_{-2}^{1} 2x\,dx$

Solución: La función $f(x) = 2x$ es integrable en el intervalo $[-2, 1]$, por ser continua. Además, la definición de integrabilidad afirma que podemos utilizar cualquier partición con norma tendiendo a cero para calcular el límite. Por conveniencia, definimos Δ dividiendo $[-2, 1]$ en n subintervalos de igual longitud

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$$

Eligiendo como c_i el punto terminal derecho de cada subintervalo, se tiene

$$c_1 = a + i(\Delta x) = -2 + \frac{3i}{n}$$

Por tanto, la integral definida viene dada por

$f(x) = 2x$

FIGURA 4.21
Como la integral es negativa, no representa el área de la región.

$$\int_{-2}^{1} 2x\,dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\left(-2 + \frac{3i}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(-2 + \frac{3i}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n} \left\{-2n + \frac{3}{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(-12 + 9 + \frac{9}{n}\right)$$

$$= -3$$

□

Como la integral definida del Ejemplo 2 es negativa, *no* representa el área de la región de la Figura 4.21. Una integral definida puede ser positiva, negativa o cero. Para que pueda ser interpretada como un área (tal como se ha definido en la Sección 4.2), la función f debe ser continua y no negativa en $[a, b]$, como establece el próximo teorema. (La demostración es directa; basta usar la definición de área de la Sección 4.2.)

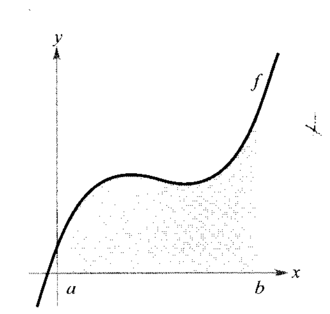


FIGURA 4.22
Se puede usar una integral definida para hallar el área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x y las rectas $x = a$, $x = b$.

TEOREMA 4.5 LA INTEGRAL DEFINIDA COMO ÁREA DE UNA REGIÓN

Si f es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$, el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ viene dada por

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx$$

(Véase Figura 4.22.)

Como ejemplo del Teorema 4.5, consideremos la región acotada por la gráfica de

$$f(x) = 4x - x^2$$

y el eje x (Figura 4.23). Al ser f continua y no negativa en $[0, 4]$, el área de la región es

$$\text{Área} = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx$$

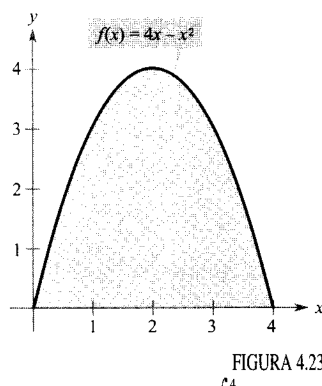


FIGURA 4.23
$\text{Área} = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx.$

Una técnica directa para evaluar una integral definida como ésta se discute en la Sección 4.4. Por ahora, no obstante, se puede hacer de dos maneras, usando la definición como límite o bien viendo si la integral definida representa el área de una región simple, como un rectángulo, triángulo o semicírculo.

EJEMPLO 3 Áreas de figuras sencillas

Esbozar la gráfica asociada a cada integral definida y, a continuación, evaluar cada integral mediante alguna fórmula geométrica.

a) $\int_1^3 4\,dx$ *b)* $\int_0^3 (x+2)\,dx$ *c)* $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

Solución: La Figura 4.24 muestra las gráficas solicitadas.

a) Esta región es un rectángulo de altura 4 y base 2.

$$\int_1^3 4\,dx = (\text{Área del rectángulo}) = 4(2) = 8$$

b) Esta región es un trapecio de altura 3 y bases de longitudes 2 y 5. La fórmula para el área de un trapecio es $\frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$.

$$\int_0^3 (x+2)\,dx = (\text{Área del trapecio}) = \frac{1}{2}(3)(2+5) = \frac{21}{2}$$

c) Esta región es un semicírculo de radio 2, de modo que su área es $\frac{1}{2}\pi r^2$.

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = (\text{Área del semicírculo}) = \frac{1}{2}\pi(2^2) = 2\pi$$

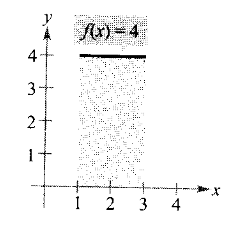
Nota. La variable de integración en una integral definida se dice que es una *variable muda* porque se puede reemplazar por cualquier otra sin que ello afecte al valor de la integral. Así, las integrales definidas

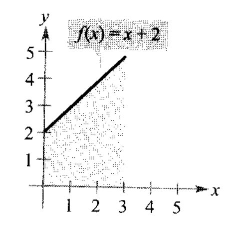
$$\int_0^3 (x+2)\,dx$$

y

$$\int_0^3 (t+2)\,dt$$

tienen el mismo valor.





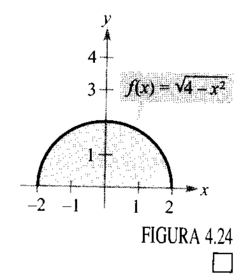


FIGURA 4.24

□

Propiedades de las integrales definidas

La definición de la integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ especifica que $a < b$. Ahora, no obstante, es conveniente extender la definición a situaciones con $a = b$ o con $a > b$. Geométricamente, las dos definiciones especiales que siguen parecen razonables. Por ejemplo, tiene sentido definir como cero el área de una región de altura finita y de anchura cero.

DEFINICIÓN DE INTEGRALES DEFINIDAS ESPECIALES

1. Si f está definida en $x = a$, entonces $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

2. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

EJEMPLO 4 Cálculo de integrales definidas

Calcular las integrales definidas siguientes.

a) $\int_{\pi}^{\pi} \text{sen } x\, dx$ *b*) $\int_{3}^{0} (x + 2)\, dx$

Solución:

a) Como la función seno está definida en $x = \pi$ y además los límites inferior y superior de integración coinciden, se tiene

$$\int_{\pi}^{\pi} \text{sen } x\, dx = 0$$

b) Es la misma integral del EjemCplo 3*b*, excepto que los límites inferior y superior están intercambiados. Como la del Ejemplo 3*b* resultó ser $\frac{21}{2}$, concluimos que

$$\int_{3}^{0} (x + 2)\, dx = -\int_{0}^{3} (x + 2)\, dx = -\frac{21}{2}$$ □

TEOREMA 4.6 PROPIEDAD ADITIVA DE INTERVALOS

Si f es integrable en los tres intervalos cerrados delimitados por a, b y c, entonces

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{a}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{b} f(x)\, dx$$

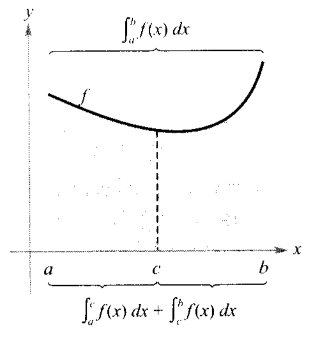


FIGURA 4.25
La región total puede dividirse en $x = c$ en dos subregiones cuya intersección es un segmento de recta vertical. Como este segmento tiene área cero, el área de la región total es igual a la suma de las áreas de las dos subregiones.

Este teorema es válido para cualquier función integrable y para cualesquiera números a, b y c. En lugar de dar una demostración formal del caso general, sin embargo, parece más instructivo presentar un argumento geométrico para el caso en el que $a < c < b$ y f es continua y no negativa, como indica la Figura 4.25.

Por estar definida como límite de una suma, la integral definida hereda las propiedades de la suma expuestas en la página 292.

TEOREMA 4.7 PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

Si f y g son integrables en $[a, b]$ y k es una constante, las funciones kf y $f \pm g$ son integrables en $[a, b]$. Además,

1. $\int_{a}^{b} kf(x)\, dx = k\int_{a}^{b} f(x)\, dx$
2. $\int_{a}^{b} [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_{a}^{b} f(x)\, dx \pm \int_{a}^{b} g(x)\, dx.$

Nota. La Propiedad 2 puede extenderse a cualquier número finito de funciones. Así,

$$\int_a^b [f(x) + g(x) + h(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx + \int_a^b h(x)\, dx$$

EJEMPLO 5 Cálculo de una integral definida

Calcular $\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\, dx$ sabiendo que

$$\int_1^3 x^2\, dx = \frac{26}{3}, \qquad \int_1^3 x\, dx = 4, \qquad \int_1^3 dx = 2$$

Solución:

$$\begin{aligned}\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\, dx &= \int_1^3 (-x^2)\, dx + \int_1^3 4x\, dx + \int_1^3 (-3)\, dx \\ &= -\int_1^3 x^2\, dx + 4\int_1^3 x\, dx - 3\int_1^3 dx \\ &= -\left(\frac{26}{3}\right) + 4(4) - 3(2) \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

□

Si f y g son continuas en $[a, b]$ y

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

en $a \leqslant x \leqslant b$, las siguientes propiedades son ciertas. El área de la región acotada por la gráfica de f y el eje x (entre a y b) debe ser no negativa. Ese área debe ser menor o igual que el área de la región acotada por la gráfica de g y el eje x (entre a y b), como muestra la Figura 4.26. Estos dos resultados se generalizan en el próximo teorema, que se demuestra en el apéndice.

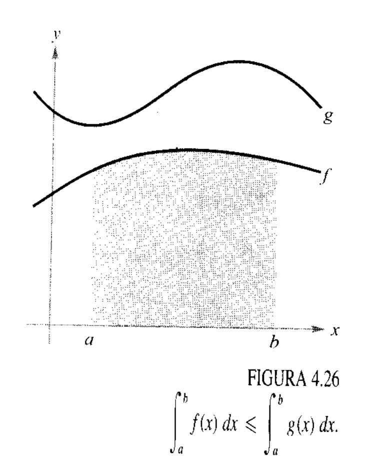


FIGURA 4.26

$\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b g(x)\, dx.$

TEOREMA 4.8 CONSERVACIÓN DE LAS DESIGUALDADES

1. Si f es integrable y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$0 \leqslant \int_a^b f(x)\, dx$$

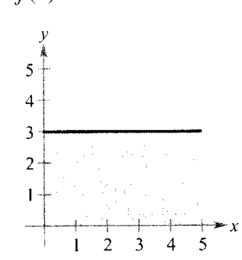
2. Si f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a, b]$ y además $f(x) \leqslant g(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b g(x)\, dx$$

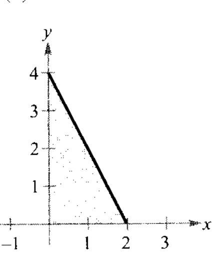
Ejercicios de la Sección 4.3

En los Ejercicios 1-10, formular una integral definida que represente el área de la región que se indica. (No evaluar las integrales.)

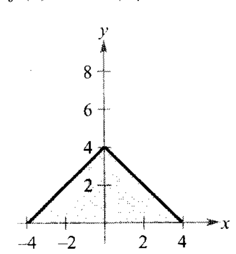
1. $f(x) = 3$



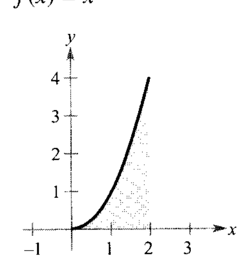
2. $f(x) = 4 - 2x$



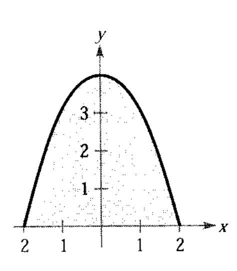
3. $f(x) = 4 - |x|$



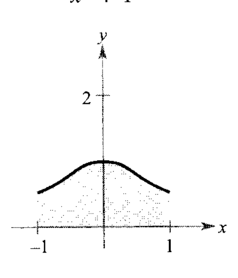
4. $f(x) = x^2$



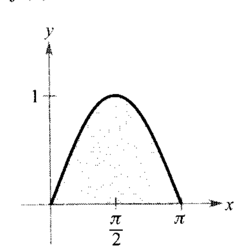
5. $f(x) = 4 - x^2$



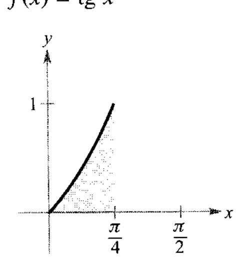
6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$



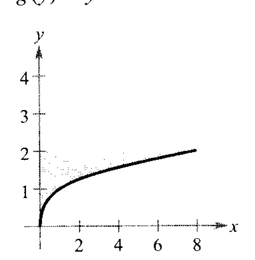
7. $f(x) = \operatorname{sen} x$



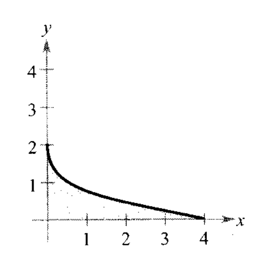
8. $f(x) = \operatorname{tg} x$



9. $g(y) = y^3$



10. $f(y) = (y - 2)^2$



En los Ejercicios 11-20, dibujar la región cuya área representa la integral definida. Usar entonces una fórmula geométrica para calcular la integral ($a > 0$, $r > 0$).

11. $\displaystyle\int_0^3 4\, dx$

12. $\displaystyle\int_{-a}^{a} 4\, dx$

13. $\displaystyle\int_0^4 x\, dx$

14. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{2}\, dx$

15. $\displaystyle\int_0^2 (2x + 5)\, dx$

16. $\displaystyle\int_0^5 (5 - x)\, dx$

17. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - |x|)\, dx$

18. $\displaystyle\int_{-a}^{a} (a - |x|)\, dx$

19. $\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx$

20. $\displaystyle\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$

21. Sabiendo que $\int_0^5 f(x)\, dx = 10$ y $\int_5^7 f(x)\, dx = 3$, calcular

a) $\displaystyle\int_0^7 f(x)\, dx$ *b)* $\displaystyle\int_5^0 f(x)\, dx$

c) $\displaystyle\int_5^5 f(x)\, dx$ *d)* $\displaystyle\int_0^5 3f(x)\, dx$

22. Sabiendo que $\int_0^3 f(x)\, dx = 4$ y $\int_3^6 f(x)\, dx = -1$, calcular

a) $\displaystyle\int_0^6 f(x)\, dx$ *b)* $\displaystyle\int_6^3 f(x)\, dx$

c) $\displaystyle\int_3^3 f(x)\, dx$ *d)* $\displaystyle\int_3^6 -5f(x)\, dx$

23. Sabiendo que $\int_2^6 f(x)\, dx = 10$ y $\int_2^6 g(x)\, dx = -2$, calcular

a) $\displaystyle\int_2^6 [f(x) + g(x)]\, dx$ *b)* $\displaystyle\int_2^6 [g(x) - f(x)]\, dx$

c) $\displaystyle\int_2^6 2g(x)\, dx$ *d)* $\displaystyle\int_2^6 3f(x)\, dx$

24. Sabiendo que $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ y $\int_0^1 f(x)\,dx = 5$, calcular

a) $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ *b)* $\int_0^1 f(x)\,dx - \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

c) $\int_{-1}^{1} 3f(x)\,dx$ *d)* $\int_0^1 3f(x)\,dx$

En los Ejercicios 25-30, calcular la integral definida mediante su definición como límite.

25. $\int_4^{10} 6\,dx$ **26.** $\int_{-2}^{3} x\,dx$

27. $\int_{-1}^{1} x^3\,dx$ **28.** $\int_0^1 x^3\,dx$

29. $\int_1^2 (x^2+1)\,dx$ **30.** $\int_1^2 4x^2\,dx$

En los Ejercicios 31-34, expresar el límite como una integral definida en el intervalo $[a, b]$, siendo c_i cualquier punto del i-ésimo subintervalo.

	Límite	*Intervalo*
31.	$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (3c_i + 10)\,\Delta x_i$	$[-1, 5]$
32.	$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 6c_i(4 - c_i)^2\,\Delta x_i$	$[0, 4]$
33.	$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{c_i^2 + 4}\,\Delta x_i$	$[0, 3]$
34.	$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{c_i^2}\right)\Delta x_i$	$[1, 3]$

Escribir un programa para aproximar una integral definida mediante la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

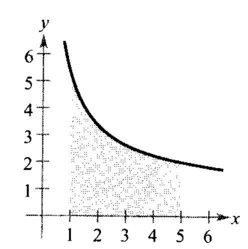
donde los subintervalos son de igual longitud. La salida de la calculadora debiera ser tres aproximaciones de la integral donde c_i sea el punto terminal izquierdo $L(n)$, el punto medio $M(n)$ y el punto terminal derecho $R(n)$ de cada subintervalo. En los Ejercicios 35-38, usar ese programa para aproximar la integral definida y completar la tabla.

n	4	8	12	16	20
L(n)					
M(n)					
R(n)					

35. $\int_0^3 x\sqrt{3-x}\,dx$ **36.** $\int_0^3 \frac{5}{x^2+1}\,dx$

37. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx$ **38.** $\int_0^3 x \operatorname{sen} x\,dx$

Para pensar En los Ejercicios 39-42, usar la figura para llenar el hueco en blanco con el símbolo <, > o =.



39. El intervalo [1, 5] se parte en n subintervalos de igual longitud Δx y x_i es el punto terminal izquierdo del i-ésimo subintervalo.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \quad \square \quad \int_1^5 f(x)\,dx$$

40. El intervalo [1, 5] se parte en n subintervalos de igual longitud Δx y x_i es el punto terminal derecho del i-ésimo subintervalo.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \quad \square \quad \int_1^5 f(x)\,dx$$

41. El intervalo [1, 5] se parte en n subintervalos de igual longitud Δx y x_i es el punto medio del i-ésimo subintervalo.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \quad \square \quad \int_1^5 f(x)\,dx$$

42. Sea T el promedio de los resultados de los Ejercicios 39 y 40.

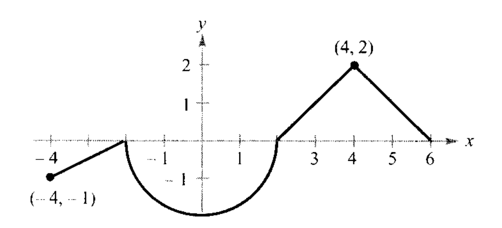
$$T \quad \square \quad \int_1^5 f(x)\,dx$$

43. ***Para pensar*** La gráfica de f de la página siguiente consta de segmentos rectos y de un semicírculo. Calcular cada integral definida usando fórmulas geométricas.

a) $\int_0^2 f(x)\,dx$ *b)* $\int_2^6 f(x)\,dx$

c) $\int_{-4}^{2} f(x)\,dx$ *d)* $\int_{-4}^{6} f(x)\,dx$

e) $\int_{-4}^{6} |f(x)|\,dx$ *f)* $\int_{-4}^{6} [f(x) + 2]\,dx$



44. ***Para pensar*** Consideremos una función f continua en el intervalo $[-5, 5]$ y tal que $\int_0^5 f(x)\,dx = 4$. Calcular cada integral.

a) $\displaystyle\int_0^5 [f(x) + 2]\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_{-2}^3 f(x+2)\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-5}^5 f(x)\,dx$ (f es par) *d)* $\displaystyle\int_{-5}^5 f(x)\,dx$ (f es impar)

En los Ejercicios 45 y 46, determinar qué valor aproxima mejor la integral definida. Elegir atendiendo a un esbozo de la región.

45. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$

a) 5 *b)* -3 *c)* 10 *d)* 2 *e)* 8

46. $\displaystyle\int_0^{1/2} 4\cos \pi x\,dx$

a) 4 *b)* $\frac{4}{3}$ *c)* 16 *d)* 2π *e)* -6

¿Vedadero o falso? En los Ejercicios 47-52, decidir si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar el porqué o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

47. $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

48. $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \left[\int_a^b f(x)\,dx\right]\left[\int_a^b g(x)\,dx\right]$

49. Si la norma de una partición tiende a cero, el número de subintervalos tiende a infinito.

50. Si f es creciente en $[a, b]$, el valor mínimo de $f(x)$ en $[a, b]$ es $f(a)$.

51. El valor de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ tiene que ser positivo.

52. Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > 0$, entonces f es no negativa para todo x en $[a, b]$.

53. Hallar la suma de Riemann asociada a $f(x) = x^2 + 3x$ en el intervalo $[0, 8]$, donde $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 7$, y $x_4 = 8$, y donde $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 5$, y $c_4 = 8$.

54. Hallar la suma de Riemann asociada a $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$, donde $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/4$, $x_2 = \pi/3$, $x_3 = \pi$, y $x_4 = 2\pi$, y donde $c_1 = \pi/6$, $c_2 = \pi/3$, $c_3 = 2\pi/3$, y $c_4 = 3\pi/2$.

En los Ejercicios 55 y 56, usar el Ejemplo 1 como modelo para evaluar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

sobre la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

55. $f(x) = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$

(*Ayuda:* Tomar $c_i = 2i^2/n^2$.)

56. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

(*Ayuda:* Tomar $c_i = i^3/n^3$.)

57. ***Para pensar*** Determinar si la función

$$f(x) = \frac{1}{x-4}$$

es integrable en el intervalo $[3, 5]$. Explicar la respuesta.

58. ***Para pensar*** Determinar si la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ es racional} \\ 0, & x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es integrable en el intervalo $[0, 1]$. Explicar la respuesta.

59. ***Para pensar*** Dar un ejemplo de función integrable en $[-1, 1]$ que no sea continua en ese intervalo.

60. Calcular, si ello es posible, la integral $\displaystyle\int_0^2 [\![x]\!]\,dx$.

61. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{n^3}[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2]$ utilizando la suma de Riemann adecuada.

62. Supongamos f integrable en $[a, b]$ con $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para todo x en $[a, b]$, $m > 0$ y $M > 0$. Demostrar que

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

Usar ese resultado para estimar $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$.

63. Demostrar que si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$



4.4 El teorema fundamental del Cálculo

CONTENIDO ▪
El teorema fundamental del Cálculo ▪
El teorema del valor medio para integrales ▪
Valor medio de una función ▪
El segundo teorema fundamental del Cálculo ▪

El teorema fundamental del Cálculo

Ya hemos introducido las dos grandes ramas del Cálculo: el cálculo diferencial (de la mano del problema de la recta tangente) y el cálculo integral (de la mano del problema del área). En este momento, ambos problemas parecen sin relación entre sí. Pero existe entre ellos una íntima conexión, descubierta independientemente por Isaac Newton y Gottfried Leibniz, que constituye el llamado, con toda justicia, **teorema fundamental del Cálculo**.

Informalmente, el teorema afirma que la derivación y la integración (definida) son operaciones mutuamente inversas. Para ver cómo Newton y Leibniz se dieron cuenta de ello, consideremos las aproximaciones que muestra la Figura 4.27. Cuando definimos la pendiente de la recta tangente, utilizamos el cociente $\Delta y/\Delta x$ (pendiente de la recta secante). Análogamente, al definir el área de una región bajo una curva, usamos el producto $\Delta y \Delta x$ (área de un rectángulo). Así pues, en su primer paso derivación e integración son operaciones inversas. El teorema fundamental del Cálculo establece que el proceso de límite usado para definir ambas operaciones preserva esa relación inicial de inversas.

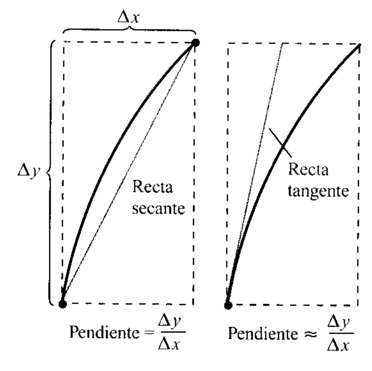
EXPLORACIÓN

Integración y antiderivación En este capítulo venimos utilizando el signo integral para denotar una antiderivada (una familia de funciones) y una integral definida (un número).

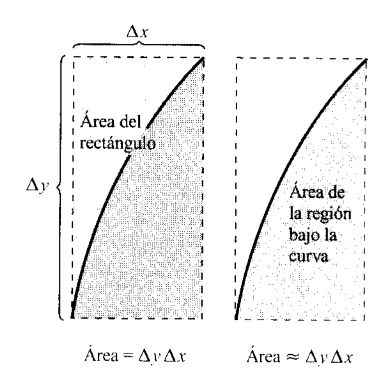
Antiderivación: $\int f(x)\,dx$

Integración definida: $\int_a^b f(x)\,dx$

El uso de un mismo símbolo para ambas operaciones parece sugerir que están relacionadas. Sin embargo, en los albores del Cálculo no se sabía que estaban relacionadas. El símbolo $\int$, que proviene de la letra S y se debe a Leibniz, ¿para cuál de las dos operaciones cree que fue usado originalmente? Razone su respuesta.



a) Derivación



b) Integración definida

FIGURA 4.27
Derivación e integración son mutuamente «inversas».

TEOREMA 4.9 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una primitiva de f en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Demostración: La clave reside en escribir la diferencia $F(b) - F(a)$ de forma adecuada. Sea Δ la siguiente partición de $[a, b]$.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Restando y sumando términos análogos se obtiene

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - \cdots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

Por el teorema del valor medio sabemos que existe un número c_i en el i-ésimo subintervalo tal que

$$F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Como $F'(c_i) = f(c_i)$, podemos hacer $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y obtenemos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

Esta importante ecuación nos dice que, aplicando el teorema del valor medio, siempre podemos encontrar una colección de c_i tales que la *constante* $F(b) - F(a)$ sea una suma de Riemann de f en $[a, b]$. Tomando el límite para $\|\Delta\| \to 0$ resulta

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \square$$

La siguiente estrategia ayudará a comprender el uso del teorema fundamental del Cálculo.

Estrategia para usar el teorema fundamental del Cálculo

1. Supuesta conocida una primitiva de f, disponemos de una forma de calcular integrales definidas que no requiere hallar el límite de una suma.
2. Al aplicar el teorema fundamental del Cálculo, es conveniente la siguiente notación.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Por ejemplo, para calcular $\int_1^3 x^3\,dx$ podemos escribir

$$\int_1^3 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20$$

3. No es necesario incluir una constante de integración C en la primitiva, ya que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x) + C\Big]_a^b = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

EJEMPLO 1 Cálculo de una integral definida

a) $\displaystyle\int_1^2 (x^2-3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 6\right) - \left(\frac{1}{3} - 3\right) = -\frac{2}{3}$

b) $\displaystyle\int_1^4 3\sqrt{x}\,dx = 3\int_1^4 x^{1/2}\,dx = 3\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 = 2(4)^{3/2} - 2(1)^{3/2} = 14$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x\Big]_0^{\pi/4} = 1 - 0 = 1$ □

EJEMPLO 2 La integral definida de un valor absoluto

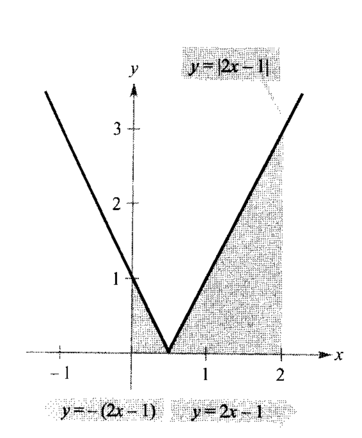


FIGURA 4.28
La integral definida de y en $[0, 2]$ es $\frac{5}{2}$.

Calcular $\displaystyle\int_0^2 |2x-1|\,dx$

Solución: Usando la Figura 4.28 y la definición de valor absoluto vemos que

$$|2x-1| = \begin{cases} -(2x-1), & x \leqslant \frac{1}{2} \\ 2x-1, & x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

De ahí que se pueda romper la integral en dos partes.

$$\begin{aligned}\int_0^2 |2x-1|\,dx &= \int_0^{1/2} -(2x-1)\,dx + \int_{1/2}^2 (2x-1)\,dx \\ &= \Big[-x^2 + x\Big]_0^{1/2} + \Big[x^2 - x\Big]_{1/2}^2 \\ &= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - (0+0) + (4-2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 3 Aplicación del teorema fundamental del Cálculo para hallar un área

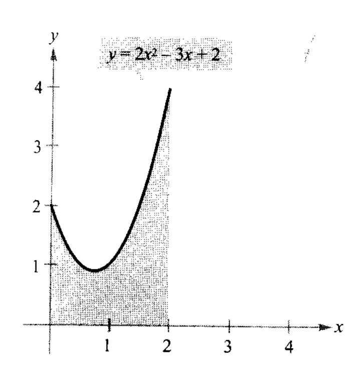


FIGURA 4.29
El área de la región acotada por la gráfica de y, el eje x, $x = 0$ y $x = 2$ es $\frac{10}{3}$.

Calcular el área de la región acotada por la gráfica de $y = 2x^2 - 3x + 2$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$ (véase Figura 4.29).

Solución: Nótese que $y > 0$ en el intervalo $[0, 2]$.

$$\text{Área} = \int_0^2 (2x^2 - 3x + 2)\,dx \qquad \text{Integrar entre } x = 0 \text{ y } x = 2$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^2 \qquad \text{Hallar una primitiva, } F(x)$$

$$= \left(\frac{16}{3} - 6 + 4\right) - (0 - 0 + 0) \qquad \text{Evaluar } F(2) - F(0)$$

$$= \frac{10}{3} \qquad \text{Simplificar}$$

□

El teorema del valor medio para integrales

En la Sección 4.2 vimos que el área de una región bajo una curva es mayor que el área de un rectángulo inscrito y mayor que la de uno circunscrito. El teorema del valor medio para integrales afirma que existe, «entre» el inscrito y el circunscrito, un rectángulo cuya área es precisamente la misma que la de la región (véase Figura 4.30).

TEOREMA 4.10 EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, existe un número c en $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

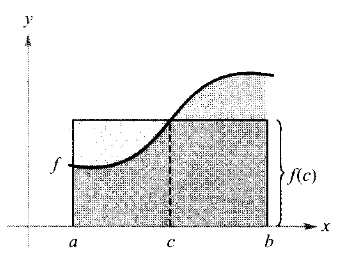


FIGURA 4.30
Rectángulo cuya altura es el valor medio: $f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Demostración:

Caso 1: Si f es constante en el intervalo $[a, b]$, el teorema es obviamente cierto, ya que c puede ser cualquier punto de $[a, b]$.

Caso 2: Si f no es constante en $[a, b]$, por el teorema de los valores extremos podemos elegir $f(m)$ y $f(M)$ como los valores mínimo y máximo de f en $[a,b]$. Puesto que $f(m) \leqslant f(x) \leqslant f(M)$ para todo x en $[a, b]$, podemos aplicar el Teorema 4.8 y obtenemos:

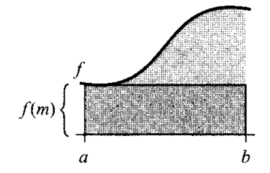
$$\int_a^b f(m)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(M)\,dx \qquad \text{Véase Figura 4.31}$$

$$f(m)(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant f(M)(b-a)$$

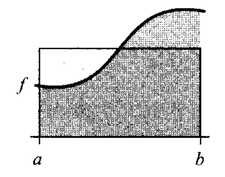
$$f(m) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant f(M)$$

De la tercera desigualdad, por el teorema del valor intermedio, se sigue que existe algún c en $[a, b]$ para el cual

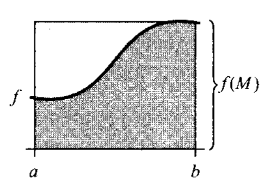
$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{o} \quad f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$



Rectángulo inscrito
(menor que el área de la región)
$\int_a^b f(m)\,dx = f(m)(b-a)$



Rectángulo de valor medio
(igual al área de la región)
$\int_a^b f(x)\,dx$



Rectángulo circunscrito
(mayor que el área de la región)
$\int_a^b f(M)\,dx = f(M)(b-a)$

FIGURA 4.31

□

Nota. El Teorema 4.10 no especifica cómo hallar c. Se limita a garantizar su existencia en $[a, b]$.

Valor medio de una función

El valor de $f(c)$, anunciado por el teorema del valor medio para integrales, se llama **valor medio** de f en el intervalo $[a, b]$.

DEFINICIÓN DEL VALOR MEDIO DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

Si f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$, el **valor medio** de f en $[a, b]$ es

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Nota. La figura muestra que el área de la región bajo la gráfica de f es igual al área del rectángulo cuya altura es el valor medio.

FIGURA 4.32

Valor medio $= \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx.$

Para ver por qué el valor medio de f se define así, supongamos que partimos $[a, b]$ en n subintervalos de igual anchura $\Delta x = (b-a)/n$. Si c_i es cualquier punto del i-ésimo subintervalo, la media aritmética de la función en los c_i viene dada por

$$a_n = \frac{1}{n}\left[f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)\right] \qquad \text{Valor medio de } f(c_1), \ldots, f(c_n)$$

Multiplicando y dividiendo por $(b-a)$ se puede reescribir ese valor promedio como

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left(\frac{b-a}{b-a}\right) = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

Finalmente, si se toma el límite para $n \to \infty$, se obtiene el valor antes definido.

Esta noción de valor medio no es sino una de tantas aplicaciones prácticas de la integración a la hora de representar procesos de suma. En el Capítulo 6 tendremos ocasión de analizar otras, como el volumen, la longitud de arco, los centros de masa y el trabajo.

EJEMPLO 4 Cálculo del valor medio de una función

Hallar el valor medio de $f(x) = 3x^2 - 2x$ en el intervalo $[1, 4]$.

Solución: El valor medio viene dado por

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_1^4 (3x^2 - 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\Big[x^3 - x^2\Big]_1^4$$

$$= \frac{1}{3}\left[64 - 16 - (1 - 1)\right] = \frac{48}{3} = 16$$

(Véase Figura 4.33.)

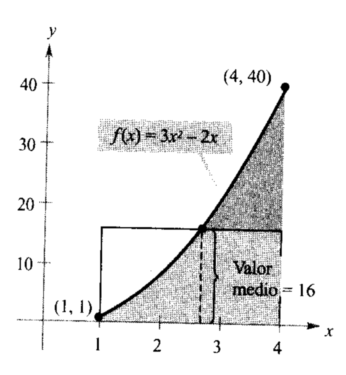


FIGURA 4.33

EJEMPLO 5 La velocidad del sonido

A diferentes altitudes en la atmósfera terrestre, el sonido viaja con velocidades diferentes. La velocidad del sonido $s(x)$, en m/s, admite el modelo

$$s(x) = \begin{cases} -4x + 341, & 0 \leqslant x < 11{,}5 \\ 295, & 11{,}5 \leqslant x < 22 \\ \frac{3}{4}x + 278{,}5, & 22 \leqslant x < 32 \\ \frac{3}{2}x + 254{,}5, & 32 \leqslant x < 50 \\ -\frac{3}{2}x + 404{,}5, & 50 \leqslant x < 80 \end{cases}$$

donde s es la altitud en km (véase Figura 4.34). ¿Cuál es la velocidad media del sonido en el intervalo [0, 80]?

La primera persona que voló a una velocidad mayor que la del sonido fue Charles Yeager. El 14 de octubre de 1947, volando en un avión cohete X-1 a una altitud de 12,8 km, fue cronometrado en 299,5 m/s. Si Yeager hubiese volado por debajo de los 10,375 km de altitud, esa velocidad no habría «traspasado la barrera del sonido».

Solución: Comenzamos integrando $s(x)$ en [0, 80], para lo cual rompemos la integral en cinco partes.

$$\int_0^{11,5} s(x)\,dx = \int_0^{11,5} (-4x + 341)\,dx = 3.657$$

$$\int_{11,5}^{22} s(x)\,dx = \int_{11,5}^{22} (295)\,dx = 3.097{,}5$$

$$\int_{22}^{32} s(x)\,dx = \int_{22}^{32} (\tfrac{3}{4}x + 278{,}5)\,dx = 2.987{,}5$$

$$\int_{32}^{50} s(x)\,dx = \int_{32}^{50} (\tfrac{3}{2}x + 254{,}5)\,dx = 5.688$$

$$\int_{50}^{80} s(x)\,dx = \int_{50}^{80} (-\tfrac{3}{2}x + 404{,}5)\,dx = 9.210$$

Sumando los valores de las cinco integrales obtenemos

$$\int_0^{80} s(x)\,dx = 24.640$$

Por tanto, la velocidad media del sonido entre 0 y 80 km de altitud es

$$\text{Velocidad media} = \frac{1}{80}\int_0^{80} s(x)\,dx = \frac{24.640}{80} = 308 \text{ m/s}$$

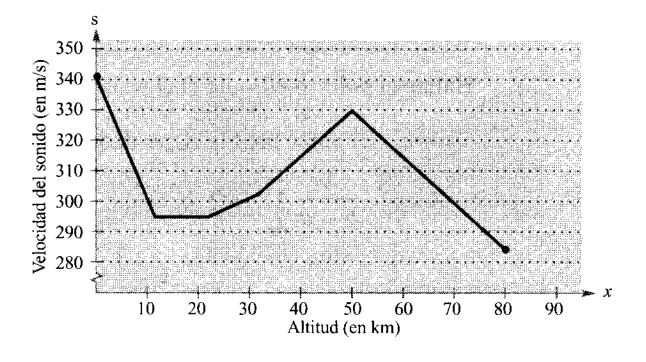


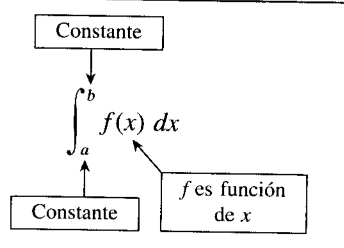
FIGURA 4.34
La velocidad del sonido depende de la altitud.

□

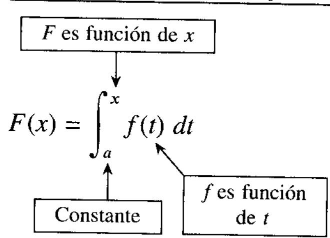
El segundo teorema fundamental del Cálculo

Al introducir la integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ se tomaba fijo el límite superior de integración b. Ahora vamos a contemplar la situación en la que el límite superior de integración es la variable x. Con el fin de evitar confusiones provocadas por el uso de x en dos papeles distintos, pasamos eventualmente a llamar t a la variable de integración. (Recordemos que la integral definida *no* es una función de su variable de integración.)

La integral definida como un número



La integral definida como función



EJEMPLO 6 La integral definida como función

EXPLORACIÓN

Representar en la calculadora la función

$$F(x) = \int_0^x \cos t\, dt$$

en $0 \leqslant x \leqslant \pi$. ¿Reconoce su gráfica? Explicar la respuesta.

Evaluar la función

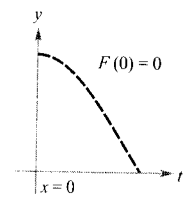
$$F(x) = \int_0^x \cos t\, dt$$

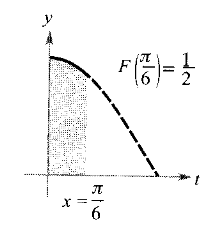
en $x = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ y $\pi/2$.

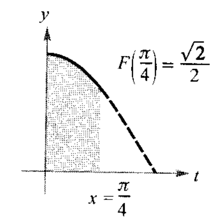
Solución: Podríamos calcular cinco integrales definidas diferentes, una por cada límite superior dado. Pero es mucho más sencillo fijar x como una constante, por el momento, y aplicar el teorema fundamental del Cálculo para obtener

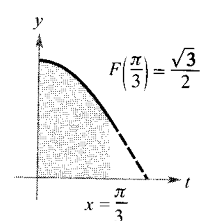
$$\int_0^x \cos t\, dt = \operatorname{sen} t\Big]_0^x$$
$$= \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0$$
$$= \operatorname{sen} x$$

Ahora, usando $F(x) = \operatorname{sen} x$, podemos llegar a los resultados que recoge la Figura 4.35.









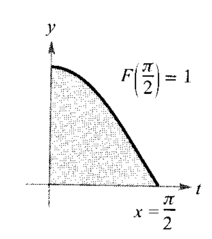


FIGURA 4.35

$F(x) = \int_0^x \cos t\, dt$ es el área bajo la curva $f(t) = \cos t$ entre 0 y x. □

En el Ejemplo 6, la derivada de F es el integrando original (sólo que con la variable cambiada). Esto es,

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \frac{d}{dx}\left[\int_0^x \cos t\, dt\right] = \cos x$$

Este resultado se generaliza en el siguiente teorema, conocido como **segundo teorema fundamental del Cálculo**.

TEOREMA 4.11 EL SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si f es continua en un intervalo abierto I que contiene al punto a, entonces, para todo x de ese intervalo,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\, dt\right] = f(x)$$

Demostración: Empezamos definiendo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Por definición de derivada tenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt + \int_x^a f(t)\, dt\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt\right] \end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio para integrales (suponiendo que $\Delta x > 0$) sabemos que existe un c en el intervalo $[a, b]$ tal que la integral en la expresión anterior es igual a $f(c)\,\Delta x$. Además, como $x \leqslant c \leqslant x + \Delta x$, se sigue que $c \to x$ cuando $\Delta x \to 0$. Por tanto, obtenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{\Delta x} f(c)\, \Delta x\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Un argumento similar sirve en el caso $\Delta x < 0$. □

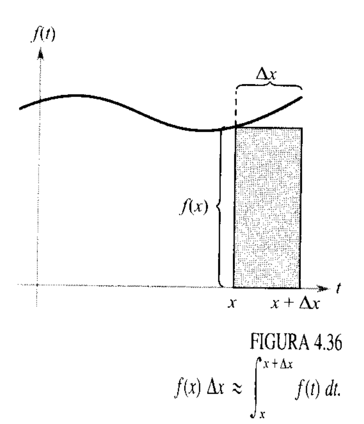


FIGURA 4.36
$f(x)\,\Delta x \approx \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$

Nota. Usando el modelo del área para integrales definidas, la aproximación

$$f(x)\,\Delta x \approx \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

puede interpretarse diciendo que el área del rectángulo de altura $f(x)$ y anchura Δx es aproximadamente igual al área de la región acotada por la gráfica de f y el eje x, en el intervalo $[x, x + \Delta x]$, como muestra la Figura 4.36.

El segundo teorema fundamental del Cálculo afirma que si f es continua podemos tener la certeza de que posee primitiva. Pero esta primitiva no tiene por qué ser una función elemental (recordar la Sección P.3).

EJEMPLO 7 Aplicación del segundo teorema fundamental del Cálculo

Calcular $\dfrac{d}{dx}\left[\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt\right]$.

Solución: Nótese que $f(t) = \sqrt{t^2+1}$ es continua en toda la recta real. Aplicando, por tanto, el segundo teorema fundamental del Cálculo se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt\right] = \sqrt{x^2+1}$$ □

El Ejemplo 7 constituye una aplicación directa del segundo teorema fundamental del Cálculo. El próximo ejemplo sugiere cómo usar ese teorema, en combinación con la regla de la cadena, para hallar derivadas.

EJEMPLO 8 Aplicación del segundo teorema fundamental del Cálculo

Hallar la derivada de $F(x) = \displaystyle\int_{\pi/2}^{x^3} \cos t\,dt$

Solución: Haciendo $u = x^3$, podemos aplicar el segundo teorema fundamental del Cálculo junto con la regla de la cadena.

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{dF}{du}\frac{du}{dx}\\
&= \frac{d}{du}\left[\int_{\pi/2}^{u} \cos t\,dt\right]\frac{du}{dx}\\
&= (\cos u)(3x^2)\\
&= (\cos x^3)(3x^2)
\end{aligned}$$ □

Como el integrando del Ejemplo 8 es fácil de integrar, podemos comprobar la derivada obtenida así:

$$F(x) = \int_{\pi/2}^{x^3} \cos t \, dt$$
$$= \operatorname{sen} t \Big]_{\pi/2}^{x^3}$$
$$= \operatorname{sen} x^3 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$$
$$= (\operatorname{sen} x^3) - 1$$

De esta manera, la regla de la cadena permite ver que la derivada es la misma que se ha obtenido en el Ejemplo 8.

$$F'(x) = (\cos x^3)(3x^2)$$

Ejercicios de la Sección 4.4

Para pensar En los Ejercicios 1-4, representar el integrando en la calculadora y usar la gráfica para determinar si la integral definida es positiva, negativa o cero.

1. $\int_0^{\pi} \frac{4}{x^2+1} \, dx$ **2.** $\int_0^{\pi} \cos x \, dx$

3. $\int_{-2}^{2} x\sqrt{x^2+1} \, dx$ **4.** $\int_{-2}^{2} x\sqrt{2-x} \, dx$

En los Ejercicios 5-24, calcular la integral definida y usar la calculadora para verificar el resultado.

5. $\int_0^1 2x \, dx$ **6.** $\int_2^7 3 \, dv$

7. $\int_{-1}^{0} (x-2) \, dx$ **8.** $\int_2^5 (-3v+4) \, dv$

9. $\int_{-1}^{1} (t^2-2) \, dt$ **10.** $\int_0^3 (3x^2+x-2) \, dx$

11. $\int_0^1 (2t-1)^2 \, dt$ **12.** $\int_{-1}^{1} (t^3-9t) \, dt$

13. $\int_1^2 \left(\frac{3}{x^2}-1\right) dx$ **14.** $\int_{-2}^{-1} \left(u-\frac{1}{u^2}\right) du$

15. $\int_1^4 \frac{u-2}{\sqrt{u}} \, du$ **16.** $\int_{-3}^{3} v^{1/3} \, dv$

17. $\int_{-1}^{1} (\sqrt[3]{t}-2) \, dt$ **18.** $\int_1^8 \sqrt{\frac{2}{x}} \, dx$

19. $\int_0^1 \frac{x-\sqrt{x}}{3} \, dx$ **20.** $\int_0^2 (2-t)\sqrt{t} \, dt$

21. $\int_{-1}^{0} (t^{1/3}-t^{2/3}) \, dt$ **22.** $\int_{-8}^{-1} \frac{x-x^2}{2\sqrt[3]{x}} \, dx$

23. $\int_0^3 |2x-3| \, dx$ **24.** $\int_0^4 |x^2-4x+3| \, dx$

En los Ejercicios 25-30, calcular la integral definida de la función trigonométrica que se especifica y comprobar el resultado en la calculadora.

25. $\int_0^{\pi} (1+\operatorname{sen} x) \, dx$ **26.** $\int_0^{\pi/4} \frac{1-\operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta} \, d\theta$

27. $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sec^2 x \, dx$ **28.** $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (2-\operatorname{cosec}^2 x) \, dx$

29. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} 4 \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta$ **30.** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2t+\cos t) \, dt$

31. ***Depreciación*** Una máquina tiene un ritmo de depreciación $dV/dt = 10.000(t-6)$, $0 \leqslant t \leqslant 5$, donde V es el valor de la máquina después de t años. Formular y calcular una integral definida que represente el valor de la máquina a los tres años.

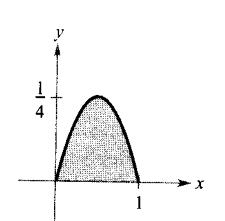
32. ***El experimento de la aguja de Buffon*** En un plano horizontal se han marcado rectas paralelas a 2 pulgadas de distancia cada una de la siguiente. Si se lanza al azar una aguja de 2 pulgadas de longitud sobre el plano, la probabilidad de que la aguja toque alguna recta es

$$P = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \theta \, d\theta$$

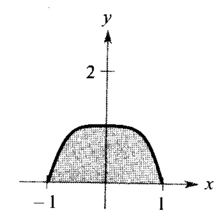
donde θ es el ángulo agudo que forma la aguja con la dirección de las rectas. Calcular esa probabilidad.

En los Ejercicios 33-38, determinar el área de la región que se indica.

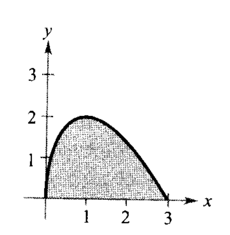
33. $y = x - x^2$



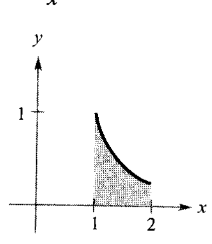
34. $y = 1 - x^4$



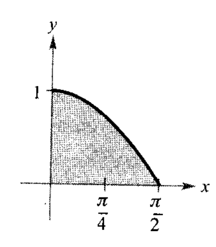
35. $y = (3 - x)\sqrt{x}$



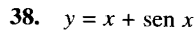
36. $y = \dfrac{1}{x^2}$

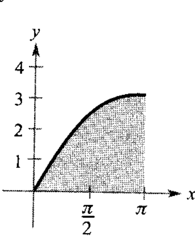


37. $y = \cos x$



38. $y = x + \operatorname{sen} x$





En los Ejercicios 39-42, hallar el área de la región acotada por las gráficas dadas.

39. $y = 3x^2 + 1, \quad x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0$

40. $y = 1 + \sqrt{x}, \quad x = 0, \quad x = 4, \quad y = 0$

41. $y = x^3 + x, \quad x = 2, \quad y = 0$

42. $y = -x^2 + 3x, \quad y = 0$

En los Ejercicios 43-46, hallar el valor de c anunciado por el teorema del valor medio para integrales para la función y el intervalo que se especifican.

	Función	*Intervalo*
43.	$f(x) = x - 2\sqrt{x}$	$[0, 2]$
44.	$f(x) = \dfrac{9}{x^3}$	$[1, 3]$
45.	$f(x) = 2\sec^2 x$	$[-\pi/4, \pi/4]$
46.	$f(x) = \cos x$	$[-\pi/3, \pi/3]$

En los Ejercicios 47-50, representar la función en la calculadora. Hallar su valor medio en el intervalo y todos los valores de x en ese intervalo en los que la función toma su valor medio.

	Función	*Intervalo*
47.	$f(x) = 4 - x^2$	$[-2, 2]$
48.	$f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$	$\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$
49.	$f(x) = \operatorname{sen} x$	$[0, \pi]$
50.	$f(x) = \cos x$	$[0, \pi/2]$

Para pensar En los Ejercicios 51-56, usar la gráfica de f que muestra la figura. La región sombreada A tiene área 1,5 y $\int_0^6 f(x)\,dx = 3{,}5$. Con esta información, rellenar los espacios en blanco.

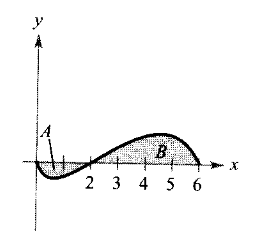
51. $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx =$ ______

52. $\displaystyle\int_2^6 f(x)\,dx =$ ______

53. $\displaystyle\int_0^6 |f(x)|\,dx =$ ______

54. $\displaystyle\int_0^2 -2f(x)\,dx =$ ______

55. $\displaystyle\int_0^6 [2 + f(x)]\,dx =$ ______



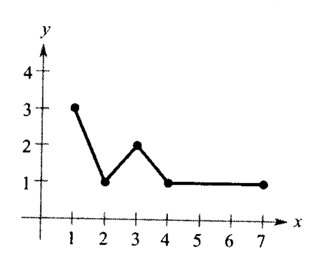
56. El valor medio de f en $[0, 6]$ es ______.

57. ***Para pensar*** Dada la gráfica de f que aparece en la figura,

a) Calcular $\displaystyle\int_1^7 f(x)\,dx.$

b) Determinar el valor medio de f en $[1, 7]$.

c) Repetir *a)* y *b)* con la gráfica de f trasladada dos unidades hacia arriba.



58. ***Beneficio medio*** El beneficio, en miles de dólares, producido por un producto comercial durante los 6 primeros meses viene dado aproximadamente por el modelo

$$P = 5(\sqrt{t} + 30), \qquad t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

a) Usar ese modelo para completar la tabla y usar sus entradas para calcular (aritméticamente) el beneficio medio en esos primeros 6 meses.

t	1	2	3	4	5	6
P						

b) Hallar, por integración, el valor medio de la función beneficio y comparar el resultado con el del apartado *a*). (Integrar sobre el intervalo [0,5, 6,5].)

c) ¿Tiene alguna ventaja el uso de la aproximación del valor medio dado por la integral definida? (Nótese que la aproximación integral utiliza todos los valores reales de t en el intervalo, no sólo los enteros.)

59. ***Un modelo matemático*** Una compañía de seguros de vida necesita un modelo para aproximar la tasa de mortalidad de los ciudadanos durante su vida laboral. La tabla da la tasa de mortalidad R por 1.000 individuos de edad x. *(Fuente: Department of Health and Human Services.)*

x	20	30	40	50	60
R	1,0	1,4	2,3	4,7	11,7

Un modelo para esos datos es

$$R = -91{,}1 - 6{,}313x + 0{,}035x^2 + 45{,}794\sqrt{x},$$

$$20 \leqslant x \leqslant 60$$

a) Representar en la calculadora los datos y el modelo.

b) Calcular el ritmo de crecimiento de la tasa de mortalidad cuando $x = 40$ y $x = 50$.

c) Hallar la tasa de mortalidad media para las personad de edades entre los 30 y los 40 años. También entre 50 y 60.

60. ***Flujo sanguíneo*** La velocidad del flujo sanguíneo a una distancia r del eje central de una arteria de radio R es $v = k(R^2 - r^2)$, donde k es una constante de proporcionalidad. Calcular el flujo medio de sangre sobre un radio de la arteria. (Usar 0 y R como límites de integración.)

61. ***Fuerza*** La fuerza, en newtons, de un cilindro hidráulico en una presa es proporcional al cuadrado de sec x, siendo x la distancia en metros que el cilindro se extiende en su ciclo. El dominio de F es $[0, \pi/3]$ y $F(0) = 500$.

a) Expresar F como función de x.

b) Calcular la fuerza media ejercida por la presa sobre el intervalo $[0, \pi/3]$.

62. ***Ciclo respiratorio*** El volumen V, en litros, de aire en los pulmones durante un ciclo respiratorio de 5 segundos viene dado aproximadamente por el modelo $V = 0{,}1729t + 0{,}1522t^2 - 0{,}0374t^3$ donde t es el tiempo en segundos. Estimar el volumen medio de aire en los pulmones a lo largo de un ciclo.

63. ***Un modelo matemático*** Un almacenista desea estimar el número de clientes que entran en su almacén entre el mediodía, hora de apertura, y las 9 de la tarde, hora de cierre. La tabla muestra el número N de clientes que entran en un minuto elegido al azar dentro de cada hora de $t - 1$ a t, siendo $t = 0$ el mediodía.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	6	7	9	12	15	14	11	7	2

a) Dibujar un histograma con esos datos.

b) Estimar el número total de clientes que entran al día.

c) Usar regresión en la calculadora para hallar un modelo

$$N(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

que ajuste esos datos.

d) Representar en la calculadora los datos y el modelo.

e) Evaluar, con ayuda de la calculadora, $\int_0^9 N(t)\,dt$ y usar el resultado para estimar el número total de clientes que entran al día. Compararlo con el obtenido en *b*).

f) Estimar el número medio de clientes por minuto, entre las 3 de la tarde y las 7 de la tarde.

64. ***Un modelo matemático*** En un proceso de fabricación hay un ciclo repetitivo de calentamiento de 4 minutos. Durante una revisión del proceso, el flujo R (pies cúbicos por minuto) de gas natural se midió en intervalos de 1 minuto. Los resultados aparecen en la tabla.

t	0	1	2	3	4
R	0	62	76	38	0

a) Hallar un modelo de tipo $R = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$ que ajuste esos datos, con ayuda de calculadora.

b) Representar en ésta los datos y el modelo.

c) Aproximar, mediante el teorema fundamental del Cálculo, el número de pies cúbicos por minuto de gas natural utilizado en un ciclo.

65. ***Un modelo matemático*** Se controla un vehículo experimental en un trayecto recto. Parte del reposo, y su velocidad, en m/s, se mide cada 10 segundos durante 1 minuto. Los datos experimentales se recogen en la tabla.

t	0	10	20	30	40	50	60
v	0	5	21	40	62	78	83

a) Hallar un modelo $v = at^3 + bt^2 + ct + d$ que ajuste esos datos, con ayuda de calculadora.
b) Representar en ésta los datos y el modelo.
c) Aproximar, mediante el teorema fundamental del Cálculo, la distancia recorrida por el vehículo durante la prueba.

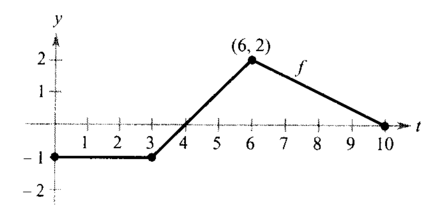
66. Usar la función f de la figura y la función g definida por

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

a) Completar la tabla

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g(x)$											

b) Representar los puntos de la tabla.
c) ¿Dónde tiene g su mínimo?
d) ¿Qué cuatro puntos consecutivos son colineales?
e) ¿Entre qué dos puntos consecutivos crece g a ritmo más rápido? Explicar las respuestas.



En los Ejercicios 67-72, *a*) integrar para hallar F como función de x, y *b*) verificar el segundo teorema fundamental del Cálculo derivando el resultado.

67. $F(x) = \int_0^x (t + 2)\,dt$ **68.** $F(x) = \int_0^x t(t^2 + 1)\,dt$

69. $F(x) = \int_8^x \sqrt[3]{t}\,dt$ **70.** $F(x) = \int_4^x \sqrt{t}\,dt$

71. $F(x) = \int_{\pi/4}^x \sec^2 t\,dt$ **72.** $F(x) = \int_{\pi/3}^x \sec t \operatorname{tg} t\,dt$

En los Ejercicios 73-78, usar el segundo teorema fundamental del Cálculo para hallar $F'(x)$.

73. $F(x) = \int_{-2}^x (t^2 - 2t)\,dt$ **74.** $F(x) = \int_1^x \sqrt[4]{t}\,dt$

75. $F(x) = \int_{-1}^x \sqrt{t^4 + 1}\,dt$ **76.** $F(x) = \int_0^x \operatorname{tg}^4 t\,dt$

77. $F(x) = \int_0^x t \cos t\,dt$ **78.** $F(x) = \int_1^x \frac{t^2}{t^2 + 1}\,dt$

En los Ejercicios 79-84, hallar $F'(x)$.

79. $F(x) = \int_x^{x+2} (4t + 1)\,dt$ **80.** $F(x) = \int_{-x}^x t^3\,dt$

81. $F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \sqrt{t}\,dt$ **82.** $F(x) = \int_2^{x^2} \frac{1}{t^2}\,dt$

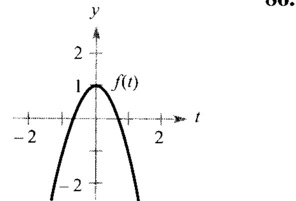
83. $F(x) = \int_0^{x^3} \operatorname{sen} t^2\,dt$ **84.** $F(x) = \int_0^{3x} \sqrt{1 + t^3}\,dt$

En los Ejercicios 85 y 86, esbozar la gráfica de la función

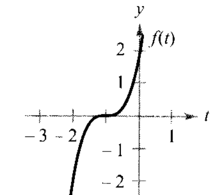
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

describir cualquier relación que pueda existir entre los extremos y puntos de inflexión de las gráficas de f y F.

85.



86.



87. ***Coste*** El coste total de adquisición y mantenimiento de una máquina durante x años es

$$C(x) = 5.000\ (25 + 3 \int_0^x t^{1/4}\,dt)$$

a) Integrar para expresar C como función de x.
b) Calcular $C(1)$, $C(5)$ y $C(10)$.

88. ***Área*** El área A entre la gráfica de la función $g(t) = 4 - 4/t^2$ y el eje t sobre el intervalo $[1, x]$ es

$$A(x) = \int_1^x \left(4 - \frac{4}{t^2}\right) dt$$

a) Hallar la asíntota horizontal de la gráfica de g.
b) Integrar para hallar A como función de x. ¿Tiene asíntota horizontal la gráfica de A? Explicar la respuesta.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 89-91, decidir si la afirmación es correcta o no. Si no lo es, explicar por qué o exhibir un ejemplo que muestre su falsedad.

89. Si $F'(x) = G'(x)$ en el intervalo $[a, b]$, entonces $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

90. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

91. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$

92. Demostrar que:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt\right] = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

93. Probar que la función

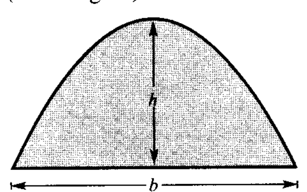
$$f(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1}\,dt + \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

es constante para $x > 0$.

94. Sea $G(x) = \displaystyle\int_0^x \left[\int_0^s f(t)\,dt\right] ds$, donde f es continua para todo t real. Calcular

a) $G(0)$ *b)* $G'(0)$ *c)* $G''(x)$ *d)* $G''(0)$

95. ***Área*** Arquímedes demostró que el área de un arco parabólico es igual a $\frac{2}{3}$ del producto de base por altura (véase figura).



a) Representar el arco parabólico acotado por $y = 9 - x^2$ y el eje x. Hallar el área A utilizando una integral definida apropiada.

b) Hallar la base y la altura del arco del apartado *a)* y verificar que $A = \frac{2}{3}\,bh$

c) Verificar la fórmula de Arquímedes para el arco limitado por $y = 5x - x^2$ y el eje x.

Movimiento rectilíneo En los Ejercicios 96-98, consideremos una partícula que se mueve por el eje x, siendo $x(t)$ su posición en el instante t, $x'(t)$ su velocidad y $\int_a^b |x'(t)|\,dt$ la distancia recorrida.

96. Calcular la distancia total recorrida en 5 unidades de tiempo si la función posición es $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 2$, $0 \leqslant t \leqslant 5$

97. Rehacer el Ejercicio 96 con función posición $x(t) = (t-1)(t-3)^2$, $0 \leqslant t \leqslant 5$.

98. Una partícula se mueve por el eje x con velocidad $v(t) = 1/\sqrt{t}$, $t > 0$. En el instante $t = 1$ está en $x = 4$. Hallar la distancia recorrida en el intervalo de tiempo $1 \leqslant t \leqslant 4$.

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

Representar en una calculadora la función $y_1 = \text{sen}^2 t$ en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Sea

$$F(x) = \int_0^x \text{sen}^2\, t\,dt$$

a) Completar la tabla y explicar por qué crecen los valores de F.

x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
$F(x)$							

b) Representar F utilizando integración en la calculadora.

c) Representar F' utilizando derivación en la calculadora. ¿Qué relación tiene esta gráfica con la del punto *b)*?

d) Comprobar que la derivada de $y = (1/2)t - (\text{sen } 2t)/4$ es $\text{sen}^2 t$. Representar y y redactar un breve párrafo relacionando esta gráfica con las de *b)* y *c)*.



4.5 Integración por sustitución

CONTENIDO ▪
Reconocimiento de modelos ▪
Cambio de variables ▪
La regla general de las potencias para integrales ▪
Cambio de variables en integrales definidas ▪
Integración de funciones pares e impares ▪

Reconocimiento de modelos

En esta sección estudiaremos técnicas para integrar funciones compuestas. Se divide en dos partes: *reconocimiento de modelos* y *cambios de variable*. Ambas técnicas requieren una ***u*-sustitución**. Con el reconocimiento de un modelo efectuamos la sustitución mentalmente, mientras que con el cambio de variable escribimos los pasos de la sustitución.

El papel que juega la sustitución en las integrales es comparable al de la regla de la cadena en las derivadas. Recordemos que, dadas dos funciones derivables $y = F(u)$ y $u = g(x)$, la regla de la cadena establece que

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$$

De la definición de primitiva se sigue que

$$\begin{aligned}\int F'(g(x))g'(x)\,dx &= F(g(x)) + C\\ &= F(u) + C\end{aligned}$$

Estos resultados se resumen en el teorema próximo.

Nota. El enunciado del Teorema 4.12 no dice cómo distinguir entre $f(g(x))$ y $g'(x)$ en el integrando. Conforme se practica la integración se va adquiriendo habilidad para ello. Ni que decir tiene que, en buena parte, la clave consiste en tener familiaridad con abundantes derivadas.

TEOREMA 4.12 PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Sea g una función cuyo recorrido es un intervalo I, y sea f una función continua en I. Si g es derivable en su dominio y F es una primitiva de f en I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\,dx$ y

$$\int f(u)\,du = F(u) + C$$

ADVERTENCIA Hay varias técnicas para aplicar sustitución, ligeramente distintas unas de otras. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que el objetivo es siempre el mismo: *se está tratando de encontrar una primitiva del integrando.*

EXPLORACIÓN

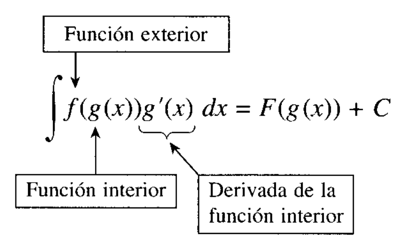
Reconocimiento de modelos En cada una de las siguientes integrales, el integrando se ajusta al modelo $f(g(x))\,g'(x)$. Identificar el modelo en cada caso y aprovecharlo para hallar la integral.

a) $\int 2x(x^2+1)^4\,dx$ *b)* $\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ *c)* $\int \sec^2 x(\operatorname{tg} x + 3)\,dx$

Las próximas tres integrales son análogas a las tres primeras. Verificar que se puede multiplicar y dividir en ellas por una constante para calcularlas.

d) $\int x(x^2+1)^4\,dx$ *e)* $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ *f)* $\int 2\sec^2 x(\operatorname{tg} x + 3)\,dx$

Los Ejemplos 1 y 2 muestran cómo aplicar *directamente* el teorema, reconociendo la presencia de $f(g(x))$ y de $g'(x)$. Nótese que en la función compuesta del integrando hay una *función externa* f y otra *función interna* g. Además, la derivada $g'(x)$ está presente como factor.



EJEMPLO 1 Reconocimiento del modelo f(g(x))g'(x)

Evaluar $\int (x^2 + 1)^2(2x)\,dx$

Solución: Haciendo $g(x) = x^2 + 1$, se obtiene

$$g'(x) = 2x$$

y

$$f(g(x)) = [g(x)]^2$$

De ahí es fácil identificar el esquema $f(g(x))\,g'(x)$ en el integrando. Usando la regla de las potencias para la integración y el Teorema 4.12, se ve que

$$\int \overbrace{(x^2 + 1)^2}^{[g(x)]^2}\overbrace{(2x)}^{g'(x)}\,dx = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^3 + C$$

Intente verificar, mediante la regla de la cadena, que la derivada de $\frac{1}{3}(x^2 + 1)^3 + C$ es el integrando de la integral original. □

Intente resolver las integrales de los Ejemplos 1 y 2 mediante *Maple, Derive, Mathematica, Mathcad* o el *TI-92*. ¿Se obtienen las mismas primitivas que en esos dos ejemplos?

EJEMPLO 2 Reconocimiento del modelo f(g(x))g'(x)

Evaluar $\int 5\cos 5x\,dx$

Solución: Haciendo $g(x) = 5x$, se obtiene

$$g'(x) = 5$$

y

$$f(g(x)) = \cos[g(x)]$$

De ahí es fácil identificar el esquema $f(g(x))\,g'(x)$ en el integrando. Usando la regla de las potencias para la integración y el Teorema 4.12, se ve que

$$\int \overbrace{(\cos 5x)}^{\cos[g(x)]}\overbrace{(5)}^{g'(x)}\,dx = \text{sen}\,5x + C$$

Se puede comprobar este resultado derivando sen $5x + C$ para ver que se recupera el integrando original. □

Los integrandos de los Ejemplos 1 y 2 se ajustan exactamente al esquema $f(g(x))\, g'(x)$; no había más que reconocerlo. Se puede extender considerablemente esta técnica utilizando la regla del múltiplo constante

$$\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$$

Muchos integrandos contienen la parte esencial (la parte variable) pero les falta un múltiplo constante. En tales situaciones, hay que multiplicar y dividir por la constante deseada.

EJEMPLO 3 Multiplicar y dividir por una constante

Hallar $\int x(x^2 + 1)^2\, dx$.

Solución: Este integrando es similar al del Ejemplo 1, salvo que le falta un factor 2. Reconociendo que $2x$ es la derivada de $x^2 + 1$, podemos hacer $g(x) = x^2 + 1$ y conseguir el $2x$ así:

$$\int x(x^2 + 1)^2\, dx = \int (x^2 + 1)^2 \left(\frac{1}{2}\right) (2x)\, dx \qquad \text{Multiplicar y dividir por 2}$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2 + 1)^2 (2x)\, dx \qquad \text{Regla del múltiplo constante}$$

$$= \frac{1}{2}\int [g(x)]^2\, g'(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{[g(x)]^3}{3} + C \qquad \text{Integrar}$$

$$= \frac{1}{6}(x^2 + 1)^3 + C$$

□

Con un poco de práctica, no se suelen escribir tantos pasos. Por ejemplo, podría haberse escrito simplemente

$$\int x(x^2 + 1)^2\, dx = \frac{1}{2}\int (x^2 + 1)^2 (2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2 + 1)^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{6}(x^2 + 1)^3 + C$$

Nota. La regla del múltiplo constante sólo es válida para *constantes*. No es lícito multiplicar y dividir por una variable y entonces sacar esa variable fuera de la integral. Así,

$$\int (x^2 + 1)^2 \, dx \neq \frac{1}{2x}\int (x^2 + 1)^2 \, (2x) \, dx$$

Después de todo, si fuera legítimo sacar fuera del signo integral magnitudes variables, podríamos sacar todo el integrando. Pero, claro está, eso no da el resultado correcto.

Cambio de variables

Con un **cambio de variable**, reexpresamos por completo la integral en términos de u y du (o de cualquier otra variable que nos convenga). Aunque este método requiere más pasos explícitos que el reconocimiento de modelo ilustrado en los Ejemplos 1 y 2, no es menos cierto que sirve para resolver integrandos más complicados. El cambio de variable hace uso de la notación de Leibniz para la diferencial. Es decir, si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\, dx$, con lo que la integral del Teorema 4.12 adopta la forma

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x) \, dx = \int f(u) \, du = F(u) + C}$$

EJEMPLO 4 Cambio de variable

Hallar $\int \sqrt{2x - 1} \, dx$

Solución: En primer lugar, sea u la función del radical, $u = 2x - 1$. Su diferencial es $du = 2\, dx$. Ahora, sustituimos $\sqrt{2x - 1} = \sqrt{u}$ y $dx = du/2$, con lo que se obtiene

$$\int \sqrt{2x - 1} \, dx = \int \sqrt{u}\left(\frac{du}{2}\right) \qquad \text{Integral en términos de } u$$
$$= \frac{1}{2}\int u^{1/2} \, du$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{3/2}}{3/2}\right) + C \qquad \text{Primitiva en términos de } u$$
$$= \frac{1}{3}u^{3/2} + C$$
$$= \frac{1}{3}(2x - 1)^{3/2} + C \qquad \text{Primitiva en términos de } x$$

□

ADVERTENCIA Puesto que la integración es más difícil que la derivación, es recomendable comprobar siempre por derivación la respuesta a un problema de integración. Así, en el Ejemplo 4, derivando

$$\frac{1}{3}(2x - 1)^{3/2} + C$$

verificamos que se obtiene, como debe ser, el integrando original.

EJEMPLO 5 Cambio de variable

Hallar $\int x\sqrt{2x - 1} \, dx$

Solución: De nuevo tomamos $u = 2x - 1$, de donde $dx = du/2$. Como el integrando contiene un factor x, hemos de expresar x en términos de u:

$$u = 2x - 1 \quad \Longrightarrow \quad x = (u + 1)/2 \qquad \text{Expresar } x \text{ en términos de } u$$

Sustituyendo, se obtiene por fin

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{2x - 1}\, dx &= \int \left(\frac{u + 1}{2}\right) u^{1/2} \left(\frac{du}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\int (u^{3/2} + u^{1/2})\, du \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2}\right) + C \\
&= \frac{1}{10}(2x - 1)^{5/2} + \frac{1}{6}(2x - 1)^{3/2} + C
\end{aligned}$$

□

Para completar el cambio de variable en el Ejemplo 5, hemos tenido que despejar x en términos de u. Esta operación puede ser difícil en ocasiones. Afortunadamente no siempre es necesaria, como queda claro en el próximo ejemplo.

EJEMPLO 6 Cambio de variable

Hallar $\int \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x\, dx$

Solución: Como $\operatorname{sen}^2 3x = (\operatorname{sen} 3x)^2$, podemos tomar $u = \operatorname{sen} 3x$, con lo que

$$du = (\cos 3x)(3)\, dx$$

Ahora, puesto que $\cos 3x\, dx$ es parte de la integral dada, podemos escribir

$$\frac{du}{3} = \cos 3x\, dx$$

Sustituyendo u y $du/3$ en la integral dada obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x\, dx &= \int u^2 \frac{du}{3} \\
&= \frac{1}{3}\int u^2 du \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{u^3}{3}\right) + C \\
&= \frac{1}{9}\operatorname{sen}^3 3x + C
\end{aligned}$$

ADVERTENCIA Al efectuar un cambio de variable, debe expresarse la respuesta final en términos de la variable de partida. Así, en el Ejemplo 6 no debe dejarse como respuesta

$$\frac{1}{9}u^3 + C$$

sino que hay que regresar a la variable x inicial sustituyendo aquí $u = \operatorname{sen} 3x$.

Se puede verificar el resultado derivando:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{9}\operatorname{sen}^3 3x\right] = \left(\frac{1}{9}\right)(3)(\operatorname{sen} 3x)^2(\cos 3x)(3)$$
$$= \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x$$

Como la derivación reproduce el integrando original, estamos seguros de haber obtenido la primitiva correcta. □

Resumimos los pasos seguidos en la integración por sustitución.

Estrategia para el cambio de variable

1. Elegir una sustitución $u = g(x)$. En general, conviene elegir la parte interna de alguna función compuesta, tal como una cantidad elevada a una potencia.
2. Hallar $du = g'(x)\,dx$.
3. Reescribir la integral dada en términos de u.
4. Hallar la integral resultante en u.
5. Sustituir u por $g(x)$ para obtener la primitiva en términos de x.
6. Verificar la respuesta por derivación.

La regla general de las potencias para integrales

Una de las u-sustituciones más frecuentes ocurre con expresiones elevadas a una potencia, razón por la cual se le asigna un nombre específico: la **regla general de las potencias**. Su demostración se deduce directamente de la regla (simple) de las potencias para integrales, junto con el Teorema 4.13.

TEOREMA 4.13 LA REGLA GENERAL DE LAS POTENCIAS PARA INTEGRALES

Si g es una función derivable de x, entonces

$$\int [g(x)]^n g'(x)\,dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

Equivalentemente, si $u = g(x)$, entonces

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

EJEMPLO 7 Sustitución por la regla general de las potencias

a) $$\int 3(3x-1)^4\,dx = \int \overbrace{(3x-1)^4}^{u^4}\overbrace{(3)\,dx}^{du} = \overbrace{\frac{(3x-1)^5}{5}}^{u^5/5} + C$$

b) $$\int (2x+1)(x^2+x)\,dx = \int \overbrace{(x^2+x)^1}^{u^1}\overbrace{(2x+1)\,dx}^{du} = \overbrace{\frac{(x^2+x)^2}{2}}^{u^2/2} + C$$

c) $$\int 3x^2\sqrt{x^3-2}\,dx = \int \overbrace{(x^3-2)^{1/2}}^{u^{1/2}}\overbrace{(3x^2)\,dx}^{du} = \overbrace{\frac{(x^3-2)^{3/2}}{3/2}}^{u^{3/2}/(3/2)} + C$$

d) $$\int \frac{-4x}{(1-2x^2)^2}\,dx = \int \overbrace{(1-2x^2)^{-2}}^{u^{-2}}\overbrace{(-4x)\,dx}^{du} = \overbrace{\frac{(1-2x^2)^{-1}}{-1}}^{u^{-1}/(-1)} + C$$

e) $$\int \cos^2 x\,\text{sen}\,x\,dx = -\int \overbrace{(\cos x)^2}^{u^2}\overbrace{(-\text{sen}\,x)\,dx}^{du} = -\overbrace{\frac{(\cos x)^3}{3}}^{u^3/3} + C$$ □

EXPLORACIÓN

Si se le pidiera resolver alguna de estas integrales, ¿cuál elegiría? ¿Por qué?

a) $\int \sqrt{x^3+1}\,dx$ o

$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

b) $\int x[\text{tg}\,(x^2)\sec\,(x^2)]\,dx$ o

$\int x\,\text{tg}\,(x^2)\,dx$

Algunas integrales cuyos integrandos contienen una expresión elevada a una potencia no pueden ser resueltas por la regla general de las potencias. Consideremos las dos integrales

$$\int x(x^2+1)\,dx \quad \text{y} \quad \int (x^2+1)^2\,dx$$

La sustitución $u = x^2 + 1$ resuelve la primera, pero no la segunda (porque al integrando le falta el factor x necesario para du). Por fortuna, *esta integral particular* es factible desarrollando el integrando como $(x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$ y usando la regla (simple) de las potencias para integrar cada término.

Cambio de variables en integrales definidas

Cuando se utiliza cambio de variable en una integral definida, suele ser más conveniente determinar los límites de integración para la variable u que regresar con la primitiva hacia atrás a la variable x y evaluarla con los límites originales. Este tipo de cambio de variable se especifica en el próximo teorema, cuya demostración se deduce del Teorema 4.12 junto con el teorema fundamental del Cálculo.

TEOREMA 4.14 CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES DEFINIDAS

Si la función $u = g(x)$ tiene derivada continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y f es continua en el recorrido de g, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

EJEMPLO 8 Cambio de variables

Calcular $\int_0^1 x(x^2 + 1)^3\, dx$

Solución: Haciendo $u = x^2 + 1$ obtenemos

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x\, dx$$

Antes de sustituir, determinamos los nuevos límites de integración.

Límite inferior	*Límite superior*
Cuando $x = 0$, $u = 0^2 + 1 = 1$	Cuando $x = 1$, $u = 1^2 + 1 = 2$

Sustituyendo ya se obtiene

$$\int_0^1 x(x^2 + 1)^3\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 + 1)^3(2x)\, dx$$ Límites de integración para x

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 u^3\, du$$ Límites de integración para u

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{15}{8}$$

Inténtese convertir la primitiva $\frac{1}{2}(u^4/4)$ a la variable x y evaluar la integral con los límites originales. El resultado debe ser idéntico. □

EJEMPLO 9 Cambio de variables

Calcular $A = \int_1^7 \frac{x}{\sqrt{2x - 1}}\, dx$

Solución: Haciendo $u = \sqrt{2x - 1}$, obtenemos

$$u^2 = 2x - 1$$

$$u^2 + 1 = 2x$$

$$\frac{u^2 + 1}{2} = x$$

$$u\, du = dx$$ Derivar ambos lados

Antes de sustituir, hallamos los nuevos límites de integración.

Límite inferior	*Límite superior*
Cuando $x = 1$, $u = \sqrt{2 - 1} = 1$	Cuando $x = 5$, $u = \sqrt{10 - 1} = 3$

Sustituyendo ya se obtiene

$$\begin{aligned}\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x - 1}}\, dx &= \int_1^3 \frac{1}{u}\left(\frac{u^2 + 1}{2}\right) u\, du \\ &= \frac{1}{2}\int_1^3 (u^2 + 1)\, du \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3} + u\right]_1^3 \\ &= \frac{1}{2}\left(9 + 3 - \frac{1}{3} - 1\right) \\ &= \frac{16}{3}\end{aligned}$$

□

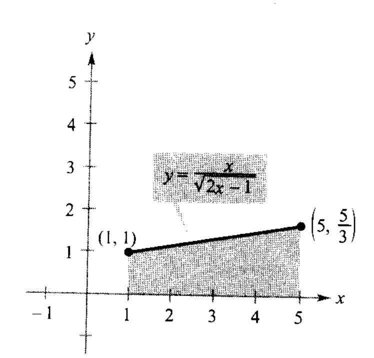


FIGURA 4.37

La región antes de la sustitución tiene un área de $\frac{16}{3}$.

Geométricamente, podemos interpretar la ecuación

$$\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x - 1}}\, dx = \int_1^3 \frac{u^2 + 1}{2}\, du$$

diciendo que las dos regiones de las Figuras 4.37 y 4.38 tienen la misma área.

Al calcular integrales definidas mediante una sustitución es posible que el límite superior de la variable u resulte menor que el límite inferior. Si tal cosa ocurre, no hay que reordenar los límites. Simplemente, se evalúa la integral de la forma usual. Por ejemplo, tras sustituir $u = \sqrt{1 - x}$ en la integral

$$\int_0^1 x^2(1 - x)^{1/2}\, dx$$

obtenemos $u = \sqrt{1 - 1} = 0$ cuando $x = 1$, y $u = \sqrt{1 - 0} = 1$ cuando $x = 0$. Así pues, la forma correcta en la variable u de esa integral es

$$-2\int_1^0 (1 - u^2)^2 u^2\, du$$

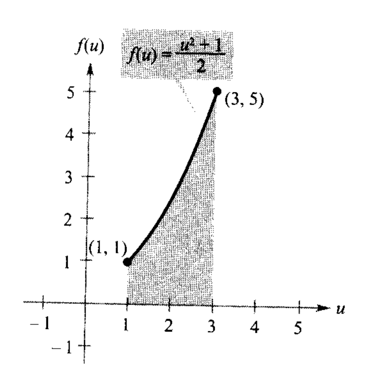


FIGURA 4.38

La región despues de la sustitución tiene un área de $\frac{16}{3}$.

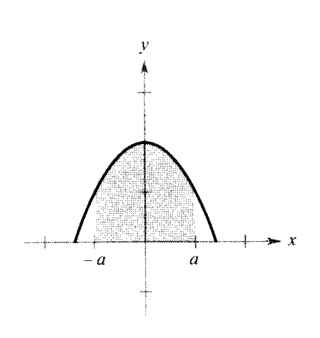
Integración de funciones pares e impares

Incluso con cambios de variable, una integral puede ser difícil. Ocasionalmente se puede simplificar el cálculo de una integral definida (sobre un intervalo simétrico respecto del origen) si el integrando es una función par o impar (véase Figura 4.39).

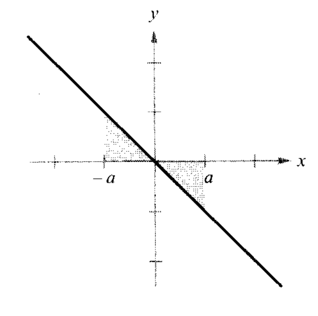
TEOREMA 4.15 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES PARES E IMPARES

Sea f integrable en el intervalo cerrado $[-a, a]$.

1. **Si f es una fución *par*,** $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} 2f(x)\,dx$
2. **Si f es una fución *impar*,** $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$



Función par



Función impar

FIGURA 3.39

Demostración Si f es par, entonces $f(x) = f(-x)$, luego usando el Teorema 4.12 con la sustitución $u = -x$ obtenemos

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-u)(-du) = -\int_{a}^{0} f(u)\,du = \int_{0}^{a} f(u)\,du = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Finalmente, del Teorema 4.6 se sigue que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$
$$= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Eso demuestra la primera propiedad. La segunda se demuestra de manera similar. □

EJEMPLO 10 Integración de una función impar

Calcular $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\text{sen}^3 x \cos x + \text{sen}\, x \cos x)\,dx$

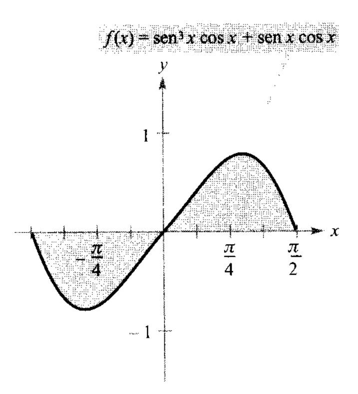


FIGURA 4.40

Como f es una función impar, $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,dx = 0$.

Solución: Llamando $f(x) = \text{sen}^3 x \cos x + \text{sen}\, x \cos x$ resulta ser

$$f(-x) = \text{sen}^3(-x) \cos(-x) + \text{sen}(-x) \cos(-x)$$
$$= -\text{sen}^3 x \cos x - \text{sen}\, x \cos x = -f(x)$$

Por tanto, f es una función impar. Puesto que $[-\pi/2, \pi/2]$ es un intervalo simétrico respecto al origen, el Teorema 4.15 nos lleva a la conclusión de que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\text{sen}^3 x \cos x + \text{sen}\, x \cos x)\,dx = 0$$ □

Nota. En la Figura 4.40 se ve que las dos regiones a los lados del eje y tienen la misma área. Sin embargo, al estar una de ellas por encima y la otra por debajo del eje x, la integración produce un efecto de cancelación (volveremos a este hecho en la Sección 6.1).

Ejercicios de la Sección 4.5

En los Ejercicios 1-6, completar la tabla identificando u y du para la integral.

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx \qquad u = g(x) \qquad du = g'(x)\,dx$$

1. $\int (5x^2+1)^2(10x)\,dx$

2. $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

3. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

4. $\int \sec 2x \operatorname{tg} 2x\,dx$

5. $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\,dx$

6. $\int \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

En los Ejercicios 7-26, hallar la integral indefinida y comprobar el resultado por derivación.

7. $\int (1+2x)^4(2)\,dx$

8. $\int (x^2-1)^3(2x)\,dx$

9. $\int \sqrt{9-x^2}\,(-2x)\,dx$

10. $\int (1-2x^2)^3(-4x)\,dx$

11. $\int x^2(x^3-1)^4\,dx$

12. $\int x(4x^2+3)^3\,dx$

13. $\int 5x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$

14. $\int u^3\sqrt{u^4+2}\,du$

15. $\int \dfrac{x^2}{(1+x^3)^2}\,dx$

16. $\int \dfrac{x^2}{(16-x^3)^2}\,dx$

17. $\int \left(1+\dfrac{1}{t}\right)^3\left(\dfrac{1}{t^2}\right)dt$

18. $\int \left[x^2+\dfrac{1}{(3x)^2}\right]dx$

19. $\int \dfrac{1}{\sqrt{2x}}\,dx$

20. $\int \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

21. $\int \dfrac{x^2+3x+7}{\sqrt{x}}\,dx$

22. $\int \dfrac{t+2t^2}{\sqrt{t}}\,dt$

23. $\int t^2\left(t-\dfrac{2}{t}\right)dt$

24. $\int \left(\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{1}{4t^2}\right)dt$

25. $\int (9-y)\sqrt{y}\,dy$

26. $\int 2\pi y(8-y^{3/2})\,dy$

En los Ejercicios 27-30, resolver la ecuación diferencial.

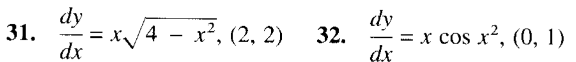
27. $\dfrac{dy}{dx} = 4x + \dfrac{4x}{\sqrt{16-x^2}}$

28. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{10x^2}{\sqrt{1+x^3}}$

29. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+1}{(x^2+2x-3)^2}$

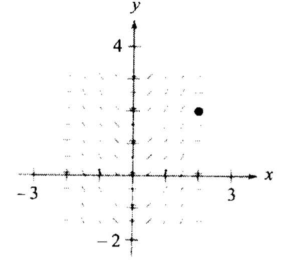
30. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+1}}$

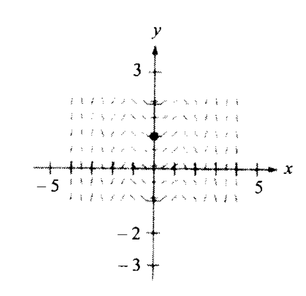
Campos de direcciones En los Ejercicios 31 y 32, se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo de direcciones. Un *campo de direcciones* consta de segmentos rectos, con pendientes fijadas por la ecuación diferencial, que ofrecen una visualización de las soluciones de la ecuación diferencial. *a*) Esbozar dos soluciones aproximadas de la ecuación sobre el campo de direcciones, una de las cuales pase por el punto especificado. *b*) Hallar, por integración, la solución particular de la ecuación diferencial y representarla en la calculadora. Comparar el resultado con los esbozos del apartado *a*).



31. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{4-x^2}$, $(2, 2)$

32. $\dfrac{dy}{dx} = x\cos x^2$, $(0, 1)$





En los Ejercicios 33-44, hallar la integral indefinida.

33. $\int \operatorname{sen} 2x\,dx$

34. $\int x \operatorname{sen} x^2\,dx$

35. $\int \dfrac{1}{\theta^2}\cos\dfrac{1}{\theta}\,d\theta$

36. $\int \cos 6x\,dx$

37. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 2x\,dx$

38. $\int \sec(1-x)\operatorname{tg}(1-x)\,dx$

39. $\int \operatorname{tg}^4 x \sec^2 x\,dx$

40. $\int \sqrt{\operatorname{ctg} x}\operatorname{cosec}^2 x\,dx$

41. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\operatorname{ctg}^3 x}\, dx$ **42.** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx$

43. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx$ **44.** $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{x}{2}\right) dx$

En los Ejercicios 45 y 46, hallar la función f que tiene la derivada indicada y cuya gráfica pase por el punto que se especifica.

Derivada	*Punto*
45. $f'(x) = \cos \dfrac{x}{2}$	$(0, 3)$
46. $f'(x) = \pi \sec \pi x \operatorname{tg} \pi x$	$\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$

En los Ejercicios 47-54, calcular la integral indefinida por el método del Ejemplo 5.

47. $\displaystyle\int x\sqrt{x + 2}\, dx$ **48.** $\displaystyle\int x\sqrt{2x + 1}\, dx$

49. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1 - x}\, dx$ **50.** $\displaystyle\int (x + 1)\sqrt{2 - x}\, dx$

51. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2x - 1}}\, dx$ **52.** $\displaystyle\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x + 3}}\, dx$

53. $\displaystyle\int \frac{-x}{(x + 1) - \sqrt{x + 1}}\, dx$ **54.** $\displaystyle\int t\sqrt[3]{t - 4}\, dt$

En los Ejercicios 55-64, calcular la integral definida. Comprobar el resultado con la calculadora.

55. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x(x^2 + 1)^3\, dx$ **56.** $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\, dx$

57. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}\, dx$ **58.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1 + 2x^2}}\, dx$

59. $\displaystyle\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2}\, dx$ **60.** $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt[3]{4 + x^2}\, dx$

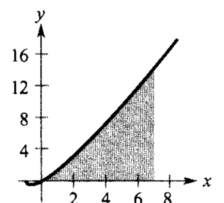
61. $\displaystyle\int_1^2 (x - 1)\sqrt{2 - x}\, dx$ **62.** $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2x + 1}}\, dx$

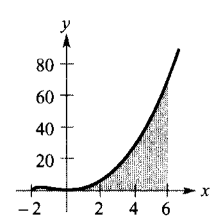
63. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos\left(\frac{2x}{3}\right) dx$ **64.** $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi/2} (x + \cos x)\, dx$

En los Ejercicios 65-70, hallar el área de la región. Verificar el resultado con la calculadora.



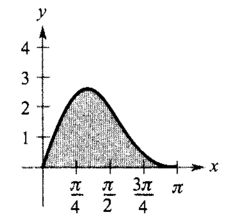
65. $\displaystyle\int_0^7 x\sqrt[3]{x + 1}\, dx$ **66.** $\displaystyle\int_{-2}^{6} x^2\, \sqrt[3]{x + 2}\, dx$

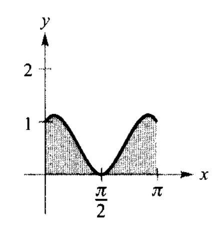




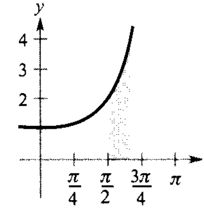


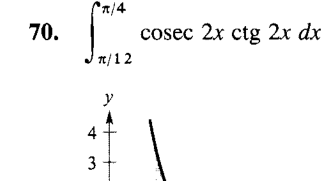
67. $y = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$ **68.** $y = \operatorname{sen} x + \cos 2x$

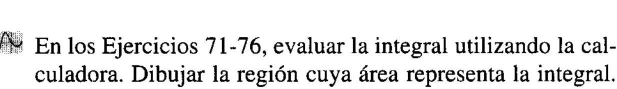




69. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$ **70.** $\displaystyle\int_{\pi/12}^{\pi/4} \operatorname{cosec} 2x \operatorname{ctg} 2x\, dx$







En los Ejercicios 71-76, evaluar la integral utilizando la calculadora. Dibujar la región cuya área representa la integral.

71. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2x + 1}}\, dx$ **72.** $\displaystyle\int_0^2 x^3\sqrt{x + 2}\, dx$

73. $\displaystyle\int_3^7 x\sqrt{x - 3}\, dx$ **74.** $\displaystyle\int_1^5 x^2\sqrt{x - 1}\, dx$

75. $\displaystyle\int_0^3 \left(\theta + \cos\frac{\theta}{6}\right) d\theta$ **76.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x\, dx$

Redacción En los Ejercicios 77 y 78, efectuar la integración de dos maneras y explicar cualquier diferencia que se observe en las respuestas.

77. $\displaystyle\int (2x - 1)^2\, dx$ **78.** $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx$

79. Usar $\int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3}$ para calcular las integrales definidas sin recurrir al teorema fundamental del Cálculo.

a) $\displaystyle\int_{-2}^{0} x^2\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2\,dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{2} -x^2\,dx$ *d)* $\displaystyle\int_{-2}^{0} 3x^2\,dx$

80. Usar la simetría de las gráficas del seno y del coseno como ayuda en el cálculo de las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \text{sen } x\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx$ *d)* $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{sen } x \cos x\,dx$

En los Ejercicios 81 y 82, expresar la integral como suma de dos integrales, la primera de una función impar y la segunda de una par. Con esta simplificación, calcular la integral.

81. $\displaystyle\int_{-4}^{4} (x^3 + 6x^2 - 2x - 3)\,dx$

82. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\text{sen } 3x + \cos 3x)\,dx$

83. ***Depreciación*** El ritmo de depreciación dV/dt de una máquina es inversamente proporcional al cuadrado de $t + 1$, siendo V el valor a los t años de su adquisición. Si el valor inicial era $500.000 y su valor decreció $100.000 en el primer año, estimar su valor los cuatro años después de su compra.

84. ***Flujo de fondos*** El ritmo de desembolso dQ/dt de una subvención estatal de 2 millones de dólares es proporcional al cuadrado de $100 - t$. El tiempo t se mide en días ($0 \leqslant t \leqslant 100$) y Q es la cantidad que resta por desembolsar. Calcular la cantidad que resta por desembolsar tras 50 días, suponiendo que el desembolso se realiza en 100 días.

85. ***Coste marginal*** El coste marginal para cierto artículo de consumo es

$$\frac{dC}{dx} = \frac{12}{\sqrt[3]{12x + 1}}$$

a) Hallar la función de coste si $C = 100$ cuando $x = 13$.
b) Representar esa función y la función coste marginal en una misma pantalla de la calculadora.

86. ***Reservas de gasolina*** El nivel mínimo de reservas de gasolina en EE.UU. puede aproximarse por el modelo

$$Q = 217 + 13 \cos \frac{\pi(t - 3)}{6}$$

donde Q se mide en millones de barriles y el tiempo t en meses, correspondiendo $t = 1$ a enero. Hallar el nivel mínimo medio dado por ese modelo durante
a) el primer trimestre ($0 \leqslant t \leqslant 3$),
b) el segundo cuatrimestre ($4 \leqslant t \leqslant 6$),
c) todo el año ($0 \leqslant t \leqslant 12$).

87. ***Ventas*** Las ventas de un producto de temporada vienen dadas por el modelo

$$S = 74{,}50 + 43{,}75 \text{ sen } \frac{\pi t}{6}$$

donde S se mide en miles de unidades y el tiempo t en meses, correspondiendo $t = 1$ a enero. Calcular la media de ventas en los siguientes períodos.
a) El primer trimestre ($0 \leqslant t \leqslant 3$).
b) El segundo cuatrimestre ($4 \leqslant t \leqslant 6$).
c) Todo el año ($0 \leqslant t \leqslant 12$).

88. ***Suministro de agua*** Un modelo para el suministro de agua de un manantial en un cierto día viene dado por

$$R(t) = 53 + 7 \text{ sen}\left(\frac{\pi t}{6} + 3{,}6\right) + 9 \cos\left(\frac{\pi t}{12} + 8{,}9\right)$$

donde $0 \leqslant t \leqslant 24$. R es el flujo en miles de galones por hora y t el tiempo en horas.
a) Representar en la calculadora la función y aproximar el flujo máximo.
b) Estimar el volumen total de agua suministrada en un día.

89. ***Electricidad*** La corriente alterna en un circuito eléctrico es

$$I = 2 \text{ sen } (60\pi t) + \cos (120\pi t)$$

donde I se mide en amperios y t en segundos. Calcular la corriente media para cada uno de estos intervalos de tiempo.

a) $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{60}$

b) $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{240}$

c) $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{30}$

90. *Análisis gráfico* Sean

$$f(x) = 6 \text{ sen } x \cos^2 x \quad \text{y} \quad g(t) = \int_0^t f(x)\,dx$$

a) Representar ambas funciones en una misma ventana de la calculadora.
b) Explicar por qué g es no negativa.
c) Identificar los puntos de la gráfica de g que corresponden a los extremos de f.
d) ¿Corresponden los ceros de f a extremos de g? Explicar la respuesta.
e) Representar en la calculadora la función ¿Qué relación hay entre g y h? Verificar la conjetura.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 91-96, determinar si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

91. $\displaystyle\int (2x+1)^2\,dx = \frac{1}{3}(2x+1)^3 + C$

92. $\displaystyle\int x(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{3}x^3 + x\right) + C$

93. $\displaystyle\int_{-10}^{10} (ax^3 + bx^2 + cx + d)\,dx = 2\int_0^{10} (bx^2 + d)\,dx$

94. $\displaystyle\int_a^b \text{sen } x\,dx = \int_a^{b+2\pi} \text{sen } x\,dx$

95. $\displaystyle 4\int \text{sen } x \cos x\,dx = -\cos 2x + C$

96. $\displaystyle\int \text{sen}^2\, 2x \cos 2x\,dx = \frac{1}{3}\text{sen}^3\, 2x + C$

97. Probar que si f es continua en toda la recta real,

$$\int_a^b f(x+h)\,dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x)\,dx$$

98. Sea f continua en $[0, b]$. Demostrar que

$$\int_0^b \frac{f(x)}{f(x) + f(b-x)}\,dx = \frac{b}{2}$$

Usar ese resultado para calcular

$$\int_0^1 \frac{\text{sen } x}{\text{sen}(1-x) + \text{sen } x}\,dx$$

4.6 Integración numérica

CONTENIDO ▪
La regla de los trapecios ▪
La regla de Simpson ▪
Análisis de errores ▪

La regla de los trapecios

Algunas funciones elementales no tienen primitivas elementales. Sin ir más lejos, ninguna función elemental tiene como derivada a estas funciones:

$$\sqrt[3]{x}\sqrt{1-x},\ \sqrt{x}\cos x,\ \frac{\cos x}{x},\ \sqrt{1-x^3},\ \text{sen } x^2$$

Si se ha de calcular una integral definida cuyo integrando no admite primitiva elemental, el teorema fundamental del Cálculo no es útil y hay que recurrir a métodos aproximados. Dos de ellos se describen en esta sección.

Una forma de aproximar el valor de una integral definida es usar n trapecios, como muestra la Figura 4.41. En este método se supone que f es continua y positiva en $[a, b]$, de manera que la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

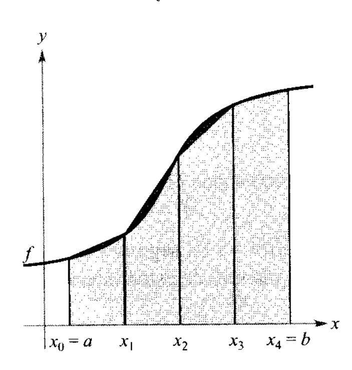


FIGURA 4.41
El área de la región se puede aproximar con cuatro trapecios.

representa el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje x, entre $x = a$ y $x = b$. En primer lugar, partimos $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de anchura $\Delta x = (b-a)/n$, tales que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

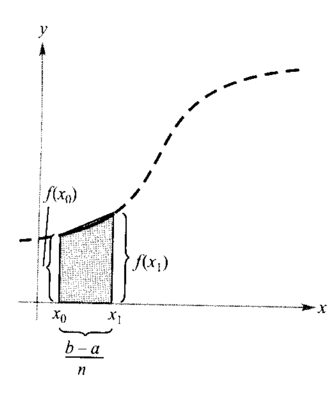


FIGURA 4.42
El área del primer trapecio es

$$\left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\right]\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

A continuación, formamos un trapecio sobre cada subintervalo, como indica la Figura 4.42. El área del i-ésimo trapecio es

$$\text{Area del } i\text{-ésimo trapecio} = \left[\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right]\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Por tanto, la suma de las áreas de los n trapecios es

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \cdots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right]\\
&= \left(\frac{b-a}{2n}\right)[f(x_0)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})+f(x_n)]\\
&= \left(\frac{b-a}{2n}\right)[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]
\end{aligned}$$

Haciendo $\Delta x = (b-a)/n$, podemos tomar el límite para $n \to \infty$, con lo que resulta

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{2n}\right)[f(x_0)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]\\
&\quad= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{[f(a)-f(b)]\,\Delta x}{2} + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right]\\
&\quad= \lim_{n\to\infty}\frac{[f(a)-f(b)](b-a)}{2n} + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\\
&\quad= 0 + \int_a^b f(x)\,dx
\end{aligned}$$

El resultado se recoge en el próximo teorema.

TEOREMA 4.16 LA REGLA DE LOS TRAPECIOS

Sea f continua en $[a, b]$. La regla de los trapecios para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ viene dada por

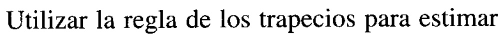
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

Además, cuando $n \to \infty$ el miembro de la derecha tiende a $\int_a^b f(x)\,dx$

Nota. Los coeficientes de la regla de los trapecios siguen este esquema

$$1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad \cdots \quad 2 \quad 2 \quad 1$$

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla de los trapecios



Utilizar la regla de los trapecios para estimar



$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$$

Comparar los resultados para $n = 4$ y $n = 8$ (Figura 4.43).

Solución: Cuando $n = 4$, $\Delta x = \pi/4$, de manera que

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx \approx \frac{\pi}{8}\left(\operatorname{sen} 0 + 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\pi\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}(0 + \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} + 0) = \frac{\pi(1 + \sqrt{2})}{4} \approx 1{,}896$$

Cuando $n = 8$, $\Delta x = \pi/8$, y por consiguiente

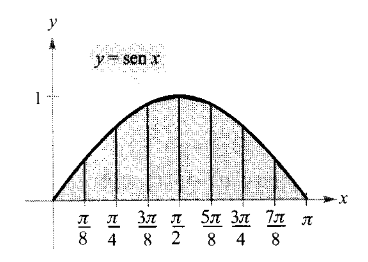
$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx \approx \frac{\pi}{16}\left(\operatorname{sen} 0 + 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} + 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + 2 \operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} + 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \right.$$

$$\left. + 2 \operatorname{sen}\frac{5\pi}{8} + 2 \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + 2 \operatorname{sen}\frac{7\pi}{8} + \operatorname{sen}\pi\right)$$

$$= \frac{\pi}{16}\left(2 + 2\sqrt{2} + 4 \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} + 4 \operatorname{sen}\frac{3\pi}{8}\right) \approx 1{,}974$$

Para esta integral particular, podríamos haber hallado una primitiva y concluir que el área exacta es 2. □

Cuatro subintervalos



Ocho subintervalos

FIGURA 4.43
Aproximaciones por trapecios.

> Hay muchos programas informáticos que permiten aproximar el valor de una integral definida. Utilícese alguno de ellos para resolver el Ejemplo 1. ¿Cómo es de precisa la aproximación que se obtiene?
>
> Al usar uno de esos programas, deben tenerse en cuenta sus limitaciones. A menudo, no dan indicación de la precisión de la aproximación. Otras veces, pueden proporcionar una estimación completamente falsa. Así, si se intenta evaluar con ellos
>
> $$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x}\, dx$$
>
> la calculadora debiera emitir un mensaje de error. ¿Ocurre así en la suya?

Es interesante comparar la regla de los trapecios con la del punto medio, expuesta en la Sección 4.2 (Ejercicios 51-54). En la primera promediamos la función en los puntos terminales de los subintervalos, mientras que en la segunda se toman los valores de la función en los puntos medios de cada subintervalo.

Nota. Hay dos aspectos importantes en la regla de los trapecios (o en la del punto medio). En primer lugar, la aproximación tiende a mejorar conforme n crece. Así, en el Ejemplo 1, la regla de los trapecios con $n = 16$ da 1,994. En segundo lugar, aunque se podría haber usado el teorema fundamental del Cálculo para calcular la integral del Ejemplo 1, ese teorema no sería aplicable a una integral tan simple como

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x^2 \, dx$$

ya que sen x^2 no admite primitiva elemental. A pesar de lo cual, la regla de los trapecios sería utilizable también en ese caso.

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \Delta x \qquad \text{Regla del punto medio}$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}\right) \Delta x \qquad \text{Regla de los trapecios}$$

La regla de Simpson

En la regla de los trapecios se aproxima f en cada subintervalo por un polinomio de grado 1. En la regla de Simpson, así llamada en honor del matemático inglés Thomas Simpson (1710-1761), se avanza un paso más, aproximando por un polinomio de grado 2.

Antes de presentar la regla de Simpson, enunciamos un teorema que enseña a evaluar integrales de polinomios de grado 2.

TEOREMA 4.17 INTEGRAL DE $p(x) = Ax^2 + Bx + C$

Si $p(x) = Ax^2 + Bx + C$, entonces

$$\int_a^b p(x)\, dx = \left(\frac{b-a}{6}\right)\left[p(a) + 4p\left(\frac{a+b}{2}\right) + p(b)\right]$$

Demostración

$$\begin{aligned}\int_a^b p(x)\, dx &= \int_a^b (Ax^2 + Bx + C)\, dx \\ &= \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_a^b \\ &= \frac{A(b^3 - a^3)}{3} + \frac{B(b^2 - a^2)}{2} + C(b-a) \\ &= \left(\frac{b-a}{6}\right)[2A(a^2 + ab + b^2) + 3B(b+a) + 6C]\end{aligned}$$

Desarrollando y agrupando términos, la expresión entre corchetes se convierte en

$$\underbrace{(Aa^2 + Ba + C)}_{p(a)} + \underbrace{4\left[A\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 + B\left(\frac{b+a}{2}\right) + C\right]}_{4p\left(\frac{a+b}{2}\right)} + \underbrace{(Ab^2 + Bb + C)}_{p(b)}$$

y podemos escribir

$$\int_a^b p(x)\, dx = \left(\frac{b-a}{6}\right)\left[p(a) + 4p\left(\frac{a+b}{2}\right) + p(b)\right] \qquad \square$$

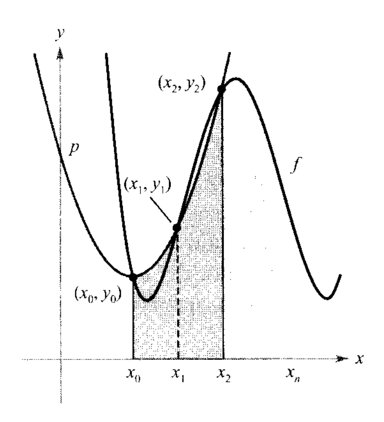


FIGURA 4.44
$\int_{x_0}^{x_2} p(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx.$

En la regla de Simpson partimos de nuevo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de anchura $\Delta x = (b - a)/n$, pero esta vez exigimos que n sea par y agrupamos los subintervalos por parejas:

$$a = \underbrace{x_0 < x_1 < x_2}_{[x_0,\, x_2]} < \underbrace{x_3 < x_4}_{[x_2,\, x_4]} < \cdots < \underbrace{x_{n-2} < x_{n-1} < x_n}_{[x_{n-2},\, x_n]} = b$$

En cada subintervalo doble $[x_{i-2}, x_i]$ aproximamos f por un polinomio p de grado menor o igual a 2. Por ejemplo, en $[x_0, x_2]$ escogemos el polinomio de grado mínimo que pase por los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2), como muestra la Figura 4.44. Usando ahora p como aproximación de f en ese subintervalo, se tiene, por el Teorema 4.17,

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p(x)\,dx &= \frac{x_2 - x_0}{6}\left[p(x_0) + 4p\left(\frac{x_0 + x_2}{2}\right) + p(x_2)\right]\\ &= \frac{2[(b - a)/n]}{6}[p(x_0) + 4p(x_1) + p(x_2)]\\ &= \frac{b - a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]\end{aligned}$$

Repitiendo este proceso en todo el intervalo $[a, b]$, se llega al siguiente resultado.

TEOREMA 4.18 LA REGLA DE SIMPSON (*n* es par)

Sea f continua en $[a, b]$. La regla de Simpson para aproximar

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b - a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Además, cuando $n \to \infty$, el miembro de la derecha tiende a $\int_a^b f(x)\,dx$

Nota. Los coeficientes de la regla de Simpson siguen el esquema

1 4 2 4 2 4 ⋯ 4 2 4 1

En el Ejemplo 1, se estimó mediante la regla de los trapecios. Ahora aplicaremos la de Simpson con el mismo fin.

EJEMPLO 2 Aplicación de la regla de Simpson

Nota. En el Ejemplo 1, la regla de los trapecios con $n = 8$ daba 1,974 como valor aproximado de $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$. En el Ejemplo 2, la regla de Simpson con $n = 8$ da 2,0003. La primitiva produciría el valor exacto 2.

Utilizando la regla de Simpson para estimar

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$$

Comparar los resultados para $n = 4$ y $n = 8$.

Solución: Para $n = 4$ es

$$\int_0^{\pi} \text{sen } x\, dx = \frac{\pi}{12}\left(\text{sen } 0 + 4 \text{ sen } \frac{\pi}{4} + 2 \text{ sen } \frac{\pi}{2} + 4 \text{ sen } \frac{3\pi}{4} + \text{sen } \pi\right) \approx 2{,}005$$

Y para $n = 8$, se obtiene $\int_0^{\pi} \text{sen } x\, dx \approx 2{,}0003.$ □

Análisis de errores

Cuando se utiliza una técnica de cálculo aproximado es muy importante tener idea de la precisión del resultado. El próximo teorema, que enunciamos sin demostración, proporciona fórmulas para estimar los errores cometidos en la regla de Simpson y en la de los trapecios.

TEOREMA 4.19 ERRORES EN LA REGLA DE LOS TRAPECIOS Y EN LA REGLA DE SIMPSON

Si f tiene derivada segunda continua en $[a, b]$, el error E al aproximar $\int_a^b f(x)\, dx$ por la regla de los trapecios es

$$E \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}[\text{máx } |f''(x)|], \quad a \leqslant x \leqslant b \qquad \text{Regla de los trapecios}$$

Si f tiene derivada cuarta continua en $[a, b]$ el error E al aproximar $\int_a^b f(x)\, dx$ por la regla de Simpson es

$$E \leqslant \frac{(b-a)^5}{180n^4}[\text{máx } |f^{(4)}(x)|], \quad a \leqslant x \leqslant b \qquad \text{Regla de Simpson}$$

Si dispone de un programa de integración simbólica, calcule con él la integral del Ejemplo 3. Debe obtener un valor

$$\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx = \frac{1}{2}[\sqrt{2} + \ln (1 + \sqrt{2})] \approx 1{,}14779$$

(«ln» es la función logaritmo natural, que se estudiará en la Sección 5.1).

El teorema establece cotas de error que dependen de los valores extremos de $f''(x)$ y de $f^{(4)}(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Además, esos errores pueden hacerse arbitrariamente pequeños *haciendo crecer n*, supuesto que f'' y $f^{(4)}$ sean continuas, y por tanto acotadas, en $[a, b]$.

EJEMPLO 3 El error aproximado en la regla de los trapecios

Determinar un valor de n para el que la regla de los trapecios aproxime el valor de $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx$ con error menor que 0,01.

Solución: Hacemos $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ y hallamos la segunda derivada de f.

$$f' = x(1 + x^2)^{-1/2} \text{ y } f'' = (1 + x^2)^{-3/2}$$

El valor máximo de $f''(x)$ en el intervalo $[0, 1]$ es $|f''(0)| = 1$. Así pues, el Teorema 4.19 permite concluir que

$$E \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}|f''(0)| \leqslant \frac{1}{12n^2}(1) = \frac{1}{12n^2}$$

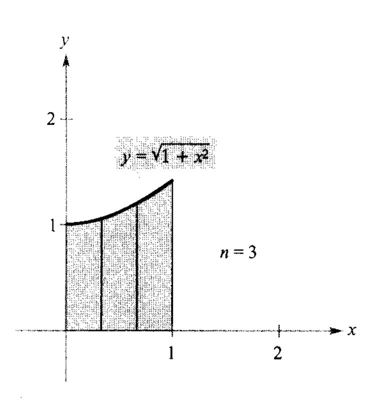


FIGURA 4.45
$1{,}144 \leqslant \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \leqslant 1{,}164.$

Para lograr $E < 0{,}01$, hemos de tomar n tal que $1/(12n^2) \leqslant 1/100$.

$$100 \leqslant 12n^2 \quad \Rightarrow \quad n \geqslant \sqrt{\frac{100}{12}} \approx 2{,}89$$

En consecuencia, basta tomar $n = 3$ (porque n ha de ser mayor o igual que 2,89) y aplicar la regla de los trapecios, como muestra la Figura 4.45, para obtener

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \approx \frac{1}{6}\left[\sqrt{1+0^2} + 2\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2} + 2\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2} + \sqrt{1+1^2}\right]$$
$$= 1{,}154$$

Por tanto, con un error menor que 0,01 sabemos que

$$1{,}144 \leqslant \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \leqslant 1{,}164 \qquad \square$$

Ejercicios de la Sección 4.6

En los Ejercicios 1-10, aproximar el valor de la integral para el n que se especifica, usando la regla de los trapecios y la regla de Simpson. Redondear la respuesta a cuatro decimales y comparar los resultados con el valor exacto de la integral.

1. $\int_0^2 x^2\,dx\ ,\ n = 4$

2. $\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + 1\right) dx,\ n = 4$

3. $\int_0^2 x^3\,dx,\ n = 4$

4. $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx,\ n = 4$

5. $\int_0^2 x^3\,dx,\ n = 8$

6. $\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx,\ n = 8$

7. $\int_4^9 \sqrt{x}\,dx,\ n = 8$

8. $\int_1^3 (4 - x^2)\,dx,\ n = 4$

9. $\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx,\ n = 4$

10. $\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx,\ n = 4$

En los Ejercicios 11-20, aproximar el valor de la integral, usando la regla de los trapecios y la regla de Simpson, con $n = 4$. Comparar los resultados con los valores aproximados que da una calculadora.

11. $\int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx$

12. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

13. $\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1-x}\,dx$

14. $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{x}\ \text{sen}\ x\,dx$

15. $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \cos x^2\,dx$

16. $\int_0^{\sqrt{\pi/4}} \text{tg}\ x^2\,dx$

17. $\int_1^{1,1} \text{sen}\ x^2\,dx$

18. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$

19. $\int_0^{\pi/4} x\ \text{tg}\ x\,dx$

20. $\int_0^{\pi} f(x)\,dx,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\ x}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

En los Ejercicios 21 y 22, aplicar las fórmulas de error del Teorema 4.19 para estimar el máximo error posible al aproximar la integral, con $n = 4$, mediante la regla *a*) de los trapecios, *b*) de Simpson.

21. $\int_0^2 x^3\,dx$

22. $\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$

En los Ejercicios 23 y 24, aplicar las fórmulas de error del Teorema 4.19 para hallar un n tal que el error cometido al aproximar la integral sea menor que 0,00001, usando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.

23. $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$

24. $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$

En los Ejercicios 25-28, usar cálculo simbólico en la calculadora y las fórmulas de error para encontrar n de manera tal que el error en la aproximación de la integral sea menor que 0,00001 al usar la regla *a*) de los trapecios, *b*) de Simpson.

25. $\int_0^2 \sqrt{1 + x}\, dx$ **26.** $\int_0^2 (x + 1)^{2/3}\, dx$

27. $\int_0^1 \operatorname{tg} x^2\, dx$ **28.** $\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\, dx$

29. Demostrar que la regla de Simpson es exacta cuando se usa para aproximar la integral de un polinomio cúbico. Verificar el resultado para

$$\int_0^1 x^3\, dx,\ n = 2$$

30. Escribir un programa para aproximar integrales definidas mediante la regla de los trapecios y la regla de Simpson. Partir del programa escrito en la Sección 4.3, Ejercicios 35-38, y observar que la regla de los trapecios se puede expresar como

$$T(n) = \frac{1}{2}[L(n) + R(n)]$$

y la de Simpson como

$$S(n) = \frac{1}{3}[T(n/2) + 2M(n/2)]$$

[Recordemos que $L(n)$, $M(n)$ y $R(n)$ denotan las sumas de Riemann construidas con los puntos terminal izquierdo, medio y terminal derecho de subintervalos de igual anchura.]

En los Ejercicios 31-34, usar el programa del Ejercicio 30 para aproximar la integral y completar la tabla.

x	$L(n)$	$M(n)$	$R(n)$	$T(n)$	$S(n)$
4					
8					
10					
12					
16					
20					

31. $\int_0^4 \sqrt{2 + 3x^2}\, dx$ **32.** $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$

33. $\int_0^4 \operatorname{sen} \sqrt{x}\, dx$ **34.** $\int_1^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$

35. ***Área*** Usar la regla de Simpson con $n = 14$ para aproximar el área de la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x} \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x\ \pi/2$.

36. ***Longitud de una elipse*** La **integral elíptica**

$$8\sqrt{3} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{2}{3} \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta$$

da la longitud de una elipse. Usar la regla de Simpson, con $n = 8$, para aproximar su valor.

37. ***Trabajo*** Una empresa desea conocer el trabajo necesario para mover linealmente 5 pies un objeto mediante una prensa. La fuerza F requerida, en libras, es

$$F(x) = 100x\sqrt{125 - x^3}$$

donde x da la posición en pies. Aproximar, utilizando la regla de Simpson, con $n = 12$, el trabajo W (en libras-pies) efectuado en un ciclo, que viene dado por

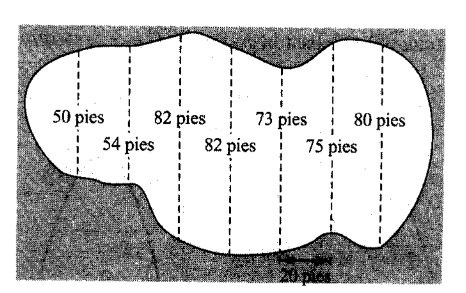
$$W = \int_0^5 F(x)\, dx$$

38. ***Aproximación de*** π Usar la regla de Simpson, con $n = 6$, para aproximar π usando la ecuación

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1 + x^2}\, dx$$

(En la Sección 5.9 veremos cómo se puede calcular esta integral gracias a la función inversa de la tangente.)

39. ***Área*** Para estimar la superficie de un estanque se han realizado las medidas que muestra la figura. Estimar esa superficie mediante *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.



40. La tabla recoge varias medidas tomadas en un experimento sobre una función deconocida $y = f(x)$. Aproximar la integral usando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.

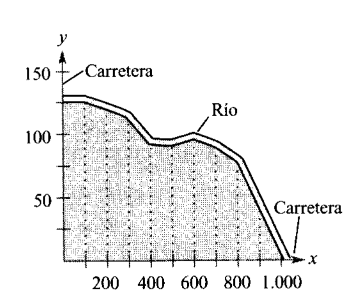
x	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
y	4,32	4,36	4,58	5,79	6,14

x	1,25	1,50	1,75	2,00
y	7,25	7,64	8,08	8,14

Área En los Ejercicios 41 y 42, estimar con la regla de los trapecios el número de metros cuadrados de tierra en un campo como el de la figura, con x e y medidos en metros. El campo está acotado por un río y dos caminos rectos perpendiculares.

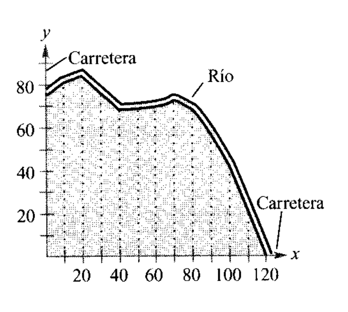
41.

x	y
0	125
100	125
200	120
300	112
400	90
500	90
600	95
700	88
800	75
900	35
1.000	0



42.

x	y
0	75
10	81
20	84
30	76
40	67
50	68
60	69
70	72
80	68
90	56
100	42
110	23
120	0



43. Utilizar la regla de Simpson con $n = 10$ y una calculadora dotada de cálculo simbólico para aproximar t en la ecuación integral

$$\int_0^t \operatorname{sen} \sqrt{x}\, dx = 2$$

44. Determinar si la regla de los trapecios aproxima por exceso o por defecto una integral definida, supuesto que la gráfica del integrando es cóncava *a*) hacia arriba, *b*) hacia abajo.

45. Sea $L(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ para todo $x > 0$.

a) Calcular $L(1)$.

b) Hallar $L'(x)$ y $L'(1)$.

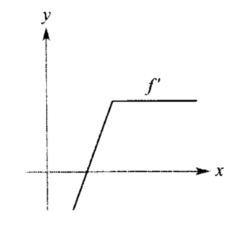
c) Aproximar, con la regla de los trapecios, el valor de x (con tres decimales) para el cual $L(x) = 1$.

d) Demostrar que $L(x_1x_2) = L(x_1) + L(x_2)$, para $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$.

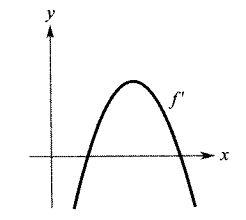
Ejercicios de repaso del Capítulo 4

En los Ejercicios 1 y 2, usar la gráfica de f' *para esbozar la de* f.

1.



2.



En los Ejercicios 3-8, hallar la integral indefinida.

3. $\displaystyle\int (2x^2 + x - 1)\, dx$

4. $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt[3]{3x}}\, dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 1}{x^2}\, dx$

6. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2}\, dx$

7. $\displaystyle\int (4x - 3 \operatorname{sen} x)\, dx$

8. $\displaystyle\int (5 \cos x - 2 \sec^2 x)\, dx$

9. Hallar la solución particular de la ecuación diferencial $f'(x) = -2x$ cuya gráfica pasa por el punto $(-1, 1)$.

10. Hallar la solución particular de la ecuación diferencial $f''(x) = 6(x - 1)$ cuya gráfica pasa por el punto $(2, 1)$ y es tangente en ese punto a la recta $3x - y - 5 = 0$.

11. ***Velocidad y aceleración*** Un avión recorre 3.600 pies por la pista antes de despegar. Si parte del reposo, lleva aceleración constante y hace ese recorrido en 30 segundos, ¿cuál es su velocidad en el momento del despegue?

12. ***Velocidad y aceleración*** La velocidad de un automóvil, que viaja por una carretera recta, se reduce de 45 a 30 millas/h en una distancia de 264 pies. Calcular la distancia recorrida si hubiera hecho esa reducción con deceleración constante.

13. ***Velocidad y aceleración*** Se lanza verticalmente hacia arriba una bola desde el suelo con 96 pies/s de velocidad inicial.
   a) ¿Cuánto tarda en llegar a su máxima altura?
   b) ¿Cuál es esa máxima altura?
   c) ¿Cuándo es su velocidad la mitad de la inicial?
   d) ¿Cuál es la altura en ese instante?

14. ***Velocidad y aceleración*** Rehacer el Ejercicio 13 para una velocidad inicial de 40 m/s.

15. Escribir en notación sigma *a)* la suma de los diez primeros enteros impares positivos, *b)* la suma de los cubos de los n primeros enteros positivos, y *c)* $6 + 10 + 14 + 18 + \cdots + 42$.

16. Calcular cada una de estas sumas para $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5$, $x_4 = 3$, y $x_5 = 7$
   a) $\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i$ *b)* $\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i}$
   c) $\sum_{i=1}^{5} (2x_i - x_i^2)$ *d)* $\sum_{i=2}^{5} (x_i - x_{i-1})$

17. Consideremos la región limitada por $y = mx$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = b$. Hallar:
   a) Las sumas inferiores y superiores para aproximar su área cuando $\Delta x = b/4$.
   b) Las sumas inferiores y superiores para aproximar su área cuando $\Delta x = b/n$.
   c) El área de la región, haciendo tender n a infinito en las sumas del apartado *b)*. Probar que se obtiene en cada caso la fórmula para el área de un triángulo.
   d) El área de la región, usando el teorema fundamental del Cálculo.

18. *a)* Calcular el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$, y $x = 3$, usando la definición como límite.
   b) Calcular esa misma área usando el teorema fundamental del Cálculo.

En los Ejercicios 19 y 20, usar los valores dados para hallar el valor de cada integral definida.

19. Si $\int_2^6 f(x)\,dx = 10$ y $\int_2^6 g(x)\,dx = 3$, calcular
   a) $\int_2^6 [f(x) + g(x)]\,dx$ *b)* $\int_2^6 [f(x) - g(x)]\,dx$
   c) $\int_2^6 [2f(x) - 3g(x)]\,dx$ *d)* $\int_2^6 5f(x)\,dx$

20. Si $\int_0^3 f(x)\,dx = 4$ y $\int_3^6 f(x)\,dx = -1$, calcular
   a) $\int_0^6 f(x)\,dx$ *b)* $\int_6^3 f(x)\,dx$
   c) $\int_4^4 f(x)\,dx$ *d)* $\int_3^6 -10f(x)\,dx$

En los Ejercicios 21-34, calcular la integral definida.

21. $\int (x^2 + 1)^3\,dx$
22. $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$
23. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 3}}\,dx$
24. $\int x^2\sqrt{x^3 + 3}\,dx$
25. $\int x(1 - 3x^2)^4\,dx$
26. $\int \frac{x + 3}{(x^2 + 6x - 5)^2}\,dx$
27. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\,dx$
28. $\int x \operatorname{sen} 3x^2\,dx$
29. $\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1 - \cos\theta}}\,d\theta$
30. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx$
31. $\int \operatorname{tg}^n x \sec^2 x\,dx,\ n \neq -1$
32. $\int \sec 2x \operatorname{tg} 2x\,dx$
33. $\int (1 + \sec \pi x)^2 \sec \pi x \operatorname{tg} \pi x\,dx$
34. $\int \operatorname{ctg}^4 \alpha \operatorname{cosec}^2 \alpha\,d\alpha$

En los Ejercicios 35-46, usar el teorema fundamental del Cálculo para evaluar la integral y una calculadora para verificar el resultado.

35. $\int_0^4 (2 + x)\,dx$
36. $\int_{-1}^1 (t^2 + 2)\,dt$
37. $\int_{-1}^1 (4t^3 - 2t)\,dt$
38. $\int_3^6 \frac{x}{3\sqrt{x^2 - 8}}\,dx$
39. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1 + x}}\,dx$
40. $\int_0^1 x^2(x^3 + 1)^3\,dx$

41. $\int_4^9 x\sqrt{x}\,dx$ **42.** $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx$

43. $2\pi\int_0^1 (y + 1)\sqrt{1 - y}\,dy$ **44.** $2\pi\int_{-1}^0 x^2\sqrt{x + 1}\,dx$

45. $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\,dx$ **46.** $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{sen} 2x\,dx$

En los Ejercicios 47-52, dibujar la región cuya área representa la integral y calcularla.

47. $\int_1^3 (2x - 1)\,dx$ **48.** $\int_0^2 (x + 4)\,dx$

49. $\int_3^4 (x^2 - 9)\,dx$ **50.** $\int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2)\,dx$

51. $\int_0^1 (x - x^3)\,dx$ **52.** $\int_0^1 \sqrt{x}(1 - x)\,dx$

En los Ejercicios 53-56, dibujar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones y calcular su área.

53. $y = \frac{4}{\sqrt{x + 1}}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 8$

54. $y = x$, $y = x^5$

55. $y = \sec^2 x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$

56. $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$

En los Ejercicios 57-60, calcular el valor medio de la función en el intervalo que se especifica. Calcular los valores de x en los que la función tiene como valor ese valor medio y representar su gráfica.

	Función	*Intervalo*
57.	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$	[5, 10]
58.	$f(x) = x^3$	[0, 2]
50.	$f(x) = x$	[0, 4]
60.	$f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$	[1, 2]

En los Ejercicios 61 y 62, usar la regla de los trapecios y la de Simpson, con $n = 4$, y la integración en una calculadora para aproximar la integral definida. Comparar los diversos resultados.

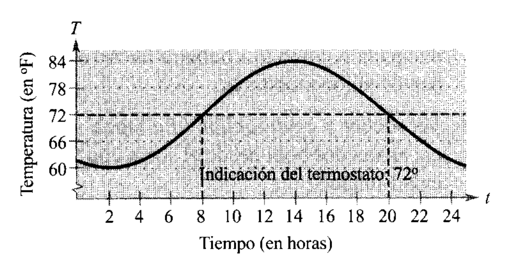
61. $\int_1^2 \frac{1}{1 + x^3}\,dx$ **62.** $\int_0^1 \frac{x^{3/2}}{3 - x^2}\,dx$

63. ***Coste del aire acondicionado*** La temperatura en grados Fahrenheit es $T = 72 + 12 \operatorname{sen}[\pi(t - 8)/12]$, donde t es el tiempo en horas, y $t = 0$ corresponde a la medianoche. Supongamos que el coste de enfriar una casa es, por cada hora, de $0,10 por grado.

a) Calcular el coste al enfriar la casa si se coloca el termostato en 72 °F, calculando la integral

$$C = 0{,}1\int_8^{20} \left[72 + 12 \operatorname{sen}\frac{\pi(t - 8)}{12} - 72\right] dt$$

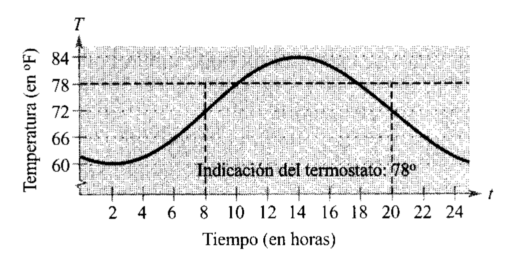
(Véase figura.)



b) Evaluar el ahorro conseguido si se coloca el termostato en 78 °F, calculando la integral

$$C = 0{,}1\int_{10}^{18} \left[72 + 12 \operatorname{sen}\frac{\pi(t - 8)}{12} - 78\right] dt$$

(Véase figura.)



64. ***Programa de producción*** Un fabricante de fertilizantes estima que las ventas siguen el esquema estacional dado por

$$F = 100.000\left[1 + \operatorname{sen}\frac{2\pi(t - 60)}{365}\right]$$

donde F se mide en libras y t en días ($t = 1$ corresponde al 1 de enero). Desea establecer un programa de producción constante cada día. ¿Cuál debe ser esa producción diaria?

65. ***Ciclo respiratorio*** Para una persona en reposo, el ritmo de inspiración de aire v, en litros/s, durante un ciclo respiratorio, es

$$v = 0{,}85 \operatorname{sen}\frac{\pi t}{3}$$

donde t es el tiempo en segundos. Calcular el volumen, de aire en litros, inhalado en un ciclo, integrando la función sobre el intervalo [0, 3].

66. ***Ciclo respiratorio*** Tras unos minutos de ejercicio, el ritmo de inspiración de aire v, en litros/s, durante un ciclo respiratorio de una persona, es

$$v = 1{,}75 \text{ sen } \frac{\pi t}{3}$$

donde t es el tiempo en segundos. Calcular el volumen de aire, en litros, inhalado en un ciclo, integrando la función sobre el intervalo [0, 2]. ¿Cuánto aumenta la capacidad pulmonar de una persona a causa del ejercicio físico? (Comparar la respuesta con la del Ejercicio 65.)

67. La gasolina está aumentando de precio según la ecuación

$$p = 1{,}20 + 0{,}04t$$

donde p es el precio en dólares por galón y $t = 0$ representa el año 1990. Si un automóvil recorre 15.000 millas al año y hace M millas por galón, el coste anual de combustible es

$$C = \frac{15.000}{M} \int_t^{t+1} p \, ds$$

Estimar el coste anual para los años *a*) 2000 y *b*) 2005.

Probabilidad En los Ejercicios 68 y 69, la función

$$f(x) = kx^n(1 - x)^m, \; 0 \leqslant x \leqslant 1$$

donde $n > 0$, $m > 0$ y k es una constante, se puede usar para representar varias distribuciones de probabilidad. Si k se toma tal que

$$\int_0^1 f(x) \, dx = 1$$

la probabilidad de que x esté entre a y b ($0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$) es

$$P_{a,b} = \int_a^b f(x) \, dx$$

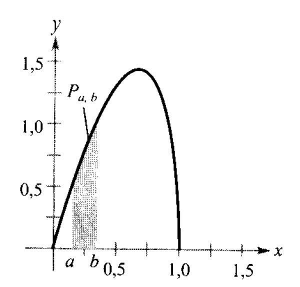
68. La probabilidad de recordar en cierto experimento de psicología es

$$P_{a,b} = \int_a^b \frac{15}{4} x\sqrt{1 - x} \, dx$$

donde x representa el porcentaje de cosas recordadas. (Véase figura.)

a) Para un individuo elegido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que recuerde entre el 50 por 100 y el 75 por 100 de las cosas?

b) ¿Cuál es el porcentaje medio de cosas recordadas? es decir, ¿para qué valor de b ocurre que la probabilidad de 0 a b es 0,5?



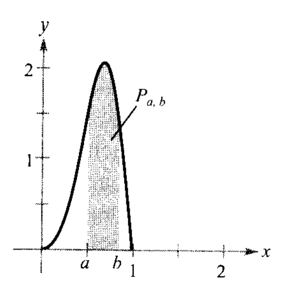
69. La probabilidad de encontrar hierro en muestras minerales de cierta zona es

$$P_{a,b} = \int_a^b \frac{1.155}{32} x^3(1 - x)^{3/2} \, dx$$

(ver figura). Hallar la probabilidad de que una muestra contenga entre

a) 0 por 100 y 25 por 100

b) 50 por 100 y 100 por 100



¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 70-74, decidir si la afirmación planteada es correcta. Si no lo es, explicar la razón o exhibir un ejemplo que muestre su falsedad.

70. $\int xf(x) \, dx = x\int f(x)dx$

71. $\int \left(\frac{1}{x}\right) dx = -\left(\frac{1}{x^2}\right) + C$

72. Si $f(x) = -f(-x)$ en el intervalo $[-a, a]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x) \, dx = 0$

73. El valor medio de la función seno en un intervalo de longitud 2π es cero.

74. $\int \text{tg } x \, dx = \sec^2 x + C$

Capítulo 5

MOTIVACIÓN DEL CAPÍTULO

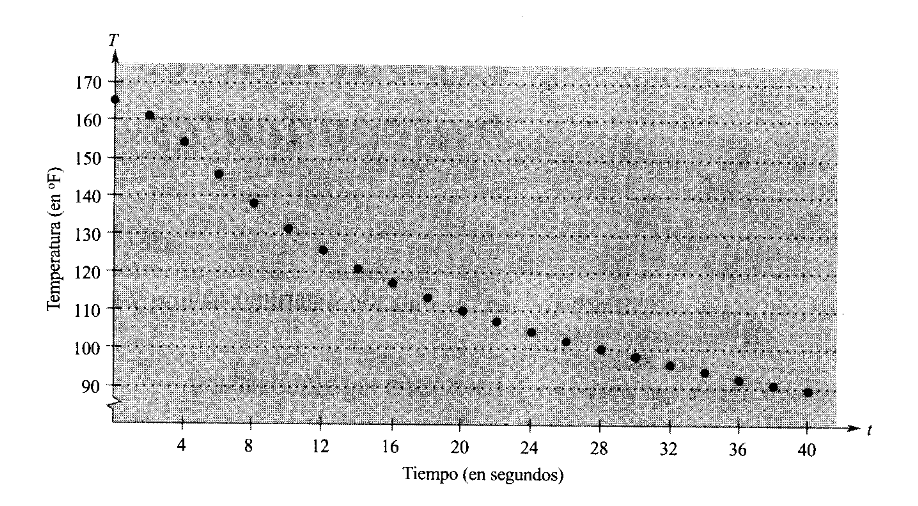
Plásticos y enfriamiento

En 1953, Chevrolet introdujo el Corvette, el primer automóvil fabricado en serie con un chasis de plástico.

¿Qué tienen en común los parachoques del Corvette, los pantys y las bolsas de basura? Todos son de plástico. La palabra griega *plastikos* significa «susceptible de ser moldeado» y se adaptó para denominar la familia más versátil de materiales jamás creada. Desde que la baquelita fue introducida en 1909, la industria de los plásticos ha experimentado tal desarrollo que los plásticos, hoy en día, surgen en casi todos los aspectos de nuestra vida cotidiana.

Se han utilizado diversos métodos para dar forma a los materiales plásticos, siendo uno de los más frecuentes echar *resina plástica* caliente en un molde. La temperatura de la resina fundida es de unos 300 °F. Entonces se enfría el molde en un sistema congelador que se mantiene a 58 °F hasta que la pieza se extrae del molde. Con el fin de minimizar costes, conviene extraerlas muy rápidamente, de manera que el molde pueda ser utilizado de nuevo tan pronto como sea posible. Pero si se saca la pieza demasiado caliente, pueden producirse roturas o defectos. Es por tanto del máximo interés el ritmo al que se sacan las piezas del molde.

Con el fin de conocer el ritmo de enfriamiento, se usó el *Texas Instruments Calculator-Based Laboratory System* para medir la temperatura de una copa de agua durante 40 segundos. La temperatura de la habitación dio como medida 69,55 °F y la del agua en $t = 0$ fue medida como 165,58 °F. Los resultados se muestran en el diagrama de puntos de la página siguiente.



Leo Hendrik Baekeland intentó crear una laca combinando fenol y formaldehído. El experimento «falló», en el sentido de que no produjo una laca sino la primera resina plástica completamente sintética. La baquelita se usa todavía hoy en la industria del automóvil y en la electrónica.

CUESTIONES

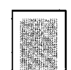
1. Describir la evolución de los puntos de las medidas de temperatura. El ritmo de enfriamiento del agua ¿crece, decrece o se mantiene constante?
2. Imagine una curva que pasa por esos puntos. ¿Qué comportamiento cabe esperar de la curva cuando t crece? ¿Es de esperar que la curva intersecte a la recta $T = 69{,}55$? Explicar la respuesta.
3. La derivada de una función que se ajustara a esos datos ¿sería creciente, decreciente o constante? Explicar la respuesta.
4. Los datos del diagrama admiten como modelo una función de la forma

$$T = a \cdot b^t + c$$

Hallar valores de a, b y c que produzcan un modelo razonable.

5

Funciones logarítmicas, exponenciales y otras funciones trascendentes



5.1 Función logaritmo natural y derivación

JOHN NAPIER (1550-1617)

Los logaritmos fueron inventados por el matemático escocés John Napier. Aunque él no introdujo los logaritmos naturales, éstos se conocen también como logaritmos *neperianos*.

La función logaritmo natural

Recordemos que en la regla de las potencias

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \qquad \text{Regla de las potencias}$$

persiste un hueco importante: no se aplica al caso $n = -1$. Es decir, todavía no hemos conseguido una primitiva para la función $f(x) = 1/x$. En esta sección usaremos el segundo teorema fundamental del Cálculo para *definir* una tal función. Esta primitiva es una función que aún no ha aparecido previamente en este libro. No es algebraica ni trigonométrica. Está incluida en una nueva clase de funciones, llamadas *funciones logarítmicas* (o *funciones logaritmo*). Esta función particular es la **función logaritmo natural**.

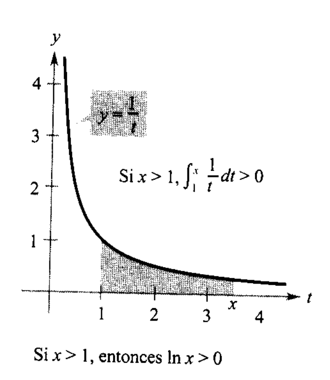
DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

La función logaritmo natural se define como

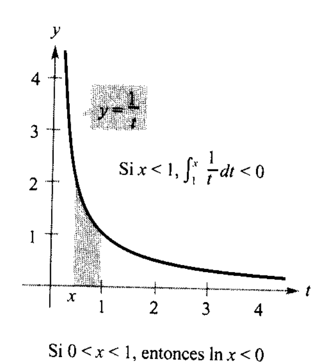
$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad x > 0$$

Su dominio es el conjunto de todos los números reales positivos.

De la definición deducimos que $\ln x$ es positivo para $x > 1$ y negativo para $0 < x < 1$ (Figura 5.1). Además, $\ln(1) = 0$, ya que los límites inferior y superior de integración son, en ese caso, iguales.



Si $x > 1$, entonces $\ln x > 0$



Si $0 < x < 1$, entonces $\ln x < 0$

FIGURA 5.1

EXPLORACIÓN

Representación de la función logaritmo natural Usando sólo su definición, esbozar la gráfica de la función logaritmo natural. Explicar el razonamiento.

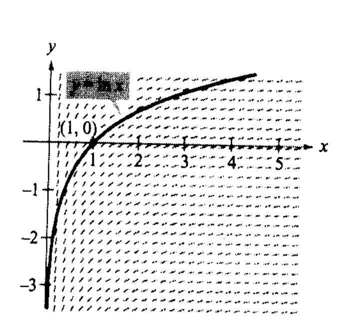


FIGURA 5.2
Cada segmento recto tiene pendiente $1/x$.

Para dibujar la gráfica de $y = \ln x$ podemos pensar en la función logaritmo natural como una *primitiva* dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

La Figura 5.2 muestra un *campo de direcciones*, generado en una calculadora, que consta de pequeños segmentos de pendiente $1/x$. La gráfica de $y = \ln x$ es la solución que pasa por el punto (1, 0).

El próximo teorema resume varias propiedades básicas de la función logaritmo natural.

Nota. Los campos de direcciones proporcionan una visualización de las direcciones de las soluciones de una ecuación diferencial.

TEOREMA 5.1 PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

La función logaritmo natural tiene las siguientes propiedades.

1. El dominio es $(0, \infty)$ y el recorrido es $(-\infty, \infty)$.
2. La función es continua, creciente e inyectiva.
3. La gráfica es cóncava hacia abajo.

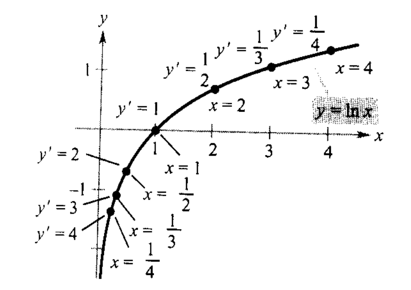


FIGURA 5.3
La función logaritmo natural es creciente y cóncava hacia abajo.

Demostración: El dominio de $f(x) = \ln x$ es $(0, \infty)$ por definición. Además, la función es continua, por ser diferenciable. Y es creciente porque su derivada

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{Primera derivada}$$

es positiva para $x > 0$, como indica la Figura 5.3. Es cóncava hacia abajo porque

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{Segunda derivada}$$

es negativa para $x > 0$. Dejamos como ejercicio la demostración de que es inyectiva (Ejercicio 96). Los siguientes límites implican que el recorrido es toda la recta real.

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$$

En el apéndice se justifican ambos límites. □

Utilizando la definición de la función logaritmo natural se pueden probar propiedades importantes de las operaciones con logaritmos. Si el lector ya está familiarizado con los logaritmos, reconocerá que estas propiedades son características de todos los logaritmos.

LOGARITMOS

Napier tomó el término *logaritmo* de las palabras griegas *logos* (razón) y *arithmos* (número) para denominar la teoría que desarrolló a lo largo de veinte años y que apareció por vez primera en el libro *Mairifici Logarithmorum canonis descriptio* (Una descripción de la maravillosa regla de los logaritmos).

TEOREMA 5.2 PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Si a y b son números positivos y n es racional, se satisfacen las siguientes propiedades.

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
3. $\ln(a^n) = n \ln a$
4. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Demostración: La primera ya ha sido discutida. La segunda se deduce del hecho de que dos primitivas de una misma función se diferencian en una constante. Por el segundo teorema fundamental del Cálculo y la definición de la función logaritmo natural, sabemos que

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$$

Así pues, consideremos las dos derivadas

$$\frac{d}{dx}[\ln(ax)] = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$$

y

$$\frac{d}{dx}[\ln a + \ln x] = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

Como $\ln(ax)$ y $(\ln a + \ln x)$ son ambas primitivas de $1/x$, deben diferir en una constante, es decir

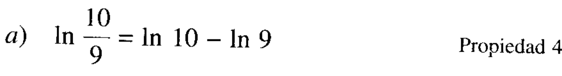
$$\ln(ax) = \ln a + \ln x + C$$

Haciendo $x = 1$ vemos que $C = 0$. La tercera propiedad se demuestra análogamente comparando las derivadas de $\ln(x^n)$ y $n \ln x$. Por fin, usando las propiedades segunda y tercera, se prueba la cuarta.

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln[a(b^{-1})]$$
$$= \ln a + \ln(b^{-1})$$
$$= \ln a - \ln b$$

□

EJEMPLO 1 Desarrollo de expresiones logarítmicas



a) $\ln \frac{10}{9} = \ln 10 - \ln 9$ Propiedad 4

b) $\ln \sqrt{3x+2} = \ln(3x+2)^{1/2}$ Reescribir con exponente racional

$= \frac{1}{2}\ln(3x+2)$ Propiedad 3

c) $\ln \frac{6x}{5} = \ln(6x) - \ln 5$ Propiedad 4

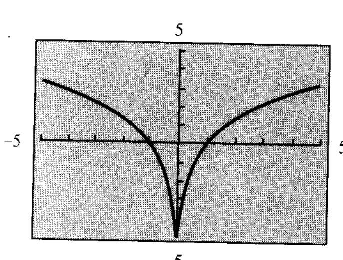
$= \ln 6 + \ln x - \ln 5$ Propiedad 2

d) $\ln \frac{(x^2+3)^2}{x\sqrt[3]{x^2+1}} = \ln(x^2+3)^2 - \ln(x\sqrt[3]{x^2+1})$

$= 2\ln(x^2+3) - [\ln x + \ln(x^2+1)^{1/3}]$

$= 2\ln(x^2+3) - \ln x - \ln(x^2+1)^{1/3}$

$= 2\ln(x^2+3) - \ln x - \frac{1}{3}\ln(x^2+1)$ □



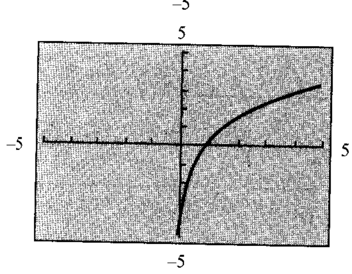


FIGURA 5.4
Comparar en la calculadora las gráficas de $f(x) = \ln x^2$ y $g(x) = 2\ln x$. ¿Cuál de las de aquí arriba es la gráfica de f? ¿Y la de g?

Nota. Cuando se usan propiedades de los logaritmos para reescribir funciones logarítmicas, hay que ver si el dominio de la función reescrita es el mismo que el de la función original. Así, el dominio de $f(x) = \ln x^2$ son todos los números reales salvo $x = 0$, mientras que el de $g(x) = 2\ln x$ son todos los números positivos (véase Figura 5.4).

El número e

Es muy probable que el lector haya estudiado ya logaritmos en cursos de Álgebra anteriores. Allí, sin las ventajas del Cálculo, suelen definirse en términos de un número base. Por ejemplo, los logaritmos comunes tienen base 10 porque $\log_{10} 10 = 1$. (Volveremos a esto en la Sección 5.5.)

Para definir la **base de los logaritmos naturales**, aprovechamos que la función logaritmo natural es continua, inyectiva y con recorrido toda la recta real. Por tanto, debe existir un único número real x tal que $\ln x = 1$, como muestra la Figura 5.5. Este número se denota por la letra e. Puede demostrarse que e es irracional y que vale aproximadamente

$$e \approx 2{,}71828182846$$

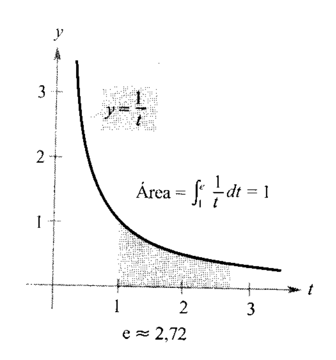


FIGURA 5.5
e es la base de los logaritmos naturales porque $\ln e = 1$.

PARA MÁS INFORMACIÓN
Véase el artículo «Unexpected Occurrences of the Number e» de Harris S. Shultz y Bill Leonard en *Mathematics Magazine*, octubre 1989.

DEFINICIÓN DE e

La letra e denota el número real positivo tal que

$$\ln e = \int_1^e \frac{1}{t}\,dt = 1$$

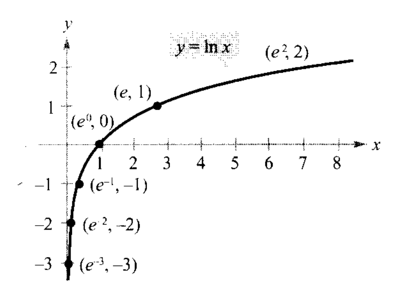


FIGURA 5.6
Si $x = e^n$, entonces $\ln x = n$.

Sabiendo que $\ln e = 1$, podemos usar las propiedades logarítmicas para calcular los logaritmos naturales de otros números. Por ejemplo, usando la propiedad

$$\begin{aligned}\ln (e^n) &= n \ln e\\ &= n(1)\\ &= n\end{aligned}$$

podemos evaluar $\ln (e^n)$ para diversos valores de n, como muestran la tabla y la Figura 5.6.

x	$\frac{1}{e^3} \approx 0{,}050$	$\frac{1}{e^2} \approx 0{,}135$	$\frac{1}{e} \approx 0{,}368$	$e^0 \approx 1$	$e \approx 2{,}718$	$e^2 \approx 7{,}389$
ln x	−3	−2	−1	0	1	2

Los logaritmos de esta tabla son fáciles de calcular de esa forma porque los valores de x son potencias de e. La mayoría de los logaritmos, por el contrario, son más cómodos de hallar con una calculadora.

EJEMPLO 2 Cálculo de expresiones en logaritmos naturales

a) $\ln 2 \approx 0{,}693$ *b*) $\ln 32 \approx 3{,}466$ *c*) $\ln 0{,}1 \approx -2{,}303$ □

La derivada de la función logaritmo natural

La derivada de la función logaritmo natural viene dada en el Teorema 5.3, cuya primera parte se sigue de la definición de dicha función como una primitiva. La segunda parte no es sino la primera en versión de la regla de la cadena.

TEOREMA 5.3 DERIVADA DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

Sea u una función derivable de x.

1. $\dfrac{d}{dx}[\ln x] = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$
2. $\dfrac{d}{dx}[\ln u] = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{u'}{u}, \quad u > 0$

EJEMPLO 3 Derivación de funciones logarítmicas

a) $\frac{d}{dx}[\ln(2x)] = \frac{u'}{u} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$ $\qquad u = 2x$

b) $\frac{d}{dx}[\ln(x^2+1)] = \frac{u'}{u} = \frac{2x}{x^2+1}$ $\qquad u = x^2 + 1$

c) Regla del producto

$$\frac{d}{dx}[x \ln x] = x\left(\frac{d}{dx}[\ln x]\right) + (\ln x)\left(\frac{d}{dx}[x]\right)$$
$$= x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1)$$
$$= 1 + \ln x$$

d) Regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}[(\ln x)^3] = 3(\ln x)^2 \frac{d}{dx}[\ln x]$$
$$= 3(\ln x)^2 \frac{1}{x}$$

□

EXPLORACIÓN

Representar en la calculadora las gráficas de

$$y_1 = \frac{1}{x}$$

e

$$y_2 = \frac{d}{dx}[\ln x]$$

en una misma ventana con $0{,}1 \leqslant x \leqslant 5$ y $-2 \leqslant y \leqslant 8$. Explicar por qué las gráficas parecen idénticas.

Napier utilizaba las propiedades de los logaritmos para simplificar *cálculos* con productos, cocientes y potencias. En la actualidad, con las calculadoras a nuestra disposición hay poco lugar para esas aplicaciones de los logaritmos, claro está. No obstante, son de importancia a la hora de simplificar *derivaciones* de productos, cocientes y potencias.

EJEMPLO 4 Las propiedades de los logaritmos como ayuda en la derivación

Derivar $f(x) = \ln\sqrt{x+1}$.

Solución: Como

$$f(x) = \ln\sqrt{x+1} = \ln(x+1)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln(x+1)$$

podemos escribir

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2(x+1)}$$

□

EJEMPLO 5 Las propiedades de los logaritmos como ayuda en la derivación

Derivar $f(x) = \ln \frac{x(x^2+1)^2}{\sqrt{2x^3-1}}$.

Solución:

$$f(x) = \ln \frac{x(x^2+1)^2}{\sqrt{2x^3-1}}$$ Función original

$$= \ln x + 2\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(2x^3-1)$$ Reescribir antes de derivar

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{6x^2}{2x^3-1}\right)$$ Derivar

$$= \frac{1}{x} + \frac{4x}{x^2+1} - \frac{3x^2}{2x^3-1}$$ Simplificar □

Nota. Obsérvese atentamente, en los Ejemplos 4 y 5, la ventaja de aplicar las propiedades de los logaritmos antes de derivar. Considérese, por ejemplo, la dificultad de derivar directamente la función del Ejemplo 5.

En ocasiones es conveniente usar los logaritmos en la derivación de funciones no logarítmicas, un procedimiento que se llama **derivación logarítmica**.

EJEMPLO 6 Derivación logarítmica

Hallar la derivada de $y = \dfrac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

Solución: Como $y > 0$, $\ln y$ está definido. Comenzamos tomando logaritmos naturales en los dos miembros de la ecuación. Y a continuación aplicaremos las propiedades de los logaritmos y la derivación implícita. Para finalizar, despejaremos y'.

$$\ln y = \ln \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}$$ Tomar logaritmos en ambos miembros

$$\ln y = 2\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$ Propiedades del logaritmo

$$\frac{y'}{y} = 2\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$$ Derivar

$$= \frac{2}{x-2} - \frac{x}{x^2+1}$$

$$y' = y\left(\frac{2}{x-2} - \frac{x}{x^2+1}\right)$$ Despejar y'

$$= \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}\left[\frac{x^2+2x+2}{(x-2)(x^2+1)}\right]$$ Sustituir y

$$= \frac{(x-2)(x^2+2x+2)}{(x^2+1)^{3/2}}$$ Simplificar □

Puesto que el logaritmo natural no está definido para números negativos, encontraremos con frecuencia expresiones del tipo $\ln|u|$. El Teorema 5.4 afirma que se pueden derivar funciones de la forma $y = \ln|u|$ ignorando el valor absoluto.

TEOREMA 5.4 DERIVACIONES QUE AFECTAN A VALORES ABSOLUTOS

Si u es una función derivable de x tal que $u \neq 0$, entonces

$$\frac{d}{dx}[\ln|u|] = \frac{u'}{u}$$

Demostración: Si $u > 0$, entonces $|u| = u$, y el resultado se deduce del Teorema 5.3. Si $u < 0$, entonces $|u| = -u$, y se tiene

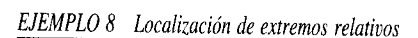
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\ln|u|] &= \frac{d}{dx}[\ln(-u)] \\ &= \frac{-u'}{-u} \\ &= \frac{u'}{u} \end{aligned}$$ □

EJEMPLO 7 Derivaciones que afectan a valores absolutos

Hallar la derivada de $f(x) = \ln|\cos x|$.

Solución: Usando el Teorema 5.4 con $u = \cos x$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\ln|\cos x|] &= \frac{u'}{u} \\ &= \frac{-\text{sen } x}{\cos x} \\ &= -\text{tg } x \end{aligned}$$ □



EJEMPLO 8 Localización de extremos relativos

Localizar los extremos relativos de $y = \ln(x^2 + 2x + 3)$.

Solución: Derivando y se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3}$$

Como $dy/dx = 0$ en $x = -1$, el criterio de la primera derivada permite concluir que el punto $(-1, \ln 2)$ es un mínimo relativo. Y como no hay más puntos críticos, ese es el único extremo relativo (véase Figura 5.7). □

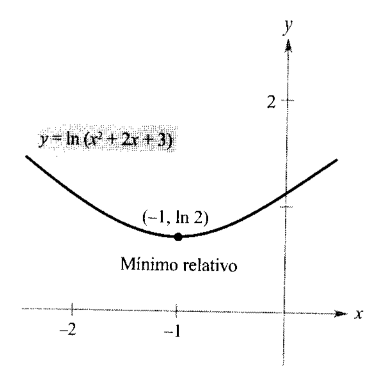


FIGURA 5.7
La derivada de y pasa, en $x = -1$, de negativa a positiva.

Ejercicios de la Sección 5.1

1. Completar la tabla. Usando la regla de Simpson y la calculadora, con $n = 10$, aproximar la integral

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

x	0,5	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$\int_1^x (1/t)\,dt$							

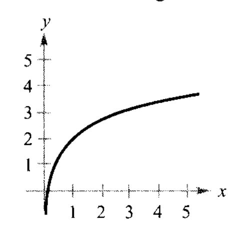
2. *a)* Representar los puntos generados en el Ejercicio 1 y conectarlos con una curva suave. Comparar el resultado con la gráfica de $y = \ln x$.

b) Representar en la calculadora $y = \int_1^x (1/t)\,dt$ para $0{,}2 \leqslant x \leqslant 4$. Comparar con la gráfica de $y = \ln x$.

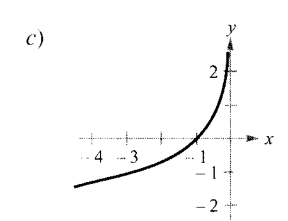
En los Ejercicios 3-6, emparejar cada función con su gráfica.

a)

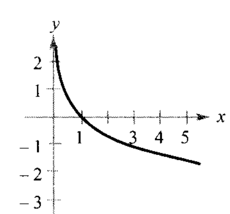
b)



c)



d)



3. $f(x) = \ln x + 2$ **4.** $f(x) = -\ln x$

5. $f(x) = \ln (x - 1)$ **6.** $f(x) = -\ln (-x)$

En los Ejercicios 7-12, esbozar la gráfica de la función y describir su dominio.

7. $f(x) = 3 \ln x$ **8.** $f(x) = -2 \ln x$

9. $f(x) = \ln 2x$ **10.** $f(x) = \ln |x|$

11. $f(x) = \ln (x - 1)$ **12.** $g(x) = 2 + \ln x$

En los Ejercicios 13 y 14, usar las propiedades de los logaritmos para estimar el logaritmo indicado, sabiendo que $\ln 2 \approx 0{,}6931$ y $\ln 3 \approx 1{,}0986$.

13. *a)* $\ln 6$ *b)* $\ln \frac{2}{3}$ *c)* $\ln 81$ *d)* $\ln \sqrt{3}$

14. *a)* $\ln 0{,}25$ *b)* $\ln 24$ c) $\ln \sqrt[3]{12}$ *d)* $\ln \frac{1}{72}$

En los Ejercicios 15-24, usar las propiedades de los logaritmos para escribir la expresión como suma, diferencia y/o múltiplo de logaritmos.

15. $\ln \frac{2}{3}$ **16.** $\ln \frac{1}{5}$

17. $\ln \dfrac{xy}{z}$ **18.** $\ln (xyz)$

19. $\ln \sqrt{2^3}$ **20.** $\ln \sqrt{a - 1}$

21. $\ln \left(\dfrac{x^2 - 1}{x^3}\right)^3$ **22.** $\ln 3e^2$

23. $\ln z(z - 1)^2$ **24.** $\ln \dfrac{1}{e}$

En los Ejercicios 25-30, escribir las expresiones como el logaritmo de una cantidad.

25. $\ln (x - 2) - \ln (x + 2)$

26. $3 \ln x + 2 \ln y - 4 \ln z$

27. $\frac{1}{3}[2 \ln (x + 3) + \ln x - \ln (x^2 - 1)]$

28. $2[\ln x - \ln (x + 1) - \ln (x - 1)]$

29. $2 \ln 3 - \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1)$

30. $\frac{3}{2} [\ln (x^2 + 1) - \ln (x + 1) - \ln (x - 1)]$

En los Ejercicios 31 y 32, probar que $f = g$ usando una calculadora para representar ambas en una misma pantalla.

31. $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{4}$, $x > 0$, $g(x) = 2 \ln x - \ln 4$

32. $f(x) = \ln \sqrt{x(x^2 + 1)}$, $g(x) = \frac{1}{2} [\ln x + \ln (x^2 + 1)]$

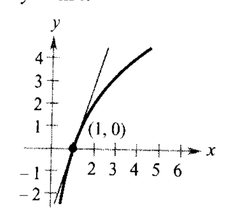
En los Ejercicios 33-36, calcular el límite.

33. $\lim\limits_{x \to 3^+} \ln (x - 3)$ **34.** $\lim\limits_{x \to 6^-} \ln (6 - x)$

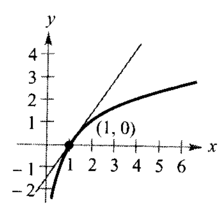
35. $\lim\limits_{x \to 2^-} \ln [x^2(3 - x)]$ **36.** $\lim\limits_{x \to 5^+} \ln \dfrac{x}{\sqrt{x - 4}}$

En los Ejercicios 37-40, calcular la pendiente de la recta tangente a la función logarítmica en el punto (1, 0).

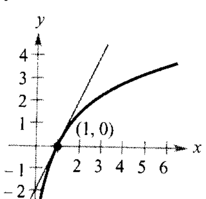
37. $y = \ln x^3$



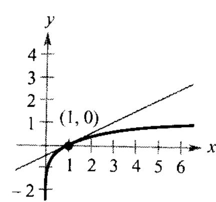
38. $y = \ln x^{3/2}$



39. $y = \ln x^2$



40. $y = \ln x^{1/2}$



En los Ejercicios 41-66, hallar la derivada de la función propuesta.

41. $g(x) = \ln x^2$

42. $h(x) = \ln (x^2 + 3)$

43. $y = (\ln x)^4$

44. $y = x \ln x$

45. $y = \ln (x\sqrt{x^2 - 1})$

46. $y = \ln \sqrt{x^2 - 4}$

47. $f(x) = \ln \left(\dfrac{x}{x^2 + 1}\right)$

48. $f(x) = \ln \left(\dfrac{x}{x + 1}\right)$

49. $g(t) = \dfrac{\ln t}{t^2}$

50. $h(t) = \dfrac{\ln t}{t}$

51. $y = \ln (\ln x^2)$

52. $y = \ln (\ln x)$

53. $y = \ln \sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}}$

54. $y = \ln \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$

55. $f(x) = \ln \left(\dfrac{\sqrt{4 + x^2}}{x}\right)$

56. $f(x) = \ln (x + \sqrt{4 + x^2})$

57. $y = \dfrac{-\sqrt{x^2 + 1}}{x} + \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$

58. $y = \dfrac{-\sqrt{x^2 + 4}}{2x^2} - \dfrac{1}{4} \ln \left(\dfrac{2 + \sqrt{x^2 + 4}}{x}\right)$

59. $y = \ln |\text{sen } x|$

60. $y = \ln |\sec x|$

61. $y = \ln \left|\dfrac{\cos x}{\cos x - 1}\right|$

62. $y = \ln |\sec x + \text{tg } x|$

63. $y = \ln \left|\dfrac{-1 + \text{sen } x}{2 + \text{sen } x}\right|$

64. $y = \ln \sqrt{1 + \text{sen}^2 x}$

65. $f(x) = \text{sen } 2x \ln x^2$

66. $g(x) = \displaystyle\int_1^{\ln x} (t^2 + 3)\, dt$

En los Ejercicios 67 y 68, *a*) hallar una ecuación para la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto indicado, *b*) representar en la calculadora la función y la recta tangente, y *c*) usar derivación simbólica para confirmar los resultados en la calculadora.

	Función	*Punto*
67.	$y = 3x^2 - \ln x$	(1, 3)
68.	$y = 4 - x^2 - \ln (\frac{1}{2} x + 1)$	(0, 4)

En los Ejercicios 69 y 70, hallar dy/dx mediante derivación implícita.

69. $x^2 - 3 \ln y + y^2 = 10$

70. $\ln xy + 5x = 30$

En los Ejercicios 71 y 72, probar que la función es solución de la ecuación diferencial.

	Función	*Ecuación diferencial*
71.	$y = 2 \ln x + 3$	$xy'' + y' = 0$
72.	$y = x \ln x - 4x$	$x + y - xy' = 0$

En los Ejercicios 73-78, hallar los extremos relativos y los puntos de inflexión. Confirmar los resultados en la calculadora.

73. $y = \dfrac{x^2}{2} - \ln x$

74. $y = x - \ln x$

75. $y = x \ln x$

76. $y = \dfrac{\ln x}{x}$

77. $y = \dfrac{x}{\ln x}$

78. $y = x^2 \ln x$

Aproximaciones lineal y cuadrática En los Ejercicios 79 y 80, representar la función en la calculadora. A continuación, representar

$$P_1(x) = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

y

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \tfrac{1}{2} f''(1)(x - 1)^2$$

en una misma pantalla. Comparar los valores de f, P_1 y P_2, y sus primeras derivadas en $x = 1$.

79. $f(x) = \ln x$

80. $f(x) = x \ln x$

En los Ejercicios 81 y 82, aproximar por el método de Newton, con tres cifras decimales, la coordenada x del punto de intersección de las gráficas de las dos ecuaciones. Verificar el resultado en una calculadora.

81. $y = \ln x$
$y = -x$

82. $y = \ln x$
$y = 3 - x$

En los Ejercicios 83-88, hallar dy/dx por derivación logarítmica.

83. $y = x\sqrt{x^2 - 1}$

84. $y = \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$

85. $y = \dfrac{x^2\sqrt{3x-2}}{(x-1)^2}$

86. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$

87. $y = \dfrac{x(x-1)^{3/2}}{\sqrt{x+1}}$

88. $y = \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$

89. ***Intensidad del sonido*** La relación entre el número de decibelios β y la intensidad I de un sonido en vatios por cm^2 es

$$\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-16}}\right)$$

Usar las propiedades de los logaritmos para expresar esa fórmula de manera más sencilla y determinar el número de decibelios de un sonido de intensidad $I = 10^{-10}$.

90. ***Hipotecas*** El término t, en años, de una hipoteca de \$120.000 al 10 por 100 de interés puede aproximarse por

$$t = \frac{5{,}315}{-6{,}7968 + \ln x}, \quad x > 1.000$$

donde x es la mensualidad en dólares.

a) Representar el modelo en la calculadora.
b) Aproximar, con ese modelo, el término de una hipoteca de \$1.167,41 de mensualidad. ¿Cuál es el pago total?
c) Aproximar, con ese modelo, el término de una hipoteca de \$1.068,45 de mensualidad. ¿Cuál es el pago total?
d) Hallar el ritmo de cambio de t con respecto a x cuando $x = 1.167{,}41$ y $x = 1.068{,}45$.
e) Explicar, en un breve párrafo, las ventajas de una mensualidad alta.

91. ***Un modelo matemático*** La tabla da las temperaturas de ebullición del agua a ciertas presiones p (libras por pulgada cuadrada). *(Fuente: Standard Handbook of Mechanical Engineers.)*

p	5	10	14,696 (1 atm)	20
T	162,24°	193,21°	212,00°	227,96°

p	30	40	60	80	100
T	250,33°	267,25°	292,71°	312,03°	327,81°

Un modelo que ajusta esos datos es

$$T = 87{,}97 + 34{,}96 \ln p + 7{,}91\sqrt{p}$$

a) Representar en una calculadora los datos y el modelo.
b) Hallar el ritmo de cambio de T respecto de p cuando $p = 10$ y $p = 70$.
c) Representar T'. Hallar $\lim_{p \to \infty} T'(p)$ e interpretar el resultado en el contexto del problema.

92. ***Para pensar*** Sea f una función positiva y derivable en toda la recta real. Sea $g(x) = \ln f(x)$.

a) Si la gráfica de g es creciente, ¿debe ser creciente la gráfica de f?
b) Si la gráfica de f es cóncava hacia arriba, ¿debe serlo la de g?

93. ***Un modelo matemático*** La presión de la atmósfera decrece con la altitud. Al nivel del mar la presión media es una *atmósfera* (1,033227 kg/cm^2). La tabla muestra los valores de p a varias alturas (en km).

h	0	5	10	15	20	25
p	1	0,55	0,25	0,12	0,06	0,02

a) Usar una calculadora para ajustar un modelo de la forma $p = a + b \ln h$ a esos datos. Explicar por qué el resultado es un mensaje de error.
b) Usar la calculadora para ajustar un modelo de la forma $h = a + b \ln p$ a esos datos.
c) Representar en la calculadora los datos y el modelo.
d) Con ese modelo, estimar la altura en la que la presión es 0,75 atmósferas.
e) Estimar, con el modelo, la presión a una altura de 13 km.
f) Hallar el ritmo de cambio de la presión cuando $h = 5$ y $h = 20$. Interpretar los resultados en el contexto de ese problema.

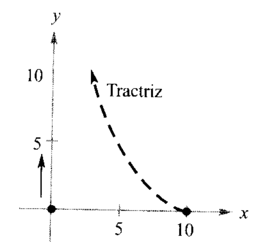
94. ***Tractriz*** Una persona camina por un muelle recto tirando de un bote por medio de una cuerda de 10 metros. El camino del bote se llama tractriz (véase figura). Su ecuación es

$$y = 10 \ln \left(\frac{10 + \sqrt{100 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{100 - x^2}$$

a) Representar la función en una calculadora.

b) ¿Cuál es la pendiente de esa curva cuando $x = 5$ y cuando $x = 9$?

c) ¿Qué ocurre con la pendiente cuando $x \to 10$?



95. ***Conjetura*** Representar en la calculadora f y g en la misma pantalla y determinar cuál crece a ritmo más rápido para valores «grandes» de x. ¿Qué se puede deducir del ritmo de crecimiento de la función logaritmo natural?

a) $f(x) = \ln x, \quad g(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \ln x, \quad g(x) = \sqrt[4]{x}$

96. Demostrar que la función logaritmo natural es inyectiva.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 97 y 98, decidir si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar la razón o exhibir un ejemplo que muestre su falsedad.

97. $\ln(x + 25) = \ln x + \ln 25$

98. Si $y = \ln \pi$, entonces $y' = 1/\pi$



5.2 La función logaritmo natural y la integración

CONTENIDO ▪
La regla log de integración ▪
Integrales de funciones trigonométricas ▪

La regla log de integración

Las reglas de derivación

$$\frac{d}{dx}[\ln |x|] = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}[\ln |u|] = \frac{u'}{u}$$

de la sección anterior tienen como secuela las siguientes reglas de integración.

TEOREMA 5.5 LA REGLA LOG PARA LA INTEGRACIÓN

Sea u una función derivable de x.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln |x| + C$ 2. $\displaystyle\int \frac{1}{u}\,du = \ln |u| + C$

Como $du = u'\,dx$, la segunda fórmula se puede expresar así:

$$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln |u| + C$$

Forma alternativa de la regla log

EXPLORACIÓN

Integración de funciones racionales En el Capítulo 4 aprendimos a integrar *cualquier* función polinómica. La regla log facilita la integración de funciones racionales. Por ejemplo, cada una de las que se citan a continuación admite integración vía la regla log.

$\frac{2}{x}$	Ejemplo 1
$\frac{1}{4x-1}$	Ejemplo 2
$\frac{x}{x^2+1}$	Ejemplo 3
$\frac{3x^2+1}{x^3+x}$	Ejemplo 4*a*
$\frac{x+1}{x^2+2x}$	Ejemplo 4*c*
$\frac{1}{3x+2}$	Ejemplo 4*d*
$\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$	Ejemplo 5
$\frac{2x}{(x+1)^2}$	Ejemplo 6

Hay todavía muchas funciones racionales que no se pueden integrar con la regla log. Dar ejemplos de estas funciones y explicar el razonamiento.

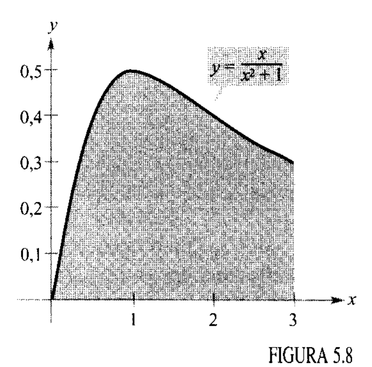


FIGURA 5.8

Área $= \int_0^3 \frac{x}{x^2+1}\,dx$. El área de la región acotada por la gráfica de y, el eje x y la recta $x = 3$ es $(\ln 10)/2$.

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla log de integración

$$\int \frac{2}{x}\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= 2\ln|x| + C \qquad \text{La regla log de integración}$$

$$= \ln(x^2) + C \qquad \text{Propiedad de los logaritmos}$$

Como x^2 nunca es negativo, el valor absoluto en la primitiva es superfluo. □

EJEMPLO 2 La regla log en un cambio de variable

Hallar $\int \frac{1}{4x-1}\,dx.$

Solución: Si hacemos $u = 4x - 1$, entonces $du = 4\,dx$

$$\int \frac{1}{4x-1}\,dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{4x-1}\right)4\,dx \qquad \text{Multiplicar y dividir por 4}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\,du \qquad \text{Sustituir: } u = 4x-1$$

$$= \frac{1}{4}\ln|u| + C \qquad \text{Aplicar la regla del logaritmo}$$

$$= \frac{1}{4}\ln|4x-1| + C \qquad \text{Deshacer la sustitución}$$ □

El Ejemplo 3 usa la formulación alternativa de la regla log. Para aplicarla hay que buscar cocientes cuyo numerador sea la derivada del denominador.

EJEMPLO 3 Cálculo de un área con la regla log

Calcular el área de la región acotada por la gráfica de

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

el eje x y la recta $x = 3$.

Solución: En la Figura 5.8 vemos que el área viene dada por la integral definida

$$\int_0^3 \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

Tomando $u = x^2 + 1$, es $u' = 2x$. Para aplicar la regla log, multiplicamos y dividimos por 2.

$$\int_0^3 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\ln(x^2+1)\Big]_0^3 \qquad \int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 10 - \ln 1)$$

$$= \frac{1}{2}\ln 10 \qquad \ln 1 = 0$$

$$\approx 1{,}151$$

□

EJEMPLO 4 Identificando formas de cociente de la regla log

a) $\displaystyle\int \frac{3x^2+1}{x^3+x}\,dx = \ln|x^3+x| + C \qquad u = x^3 + x$

b) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}\,dx = \ln|\operatorname{tg} x| + C \qquad u = \operatorname{tg} x$

c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x}\,dx \qquad u = x^2 + 2x$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x| + C$$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x+2}\,dx \qquad u = 3x + 2$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x+2| + C$$

□

Las primitivas que contienen logaritmos pueden adoptar formas diferentes que, pese a su aspecto, son equivalentes. Así, ¿cuáles de las que siguen son equivalentes a la primitiva del Ejemplo 4*d*?

$$\ln|(3x+2)^{1/3}| + C, \quad \frac{1}{3}\ln\left|x + \frac{2}{3}\right| + C, \quad \ln|3x+2|^{1/3} + C$$

Las integrales a las que es aplicable la regla log aparecen a menudo disfrazadas. Por ejemplo, si una función racional tiene *el numerador de grado mayor o igual que el del denominador*, una simple división de polinomios deja al descubierto una forma a la que ya es aplicable la regla log.

EJEMPLO 5 *Dividiendo antes de integrar*

Hallar $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx.$

Solución: Antes de nada, dividimos para reexpresar el integrando.

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \Longrightarrow \begin{array}{r} 1 \\ x^2+1\,\overline{)\,x^2+x+1} \\ \underline{x^2\qquad+1} \\ x \end{array} \Longrightarrow 1+\frac{x}{x^2+1}$$

Ahora, ya integramos:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx &= \int\left(1+\frac{x}{x^2+1}\right)dx \\ &= \int dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C\end{aligned}$$

Verificar este resultado por derivación (debe dar el integrando original). □

El próximo ejemplo presenta un caso en el que el uso de la regla log está oculto bajo un cambio de variable.

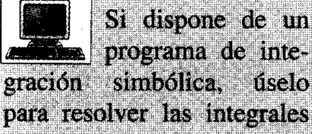
EJEMPLO 6 *Cambio de variable y la regla log*

Hallar $\displaystyle\int \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx.$

Solución: Si hacemos $u = x+1$, entonces $du = dx$ y $x = u-1$.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx &= \int \frac{2(u-1)}{u^2}\,du && \text{Sustituir } u = x+1 \\ &= 2\int\left(\frac{u}{u^2}-\frac{1}{u^2}\right)du && \text{Reescribir como dos fracciones} \\ &= 2\int\frac{du}{u} - 2\int u^{-2}\,du && \text{Reescribir como dos integrales} \\ &= 2\ln|u| - 2\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right)+C && \text{Integrar} \\ &= 2\ln|u| + \frac{2}{u}+C && \text{Simplificar} \\ &= 2\ln|x+1| + \frac{2}{x+1}+C && \text{Deshacer la sustitución}\end{aligned}$$

Comprobar el resultado por derivación (ha de obtenerse el integrando inicial). □



Si dispone de un programa de integración simbólica, úselo para resolver las integrales de los Ejemplos 5 y 6. Compare las formas de las primitivas que da la calculadora con las obtenidas en el texto.

Al estudiar los Ejemplos 5 y 6, debe quedar claro que ambos exigen reescribir el integrando, de modo que hay más de una fórmula de integración eficaz para ellos. En las próximas secciones y en el Capítulo 7 dedicaremos mucho tiempo a las técnicas de integración. Su dominio requiere reconocer la naturaleza de «probar y errar» de la integración. En este sentido, la integración no es tan directa como la derivación. La derivación se plantea así:

«He aquí la pregunta; ¿cuál es la respuesta?»

La integración viene a ser más bien

«He aquí la respuesta; ¿cuál es la pregunta?»

Sugerimos la siguiente estrategia para la integración.

ADVERTENCIA Dado que la integración es más difícil que la derivación, conviene comprobar el resultado de una integración mediante derivación. Así, en el Ejemplo 7 la derivada de $y = \ln|\ln x| + C$ es $y' = 1/(x \ln x)$.

Estrategia para la integración

1. **Memorizar una lista básica de fórmulas de integración. (Incluyendo las de esta sección, ya hay 12: la de las potencias, la regla log y las reglas trigonométricas.) Al final de la Sección 5.9 la lista será de 20.**
2. **Buscar una fórmula de esas que se parezca al integrando, en todo o en parte, y por prueba y error elegir una u que ajuste el integrando a la fórmula.**
3. **Si no puede hallar una u-sustitución adecuada, intente transformar el integrando mediante identidades trigonométricas, multiplicación y división por una misma cantidad o suma y resta de una misma cantidad. Se requiere cierto ingenio.**
4. **Si dispone de cálculo de primitivas en forma simbólica en la calculadora, úsela.**

EJEMPLO 7 u-sustitución y la regla log

Resolver la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x \ln x}$.

Solución: La solución se puede expresar como integral indefinida

$$y = \int \frac{1}{x \ln x}\, dx$$

Como el integrando es un cociente con denominador de potencia 1, intentamos la regla log. Hay tres elecciones posibles para u. Las elecciones $u = x$ y $u = x \ln x$ no logran ajustar la forma u'/u de la regla log. Pero sí lo consigue la tercera, $u = \ln x$, que da $u' = 1/x$, de manera que se obtiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x \ln x}\, dx &= \int \frac{1/x}{\ln x}\, dx && \text{Dividir numerador y denominador por } x \\
&= \int \frac{u'}{u}\, dx && \text{Sustituir: } u = \ln x \\
&= \ln|u| + C && \text{Aplicar la regla del logaritmo} \\
&= \ln|\ln x| + C && \text{Deshacer la sustitución}
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución es $y = \ln|\ln x| + C$. □

Integrales de funciones trigonométricas

En la Sección 4.1 vimos seis reglas de integración trigonométricas, correspondientes directamente a seis reglas de derivación. Ahora, merced a la regla log, podemos completar el conjunto de reglas básicas de integración trigonométricas.

EJEMPLO 8 Usando una identidad trigonométrica

Hallar $\int \operatorname{tg} x\, dx$.

Solución: La integral no parece adaptable a nuestras reglas básicas. Sin embargo, reescribiéndola como

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx$$

y a la vista de que $D_x[\cos x] = -\operatorname{sen} x$, hacemos $u = \cos x$ y obtenemos

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx \qquad \text{Identidad trigonométrica}$$

$$= -\int \frac{u'}{u}\, dx \qquad \text{Sustituir: } u = \cos x$$

$$= -\ln |u| + C \qquad \text{Aplicar la regla del logaritmo}$$

$$= -\ln |\cos x| + C \qquad \text{Deshacer la sustitución}$$

□

En el próximo ejemplo, efectuamos un paso algo inusual (multiplicar y dividir por una misma cantidad) para llegar a una fórmula de integración para la función secante.

EJEMPLO 9 La fórmula de integración de la secante

Hallar $\int \sec x\, dx$.

Solución: Consideremos el siguiente procedimiento.

$$\int \sec x\, dx = \int \operatorname{sen} x \left(\frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}\right) dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}\, dx$$

Llamando u al denominador, se obtiene

$$u = \sec x + \operatorname{tg} x \quad \Longrightarrow \quad u' = \sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x$$

Por tanto,

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}\,dx \qquad \text{Reescribir el integrando}$$

$$= \int \frac{u'}{u}\,dx \qquad \text{Sustituir: } u = \sec x + \operatorname{tg} x$$

$$= \ln|u| + C \qquad \text{Aplicar la regla del logaritmo}$$

$$= \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C \qquad \text{Deshacer la sustitución}$$

□

Con los resultados de los ejemplos anteriores, ya disponemos de las fórmulas de integración de sen x, cos x, tg x y sec x. Las seis reglas trigonométricas se resumen a continuación.

Nota. Usando las identidades trigonométricas y las propiedades de los logaritmos se pueden reescribir esas seis reglas de integración de otras maneras. Por ejemplo, se puede escribir

$\int \operatorname{cosec} u\,du = \ln|\operatorname{cosec} u - \operatorname{ctg} u| + C$

(véanse Ejercicios 47-50).

Integrales de las seis funciones trigonométricas básicas

$$\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C \qquad \int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$$

$$\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u| + C \qquad \int \operatorname{ctg} u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C \qquad \int \operatorname{cosec} u\,du = -\ln|\operatorname{cosec} u + \operatorname{ctg} u| + C$$

EJEMPLO 10 Integración de funciones trigonométricas

Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}\,dx$.

Nota. Aunque no siempre es cierto que $\sqrt{a^2} = a$ para todo a real, $\sqrt{\sec^2 x} = |\sec x| = \sec x$ para $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$ porque $\sec x \geqslant 0$ en ese intervalo. Esto resulta útil en el Ejemplo 10.

Solución: Usando $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$, vemos que

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sec x\,dx$$

$$= \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|\Big]_0^{\pi/4}$$

$$= \ln(\sqrt{2} + 1) - \ln 1$$

$$\approx 0{,}8814$$

□

EJEMPLO 11 Fuerza electromotriz

La fuerza electromotriz de cierto circuito viene dada por $E = 3$ sen $2t$, donde E se mide en voltios y t en segundos. Calcular el valor medio de E entre $t = 0$ y $t = 0{,}5$ segundos.

Solución:

$$\begin{aligned}\text{Valor medio de } E &= \frac{1}{0{,}5 - 0}\int_0^{0{,}5} 3 \operatorname{sen} 2t\, dt\\ &= 6\int_0^{0{,}5} \operatorname{sen} 2t\, dt\\ &= 6\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{0{,}5} (\operatorname{sen} 2t)(2)\, dt \qquad u = 2t,\ du = 2\, dt\\ &= 3\Big[-\cos 2t\Big]_0^{0{,}5}\\ &\approx 1{,}379 \text{ voltios}\end{aligned}$$

□

Ejercicios de la Sección 5.2

En los Ejercicios 1-18, hallar la integral indefinida.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x+1}\, dx$ **2.** $\displaystyle\int \frac{1}{x-5}\, dx$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{3-2x}\, dx$ **4.** $\displaystyle\int \frac{1}{6x+1}\, dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$ **6.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{3-x^3}\, dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x^2-4}{x}\, dx$ **8.** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$

9. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{x^3+3x^2+9x}\, dx$ **10.** $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+6x+7}\, dx$

11. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$ **12.** $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln (x^2)}\, dx$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx$ **14.** $\displaystyle\int \frac{1}{x^{2/3}(1+x^{1/3})}\, dx$

15. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}\, dx$ **16.** $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}\, dx$

17. $\displaystyle\int \frac{2x}{(x-1)^2}\, dx$ **18.** $\displaystyle\int \frac{x(x-2)}{(x-1)^3}\, dx$

En los Ejercicios 19-26, hallar la integral indefinida de la función trigonométrica.

19. $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta$ **20.** $\displaystyle\int \operatorname{tg} 5\theta\, d\theta$

21. $\displaystyle\int \operatorname{cosec} 2x\, dx$ **22.** $\displaystyle\int \sec \frac{x}{2}\, dx$

23. $\displaystyle\int \frac{\cos t}{1+\operatorname{sen} t}\, dt$ **24.** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\, dx$

25. $\displaystyle\int \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{\sec x - 1}\, dx$ **26.** $\displaystyle\int (\sec t + \operatorname{tg} t)\, dt$

En los Ejercicios 27-30, resolver la ecuación diferencial. Representar en la calculadora tres soluciones, una de las cuales pase por el punto indicado.

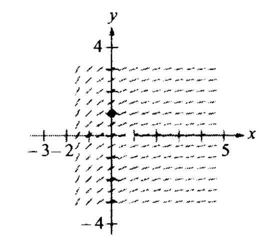
27. $\displaystyle\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2-x}$, $(1, 0)$ **28.** $\displaystyle\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2-9}$, $(0, 4)$

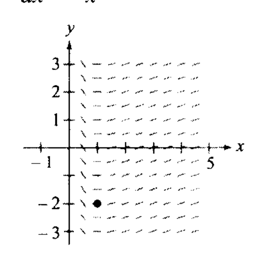
29. $\displaystyle\frac{ds}{d\theta} = \operatorname{tg} 2\theta$, $(0, 2)$ **30.** $\displaystyle\frac{dr}{dt} = \frac{\sec^2 t}{\operatorname{tg} t + 1}$, $(\pi, 4)$

Campos de direcciones En los Ejercicios 31 y 32, se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo de direcciones. *a*) Esbozar dos soluciones aproximadas de la ecuación sobre el campo de direcciones, una de las cuales pase por el punto indicado. *b*) Hallar, por integración, la solución particular y representarla en la calculadora. Comparar el resultado con los esbozos del apartado *a*).



31. $\displaystyle\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+2}$, $(0, 1)$ **32.** $\displaystyle\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{x}$, $(1, -2$





En los Ejercicios 33-40, calcular la integral y verificar el resultado con la calculadora.

33. $\int_0^4 \frac{5}{3x+1}\,dx$ 34. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+2}\,dx$

35. $\int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,dx$ 36. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

37. $\int_0^2 \frac{x^2-2}{x+1}\,dx$ 38. $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1}\,dx$

39. $\int_1^2 \frac{1-\cos\theta}{\theta-\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$ 40. $\int_{0,1}^{0,2} (\operatorname{cosec} 2\theta - \operatorname{ctg} 2\theta)^2\,d\theta$

En los Ejercicios 41-46, usar integración simbólica en la calculadora para hallar la integral. Representar el integrando.

41. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$ 42. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

43. $\int \cos(1-x)\,dx$ 44. $\int \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\sec 2x}\,dx$

45. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{cosec} x - \operatorname{sen} x)\,dx$

46. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos x}\,dx$

En los Ejercicios 47-50, probar que las dos fórmulas son equivalentes.

47. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

$\int \operatorname{tg} x\,dx = \ln|\sec x| + C$

48. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$

$\int \operatorname{ctg} x\,dx = -\ln|\operatorname{cosec} x| + C$

49. $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$

$\int \sec x\,dx = -\ln|\sec x - \operatorname{tg} x| + C$

50. $\int \operatorname{cosec} x\,dx = -\ln|\operatorname{cosec} x + \operatorname{ctg} x| + C$

$\int \operatorname{cosec} x\,dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x| + C$

En los Ejercicios 51-54, hallar $F'(x)$.

51. $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ 52. $F(x) = \int_0^x \operatorname{tg} t\,dt$

53. $F(x) = \int_x^{3x} \frac{1}{t}\,dt$ 54. $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{t}\,dt$

Aproximación En los Ejercicios 55 y 56, determinar el valor que mejor aproxima el área de la región entre la función y el eje x sobre el intervalo dado. (Basar la elección en un esbozo de la región, no en la realización de cálculos.)

55. $f(x) = \sec x$, $[0, 1]$
a) 6 *b)* −6 *c)* $\frac{1}{2}$ *d)* 1,25 *e)* 3

56. $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $[0, 4]$
a) 3 *b)* 7 *c)* −2 *d)* 5 *e)* 1

Área En los Ejercicios 57-60, calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones. Usar una calculadora para representar la región y comprobar el resultado.

57. $y = \frac{x^2+4}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$

58. $y = \frac{x+5}{x}$, $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$

59. $y = 2\sec\frac{\pi x}{6}$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$

60. $y = 2x - \operatorname{tg}(0{,}3x)$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$

61. ***Crecimiento de una población*** Una población de bacterias cambia a un ritmo

$$\frac{dP}{dt} = \frac{3.000}{1 + 0{,}25t}$$

donde t es el tiempo en días. La población inicial ($t = 0$) era 1.000. Escribir una ecuación que describa la población en cualquier instante t y calcular la población cuando $t = 3$ días.

62. ***Conducción de calor*** Calcular el tiempo requerido para enfriar un objeto de 300 °F a 250 °F evaluando

$$t = \frac{10}{\ln 2}\int_{250}^{300} \frac{1}{T-100}\,dT$$

donde t es el tiempo en minutos.

63. ***Precio medio*** La ecuación de la demanda de cierto producto es

$$p = \frac{90.000}{400 + 3x}$$

Calcular su precio medio en el intervalo $40 \leqslant x \leqslant 50$.

64. ***Ventas*** El ritmo de cambio en las ventas S es inversamente proporcional al tiempo t ($t > 1$) medido en semanas. Expresar S como función de t, sabiendo que las ventas tras 2 y 4 semanas eran 200 y 300 unidades.

65. ***Trayectoria ortogonal***

a) Representar en la calculadora la gráfica de $2x^2 - y^2 = 8$.

b) Evaluar la integral para hallar y^2 en términos de x. $y^2 = e^{-\int (1/x)\,dx}$. Para un valor particular de la constante de integración, representar el resultado en la misma pantalla del punto *a*).

c) Verificar que las tangentes a las gráficas de *a*) y *b*) son perpendiculares en los puntos de intersección.

66. Representar la función

$$f_k(x) = \frac{x^k - 1}{k}$$

para $k = 1$, 0,5 y 0,1 en [0, 10]. Hallar $\lim_{k \to 0} f_k(x)$.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 67-70, discutir si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que confirme su falsedad.

67. $(\ln x)^{1/2} = \frac{1}{2}(\ln x)$

68. $\int \ln x\,dx = (1/x) + C$

69. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|cx|, \quad c \neq 0$

70. $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$



5.3 Funciones inversas

CONTENIDO ▪
Funciones inversas ▪
Existencia de función inversa ▪
Derivada de una función inversa ▪

Funciones inversas

Recordemos de la Sección P.3 que una función puede representarse por un conjunto de pares ordenados. Así, si $f(x) = x + 3$ y $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a $B = \{4, 5, 6, 7\}$, podemos escribir

$$f: \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7)\}$$

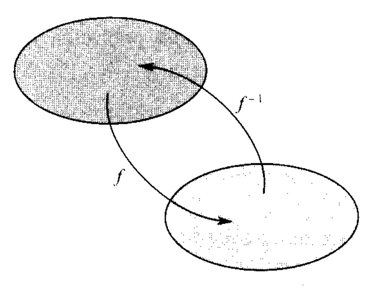
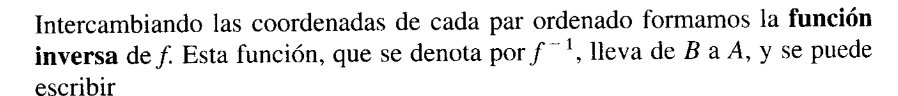


FIGURA 5.9
Dominio de f = recorrido de f^{-1}.
Dominio de f^{-1} = recorrido de f.


Intercambiando las coordenadas de cada par ordenado formamos la **función inversa** de f. Esta función, que se denota por f^{-1}, lleva de B a A, y se puede escribir

$$f^{-1}: \{(4, 1), (5, 2), (6, 3), (7, 4)\}$$

El dominio de f es el recorrido de f^{-1} y viceversa, como ilustra la Figura 5.9. Las funciones f y f^{-1} tienen el efecto de «deshacer» cada una lo que hace la otra. Es decir, al componer una con otra, se obtiene la función identidad.

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

EXPLORACIÓN

Cálculo de funciones inversas Explique cómo «deshacer» lo que hace cada una de estas funciones y, basado en tales explicaciones, escriba la función inversa de f.

a) $f(x) = x - 5$
b) $f(x) = 6x$
c) $f(x) = \frac{x}{2}$
d) $f(x) = 3x + 2$
e) $f(x) = x^3$
f) $f(x) = 4(x - 2)$

Represente en la calculadora cada función junto con su inversa. ¿Qué observación se le ocurre a la vista de esos pares de gráficas?

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN INVERSA

Una función g es la inversa de la función f si

$$f(g(x)) = x \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } g$$

y

$$g(f(x)) = x \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } f$$

La función g se denota por f^{-1} (se lee «inversa de f).

Nota. Aunque la notación utilizada para la función inversa se parece a la *notación exponencial*, es un uso distinto de -1 como superíndice. Esto es, en general, $f^{-1}(x) \neq 1/f(x)$.

He aquí algunas observaciones relevantes acerca de las funciones inversas.

1. Si g es la inversa de f, entonces f es la inversa de g.
2. El dominio de f^{-1} es el recorrido de f y el recorrido de f^{-1} es el dominio de f.
3. Una función puede no tener inversa, pero si la tiene, la inversa es única (véase Ejercicio 95).

Podemos ver f^{-1} como una operación que deshace lo hecho por f. Así, la resta deshace lo que la suma hace, y la división lo que hace la multiplicación. Usar la definición de función inversa para comprobar las siguientes inversas.

$$f(x) = x + c \quad \text{y} \quad f^{-1}(x) = x - c \quad \text{son inversas una de otra}$$

$$f(x) = cx \quad \text{y} \quad f^{-1}(x) = \frac{x}{c},\ c \neq 0 \quad \text{son inversas una de otra}$$

EJEMPLO 1 Comprobación de funciones inversas

Probar que las funciones siguientes son mutuamente inversas.

$$f(x) = 2x^3 - 1 \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$$

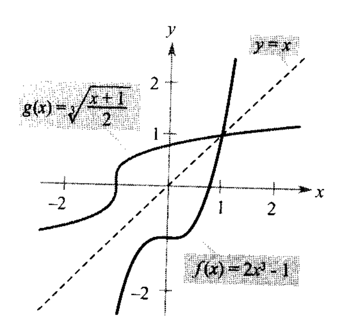


FIGURA 5.10
f y g son inversas una de otra.

Solución: Como el dominio y el recorrido de f y g son todos los números reales, las dos funciones compuestas existen para todo x. La composición de f con g es

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right)^3 - 1 \\ &= 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 \\ &= x + 1 - 1 \\ &= x \end{aligned}$$

ADVERTENCIA Compare verbalmente las funciones f y g del Ejemplo 1.

Para f : Elevar al cubo, después multiplicar por 2 y por fin restar 1.

Para g : Sumar 1, después dividir por 2 y por fin tomar la raíz cúbica.

¿Ve cómo se «deshace» el proceso?

La composición de g con f es

$$g(f(x)) = \sqrt[3]{\frac{(2x^3 - 1) + 1}{2}}$$
$$= \sqrt[3]{\frac{2x_3}{2}}$$
$$= \sqrt[3]{x^3}$$
$$= x$$

Puesto que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$, concluimos que f y g son inversas una de otra (véase Figura 5.10). □

En la Figura 5.10, las gráficas de f y g parecen reflejadas una de otra en un espejo colocado a lo largo de la recta $y = x$. La gráfica de f^{-1} es una reflexión de la de f. Ésta es la idea que generaliza el próximo teorema.

FIGURA 5.11
La gráfica de f^{-1} es la reflexión de la gráfica de f en la recta $y = x$.

TEOREMA 5.6 PROPIEDAD REFLEXIVA DE LAS FUNCIONES INVERSAS

La gráfica de f contiene el punto (a, b) si y sólo si la gráfica de f^{-1} contiene el punto (b, a).

Demostración: Si (a, b) está en la gráfica de f, entonces es $f(a) = b$ y, por tanto,

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$$

Así que (b, a) está en la gráfica de f^{-1}, como muestra la Figura 5.11. Un argumento similar demuestra la otra dirección. □

Existencia de función inversa

No toda función admite función inversa. El Teorema 5.6 sugiere un criterio gráfico: el **criterio de la recta horizontal**. Establece que f tiene inversa si y sólo si toda recta horizontal corta a la gráfica de f a lo sumo en un punto (Figura 5.12). El próximo teorema explica por qué ese criterio es válido. Recordemos de la Sección 3.3 que una función es estrictamente monótona si es creciente en todo su dominio o decreciente en todo su dominio.

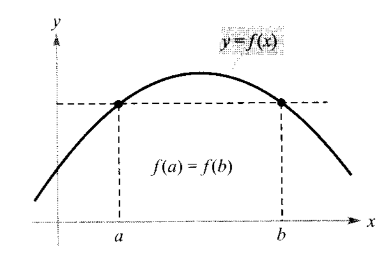
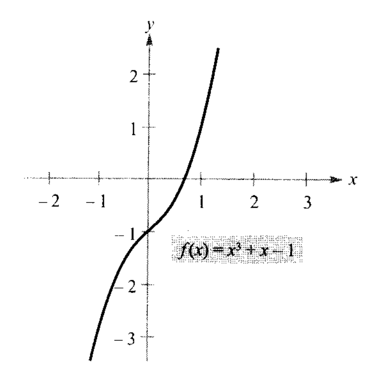


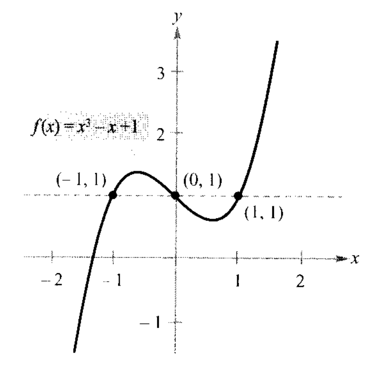
FIGURA 5.12
Si una recta horizontal corta a la gráfica de f en más de un punto, f no es inyectiva.

TEOREMA 5.7 EXISTENCIA DE FUNCIÓN INVERSA

1. **Una función tiene inversa si y sólo si es inyectiva.**
2. **Si f es estrictamente monótona en todo su dominio, entonces es inyectiva y, en consecuencia, tiene inversa.**



a) Como f es creciente en todo su dominio, tiene inversa



b) Como f no es inyectiva, no tiene inversa

FIGURA 5.13

Demostración: Para demostrar la segunda parte, recordemos de la Sección P.3 que f es inyectiva si para cualesquiera x_1 y x_2 en su dominio

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2$$

La recíproca de esta implicación, lógicamente equivalente a ella, afirma que

$$x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

Tomemos x_1 y x_2 en el dominio de f. Si $x_1 \neq x_2$, como f es estrictamente monótona, se sigue que

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{o bien} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

En cualquier caso, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Por tanto, f es inyectiva en el intervalo. La demostración de la primera parte se deja como ejercicio (Ejercicio 96). □

EJEMPLO 2 *Existencia de función inversa*

¿Cuáles de estas funciones tienen inversa?

a) $f(x) = x^3 + x - 1$ *b*) $f(x) = x^3 - x + 1$

Solución:

a) En la Figura 5.13*a* se ve que f es creciente en todo su dominio. En efecto, esa conclusión se deduce de que su derivada $f'(x) = 3x^2 + 1$, es positiva para todo x real. Por tanto, f es estrictamente monótona, luego tiene inversa.

b) En la Figura 5.13*b* vemos que la función no cumple el criterio de la recta horizontal. En otras palabras, no es inyectiva. Por ejemplo, f toma el mismo valor en $x = -1$, 0 y 1.

$$f(-1) = f(1) = f(0) = 1 \qquad \text{No inyectiva}$$

En consecuencia, el Teorema 5.7 afirma que f no tiene inversa. □

Nota. Suele ser más fácil probar que una función tiene inversa que hallar esa inversa. Así, sería algebraicamente difícil hallar la función inversa del Ejemplo 2*a*.

A continuación presentamos un procedimiento para hallar la inversa de una función.

Estrategia para hallar la inversa de una función

1. Analizar, mediante el Teorema 5.7, si la función dada $y = f(x)$ tiene inversa.
2. Despejar x en función de y: $x = g(y) = f^{-1}(y)$.
3. Intercambiar x e y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.
4. Definir como dominio de f^{-1} el recorrido de f.
5. Verificar que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

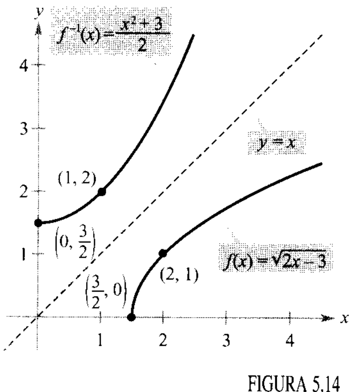


FIGURA 5.14
El dominio de f^{-1}, $[0, \infty)$, es el recorrido de f.

EJEMPLO 3 Cálculo de la inversa de una función

Hallar la función inversa de $f(x) = \sqrt{2x - 3}$.

Solución: La función tiene inversa por ser creciente en todo su dominio (Figura 5.14). Para hallar la inversa, hacemos $y = f(x)$ y despejamos x en términos de y.

$$\sqrt{2x - 3} = y \qquad \text{Hacer } y = f(x)$$

$$2x - 3 = y^2 \qquad \text{Elevar al cuadrado}$$

$$x = \frac{y^2 + 3}{2} \qquad \text{Despejar } x$$

$$y = \frac{x^2 + 3}{2} \qquad \text{Intercambiar } x \text{ e } y$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 3}{2} \qquad \text{Sustituir } y \text{ por } f^{-1}(x)$$

El dominio de f^{-1} es el recorrido de f, que es $[0, \infty)$. Podemos verificar este resultado como sigue.

$$f(f^{-1}(x)) = \sqrt{2\left(\frac{x^2 + 3}{2}\right) - 3} = \sqrt{x^2} = x, \quad x \geqslant 0$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{(\sqrt{2x - 3})^2 + 3}{2} = \frac{2x - 3 + 3}{2} = x, \quad x \geqslant \frac{3}{2}$$

□

Nota. Recuérdese que se puede utilizar cualquier letra para denotar la variable independiente. Así, por ejemplo,

$$f^{-1}(y) = \frac{y^2 + 3}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 3}{2}$$

$$f^{-1}(s) = \frac{s^2 + 3}{2}$$

representan todas una misma función.

El Teorema 5.7 es útil en el siguiente tipo de problemas. Supongamos dada una función que *no* es inyectiva en su dominio. Restringiendo el dominio a un intervalo en el que la función sea estrictamente monótona, obtenemos una nueva función que ya es inyectiva en el dominio restringido.

EJEMPLO 4 Analizando si una función es inyectiva

Probar que la función $f(x) = \text{sen}\, x$ no es inyectiva en toda la recta real. Demostrar a continuación que $[-\pi/2, \pi/2]$ es el intervalo más grande, centrado en el origen, en el que f es estrictamente monótona.

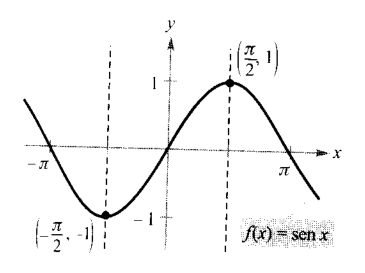


FIGURA 5.15
f es inyectiva en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

Solución: Está claro que f no es inyectiva, ya que muchos x dan un mismo valor de y. Así, sen $(0) = 0 =$ sen (π). Además, f es creciente en el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, porque su derivada

$$f'(x) = \cos x$$

es positiva en él. Finalmente, como los dos puntos terminales corresponden a extremos relativos de la función seno, concluimos que f es creciente en el intervalo cerrado $[-\pi/2, \pi/2]$ y que es el mayor intervalo, centrado en el origen, en el que f es estrictamente monótona (véase Figura 5.15). □

Derivada de una función inversa

Los dos teoremas siguientes discuten la derivada de las funciones inversas. El primero de ellos es de esperar, a la vista de la propiedad de reflexión de la función inversa (Figura 5.11). En el apéndice pueden verse las demostraciones de ambos.

EXPLORACIÓN

Representar las funciones inversas

$$f(x) = x^3$$

y

$$g(x) = x^{1/3}$$

Calcular la pendiente de f en (1, 1), (2, 8) y (3, 27), y la pendiente de g en (1, 1), (8, 2) y (27, 3). ¿Qué se observa? ¿Qué ocurre en (0, 0)?

TEOREMA 5.8 CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD DE LAS FUNCIONES INVERSAS

Sea f una función cuyo dominio es un intervalo I. Si f tiene inversa, son ciertas las siguientes afirmaciones.

1. Si f es continua en su dominio, f^{-1} es continua en su dominio.
2. Si f es creciente en su dominio, f^{-1} es creciente en su dominio.
3. Si f es decreciente en su dominio, f^{-1} es decreciente en su dominio.
4. Si f es derivable en c y $f'(c) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $f(c)$.

TEOREMA 5.9 LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN INVERSA

Sea f una función derivable en un intervalo I. Si f admite función inversa g, entonces g es derivable en todo x en el que $f'(g(x)) \neq 0$. Además,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}, \quad f'(g(x)) \neq 0$$

EJEMPLO 5 Cálculo de la derivada de una función inversa

Sea $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x - 1$.

a) Calcular $f^{-1}(x)$ para $x = 3$.
b) Calcular $(f^{-1})'(x)$ para $x = 3$.

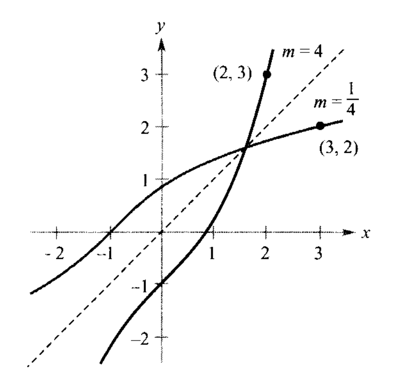


FIGURA 5.16
Las gráficas de dos funciones inversas f y f^{-1} tienen pendientes recíprocas en los puntos (a, b) y (b, a).

Solución: Antes de nada, hagamos constar que como f es inyectiva, tiene inversa.

a) Al ser $f(x) = 3$ en $x = 2$, sabemos que $f^{-1}(3) = 2$.

b) Puesto que f es derivable y tiene inversa, el Teorema 5.9, con $g = f^{-1}$, afirma que

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(2)}$$

Además, de $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 1$, se deduce que

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{3}{4}(2^2) + 1} = \frac{1}{4}$$ □

En el Ejemplo 5, nótese que la pendiente de f en el punto (2, 3) es 4 y la pendiente de f^{-1} en el punto (3, 2) es $\frac{1}{4}$. Esta relación recíproca (que se sigue del Teorema 5.9) se suele escribir como

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}}$$

EJEMPLO 6 Gráficas de funciones inversas con pendientes recíprocas

Sea $f(x) = x^2$ (para $x \geqslant 0$) y $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Probar que las pendientes de las gráficas de f y f^{-1} son recíprocas una de otra en los puntos siguientes.

a) (2, 4) y (4, 2).

b) (3, 9) y (9, 3).

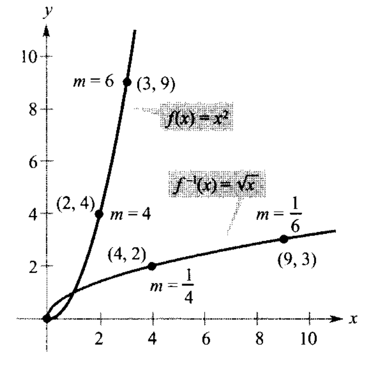


FIGURA 5.17
En (0, 0) la derivada de f es 0 y la derivada de f^{-1} no existe.

Solución: Las derivadas de f y f^{-1} vienen dadas por

$$f'(x) = 2x \quad \text{y} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

a) En (2, 4) la pendiente de la gráfica de f es $f'(2) = 2(2) = 4$. En (4, 2) la pendiente de f^{-1} es

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}$$

b) En (3, 9) la pendiente de la gráfica de f es $f'(3) = 2(3) = 6$. En (9, 3) la pendiente de f^{-1} es

$$(f^{-1})'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{2(3)} = \frac{1}{6}$$

Así pues, en los dos casos las pendientes son recíprocas, como ilustra la Figura 5.17. □

Ejercicios de la Sección 5.3

En los Ejercicios 1-8, probar que f y g son funciones inversas *a*) algebraicamente y *b*) gráficamente.

1. $f(x) = 5x + 1,$ $\qquad g(x) = (x - 1)/5$

2. $f(x) = 3 - 4x,$ $\qquad g(x) = (3 - x)/4$

3. $f(x) = x^3,$ $\qquad g(x) = \sqrt[3]{x}$

4. $f(x) = 1 - x^3,$ $\qquad g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$

5. $f(x) = \sqrt{x - 4},$ $\qquad g(x) = x^2 + 4, \quad x \geqslant 0$

6. $f(x) = 9 - x^2, \quad x \geqslant 0$ $\qquad g(x) = \sqrt{9 - x}$

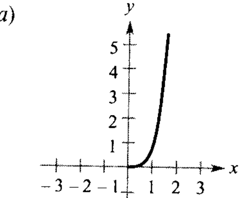
7. $f(x) = 1/x,$ $\qquad g(x) = 1/x$

8. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}, \quad x \geqslant 0,$ $\qquad g(x) = \dfrac{1 - x}{x}, \quad 0 < x \leqslant 1$

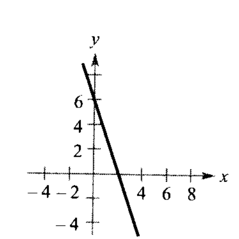
En los Ejercicios 9-12, emparejar la gráfica de f con la de su inversa [las de las inversas están rotuladas como *a*), *b*), *c*) y *d*)].



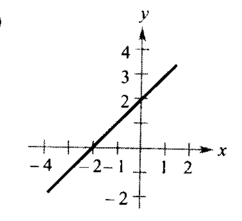
a)



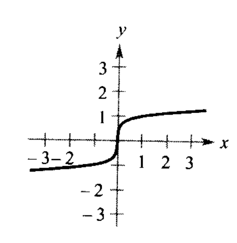
b)



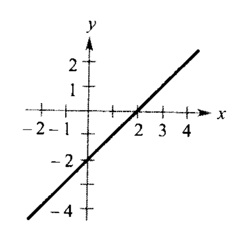
c)



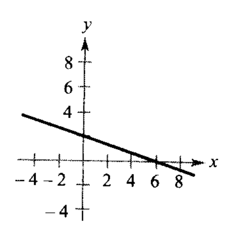
d)



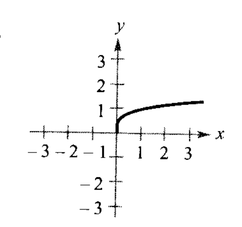
9.



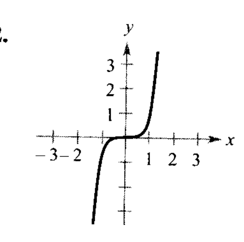
10.



11.



12.



En los Ejercicios 13-20, hallar la inversa de f. Dibujar a mano f y f^{-1}. Describir la relación entre ambas gráficas.

13. $f(x) = 2x - 3$

14. $f(x) = 3x$

15. $f(x) = x^5$

16. $f(x) = x^3 + 1$

17. $f(x) = \sqrt{x}$

18. $f(x) = x^2, \quad x \geqslant 0$

19. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \ x \geqslant 0$

20. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \ x \geqslant 2$

En los Ejercicios 21-26, hallar la inversa de f. Representar en la calculadora f y f^{-1} en una misma pantalla. Describir la relación entre ambas gráficas.

21. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

22. $f(x) = 3\sqrt[5]{2x - 1}$

23. $f(x) = x^{2/3}, \quad x \geqslant 0$

24. $f(x) = x^{3/5}$

25. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 7}}$

26. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x}$

En los Ejercicios 27 y 28, hallar la inversa de f en el intervalo indicado. Representar en la calculadora f y f^{-1} en una misma pantalla. Describir la relación entre ambas gráficas.

	Función	*Intervalo*
27.	$f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$	$-2 < x < 2$
28.	$f(x) = 2 - \dfrac{3}{x^2}$	$0 < x < 10$

Razonamiento gráfico En los Ejercicios 29-32, *a*) representar f en la calculadora, *b*) representar su inversa, y *c*) determinar si la gráfica de la relación inversa es una función inversa. Explicar la respuesta.

29. $f(x) = x^3 + x + 4$

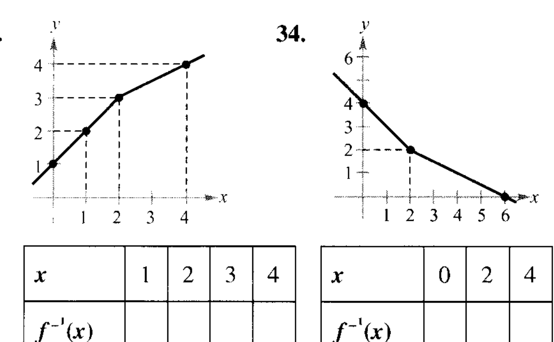
30. $h(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

31. $g(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 1}$

32. $f(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2 + 15}}$

En los Ejercicios 33 y 34, usar la gráfica de f para completar la tabla y esbozar la gráfica de f^{-1}.

33. **34.**



x	1	2	3	4
$f^{-1}(x)$				

x	0	2	4
$f^{-1}(x)$			

35. ***Coste*** Supongamos que necesitamos 50 libras de dos productos que cuestan \$1,25 y \$1,60 por libra.

a) Verificar que el coste total es $y = 1{,}25x + 1{,}60(50 - x)$ donde x es el número de libras del producto más barato.

b) Hallar la inversa de la función de coste. ¿Qué representa cada variable en la función inversa?

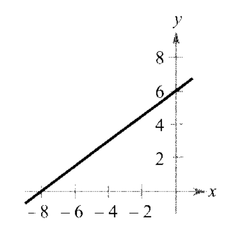
c) Usar el contexto del problema para determinar el dominio de la inversa.

d) Determinar x para que el coste total sea \$73.

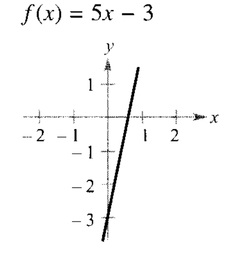
36. ***Para pensar*** La función $f(x) = k(2 - x - x^3)$ es inyectiva y $f^{-1}(3) = -2$. Hallar k.

En los Ejercicios 37-40, usar el criterio de la recta horizontal para saber si la función es inyectiva en todo su dominio y tiene, en consecuencia, inversa.

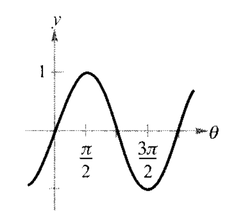
37. $f(x) = \frac{3}{4}x + 6$



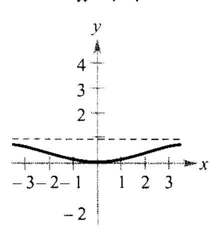
38. $f(x) = 5x - 3$



39. $f(\theta) = \text{sen}\ \theta$



40. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$



En los Ejercicios 41-46, representar la función en la calculadora. Averiguar si es inyectiva en todo su dominio.

41. $h(s) = \dfrac{1}{s - 2} - 3$

42. $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$

43. $f(x) = \ln x$

44. $f(x) = 3x\sqrt{x + 1}$

45. $g(x) = (x + 5)^3$

46. $h(x) = |x + 4| - |x - 4|$

En los Ejercicios 47-52, usar la derivada para saber si la función es estrictamente monótona en su dominio y tiene, por tanto, inversa.

47. $f(x) = (x + a)^3 + b$

48. $f(x) = \cos \dfrac{3x}{2}$

49. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$

50. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$

51. $f(x) = 2 - x - x^3$

52. $f(x) = \ln (x - 3)$

En los Ejercicios 53-58, probar que la función es estrictamente monótona en su dominio y tiene, por tanto, inversa.

	Función	*Intervalo*
53.	$f(x) = (x - 4)^2$	$[4, \infty)$
54.	$f(x) = \|x + 2\|$	$[-2, \infty)$
55.	$f(x) = \dfrac{4}{x^2}$	$(0, \infty)$
56.	$f(x) = \text{tg}\ x$	$\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$
57.	$f(x) = \cos x$	$[0, \pi]$
58.	$f(x) = \sec x$	$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Para pensar En los Ejercicios 59 y 60, la derivada de la función tiene signo constante en todo el dominio, pero la función no es inyectiva. ¿Por qué?

59. $f(x) = \text{tg}\ x$

60. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

En los Ejercicios 61-64, determinar si la función es inyectiva y, si lo es, hallar su inversa.

61. $f(x) = \sqrt{x - 2}$

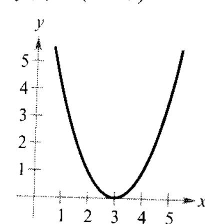
62. $f(x) = -3$

63. $f(x) = |x - 2|,\ x \leqslant 2$

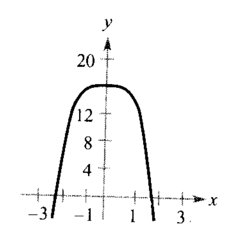
64. $f(x) = ax + b,\ a \neq 0$

En los Ejercicios 65-68, eliminar parte de la gráfica de manera tal que la parte que queda sea inyectiva. Hallar la inversa de la función correspondiente a esta gráfica restringida y dar el dominio de la inversa. (*Nota:* hay más de una respuesta correcta.)

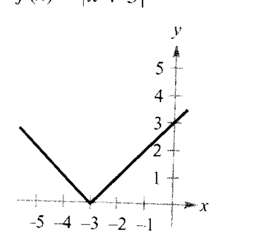
65. $f(x) = (x-3)^2$



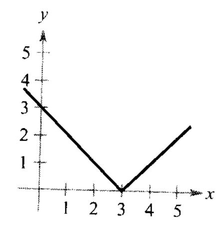
66. $f(x) = 16 - x^4$



67. $f(x) = |x+3|$



68. $f(x) = |x-3|$



Para pensar En los Ejercicios 69-72, decidir si la función admite inversa y, en caso afirmativo, hallarla.

69. $g(t)$ es el volumen de agua que ha pasado por una tubería a los t minutos de abrir la válvula de salida.

70. $h(t)$ es el nivel de la marea t horas pasada la medianoche, donde $0 \leqslant t < 24$.

71. $C(t)$ es el coste de una llamada telefónica de t minutos.

72. $A(r)$ es el área de un círculo de radio r.

En los Ejercicios 73-78, hallar $(f^{-1})'(a)$ para la función f y el número real a.

	Función	*Número real*
73.	$f(x) = x^3 + 2x - 1$	$a = 2$
74.	$f(x) = 2x^5 + x^3 + 1$	$a = -2$
75.	$f(x) = \operatorname{sen} x, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$	$a = \frac{1}{2}$
76.	$f(x) = \cos 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$	$a = 1$
77.	$f(x) = x^3 - \frac{4}{x}$	$a = 6$
78.	$f(x) = \sqrt{x-4}$	$a = 2$

En los Ejercicios 79-82, *a)* hallar los dominios de f y f^{-1}, *b)* hallar los recorridos de f y f^{-1}, *c)* representar f y f^{-1}, y *d)* probar que las pendientes de f y f^{-1} son recíprocas en los puntos indicados.

	Funciones	*Punto*
79.	$f(x) = x^3$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$
	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$	$(\frac{1}{8}, \frac{1}{2})$
80.	$f(x) = 3 - 4x$	$(1, -1)$
	$f^{-1}(x) = \dfrac{3-x}{4}$	$(-1, 1)$
81.	$f(x) = \sqrt{x-4}$	$(5, 1)$
	$f^{-1}(x) = x^2 + 4$	$(1, 5)$
82.	$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \geqslant 0$	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$
	$f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

En los Ejercicios 83 y 84, calcular dy/dx en el punto que se especifica.

83. $x = y^3 - 7y^2 + 2$ $(-4, 1)$

84. $x = 2 \ln (y^2 - 3)$ $(0, 4)$

En los Ejercicios 85-88, usar las funciones $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ y $g(x) = x^3$ para clacular el valor indicado.

85. $(f^{-1} \circ g^{-1})(1)$

86. $(g^{-1} \circ f^{-1})(-3)$

87. $(f^{-1} \circ g^{-1})(6)$

88. $(g^{-1} \circ g^{-1})(-4)$

En los Ejercicios 89-92, usar las funciones $f(x) = x + 4$ y $g(x) = 2x - 5$ para hallar la función que se indica.

89. $g^{-1} \circ f^{-1}$

90. $f^{-1} \circ g^{-1}$

91. $(f \circ g)^{-1}$

92. $(g \circ f)^{-1}$

93. Demostrar que si f y g son funciones inyectivas, entonces $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

94. Probar que si f tiene inversa, es $(f^{-1})^{-1} = f$.

95. Demostrar que si una función admite inversa, la inversa es única.

96. Demostrar que una función tiene inversa si y sólo si es inyectiva.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 97-100, discutir si la afirmación es verdadera. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que ponga de relieve su falsedad.

97. Si f es par, existe f^{-1}.

98. Si la inversa de f existe, la y-intersección de f es una x-intersección de f^{-1}.

99. Si $f(x) = x^n$, con n impar, existe f^{-1}.

100. No existe ninguna función f tal que $f = f^{-1}$.

101. ¿Es cierta la recíproca de la segunda parte del Teorema 5.7? Es decir, si f es inyectiva (y tiene inversa, por tanto), ¿debe ser necesariamente una función estrictamente monótona? Si es cierto, demostrarlo. Si no lo es, dar un contraejemplo.

102. Sea f dos veces derivable e inyectiva en un intervalo abierto I. Probar que su inversa g satisface

$$g''(x) = -\frac{f''(g(x))}{[f'(g(x))]^3}$$

Si f es creciente y cóncava hacia abajo, ¿qué concavidad tiene $f^{-1} = g$?

103. Si $f(x) = \int_2^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$, hallar $(f^{-1})'(0)$.



5.4 Funciones exponenciales: derivación e integración

CONTENIDO ▪
La función exponencial natural ▪
Derivadas de las funciones exponenciales ▪
Integración de funciones exponenciales ▪

La función exponencial natural

La función $f(x) = \ln x$ es creciente en su dominio, luego tiene inversa f^{-1}. El dominio de f^{-1} es toda la recta real y su recorrido todos los números positivos, como muestra la Figura 5.18. Así pues, para cualquier x real,

$$f(f^{-1}(x)) = \ln [f^{-1}(x)] = x \qquad x \text{ es cualquier número real}$$

Si x es racional,

$$\ln (e^x) = x \ln e = x(1) = x \qquad x \text{ es un número racional}$$

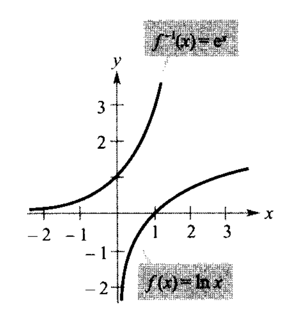


FIGURA 5.18
La inversa de la función logaritmo natural es la función exponencial natural.

Como la función logaritmo natural es inyectiva, debemos concluir que $f^{-1}(x)$ y e^x son iguales para valores *racionales* de x. La próxima definición extiende el significado de e^x haciendo que incluya a todos los valores reales de x.

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

La inversa de la función logaritmo natural $f(x) = \ln x$ se llama la **función exponencial natural** y se denota por

$$f^{-1}(x) = e^x$$

Esto es,

$$y = e^x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \ln y$$

EL NÚMERO e

El símbolo e fue utilizado por primera vez para representar la base de los logaritmos naturales por Leonhard Euler en una carta a otro matemático, Christian Goldbach, en 1731.

La relación inversa entre las funciones logaritmo natural y exponencial natural se puede resumir así:

$$\boxed{\ln (e^x) = x \quad \text{y} \quad e^{\ln x} = x} \qquad \text{Relación de inversas}$$

EJEMPLO 1 Resolución de ecuaciones exponenciales

Resolver $7 = e^{x+1}$.

Solución: Podemos convertirla en una ecuación logarítmica sin más que *tomar logaritmos naturales en ambos miembros.*

$7 = e^{x+1}$	Ecuación original
$\ln 7 = \ln (e^{x+1})$	Tomar logaritmos naturales
$\ln 7 = x + 1$	Aplicar la propiedad de inversa
$-1 + \ln 7 = x$	Despejar x
$0{,}946 \approx x$	Usar la calculadora

Comprobar esta solución en la ecuación original. □

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación logarítmica

Resolver $\ln (2x - 3) = 5$.

Solución: La convertimos en una ecuación exponencial tomando exponenciales de ambos miembros.

$\ln (2x - 3) = 5$	Ecuación original
$e^{\ln (2x-3)} = e^5$	Exponenciar ambos lados
$2x - 3 = e^5$	Aplicar la propiedad de inversa
$x = \frac{1}{2}(e^5 + 3)$	Despejar x
$x \approx 75{,}707$	Usar la calculadora

□

Las reglas usuales para operar con exponentes racionales admiten extensión a la función exponencial natural, como indica el próximo teorema.

TEOREMA 5.10 OPERACIONES CON FUNCIONES EXPONENCIALES

Sean a y b dos números reales arbitrarios.

1. $e^a e^b = e^{a+b}$
2. $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

Demostración: Para demostrar la primera, escribimos

$$\begin{aligned}\ln (e^a e^b) &= \ln (e^a) + \ln (e^b)\\ &= a + b\\ &= \ln (e^{a+b})\end{aligned}$$

Como la función $\ln x$ es inyectiva, concluimos que

$$e^a e^b = e^{a+b}$$

La demostración de la segunda se deja como ejercicio (Ejercicio 108). □

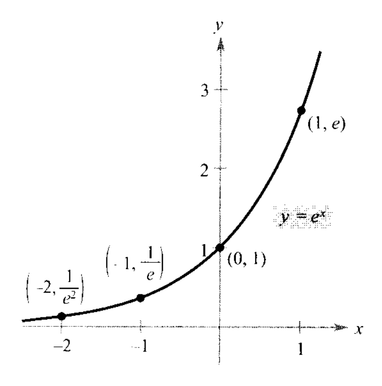


FIGURA 5.19
La función exponencial natural es creciente y su gráfica es cóncava hacia arriba.

En la Sección 5.3 vimos que la función inversa f^{-1} comparte muchas propiedades con f. Así, la función exponencial natural hereda de $\ln x$ las siguientes propiedades (véase Figura 5.19).

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

1. El dominio de $f(x) = e^x$ es $(-\infty, \infty)$, y el recorrido es $(0, \infty)$.
2. La función $f(x) = e^x$ es continua, creciente e inyectiva en todo su dominio.
3. La gráfica de $f(x) = e^x$ es cóncava hacia arriba en todo su dominio.
4. $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ y $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$.

Derivadas de las funciones exponenciales

Uno de los rasgos más intrigantes, y más útiles, de la función exponencial natural es que *su derivada es ella misma*. En otras palabras, es solución de la ecuación diferencial $y' = y$. Este resultado se enuncia en el próximo teorema.

TEOREMA 5.11 LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

Si u es una función derivable de x.

1. $\dfrac{d}{dx}[e^x] = e^x$ 2. $\dfrac{d}{dx}[e^u] = e^u \dfrac{du}{dx}$

Demostración: Para probar la propiedad 1, derivamos la igualdad $\ln e^x = x$.

$$\ln e^x = x \qquad \text{Definición de la función exponencial}$$

$$\frac{d}{dx}[\ln e^x] = \frac{d}{dx}[x] \qquad \text{Derivamos ambos lados}$$

$$\frac{1}{e^x}\frac{d}{dx}[e^x] = 1$$

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

La derivada de e^u se deduce de la regla de la cadena. □

Nota. Se puede interpretar este teorema geométricamente diciendo que la pendiente de la gráfica de $f(x) = e^x$ en cualquier punto (x, e^x) es igual a la coordenada y del punto.

EJEMPLO 3 Derivación de funciones exponenciales

a) $\dfrac{d}{dx}[e^{2x-1}] = e^u \dfrac{du}{dx} = 2e^{2x-1}$ $\qquad u = 2x - 1$

b) $\dfrac{d}{dx}[e^{-3/x}] = e^u \dfrac{du}{dx} = \left(\dfrac{3}{x^2}\right)e^{-3/x} = \dfrac{3e^{-3/x}}{x^2}$ $\qquad u = -\dfrac{3}{x}$ □

EJEMPLO 4 Localización de extremos relativos

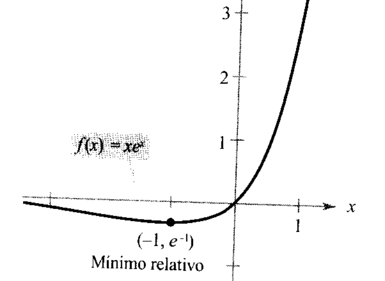


FIGURA 5.20
La derivada de f cambia de negativa a positiva en $x = -1$.

Localizar los extremos relativos de $f(x) = xe^x$.

Solución: La derivada de f es

$$f'(x) = x(e^x) + e^x(1) \qquad \text{Regla del producto}$$
$$= e^x(x + 1)$$

Como e^x nunca se hace 0, la derivada es 0 sólo para $x = -1$. Además, el criterio de la primera derivada permite concluir que es un mínimo relativo (véase Figura 5.20). Puesto que la derivada $f'(x) = e^x(x + 1)$ está definida para todo x, no hay más puntos críticos. □

EJEMPLO 5 La función densidad de probabilidad normal

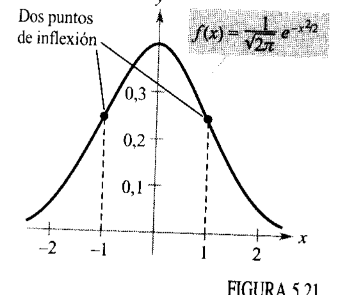
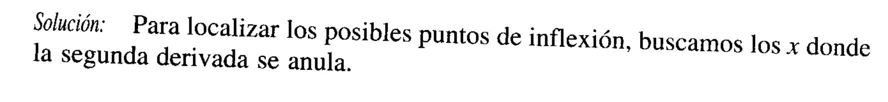


FIGURA 5.21
La curva en forma de campana asociada a una función densidad de probabilidad normal.

Probar que la *función densidad de probabilidad normal*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

tiene puntos de inflexión en $x = \pm 1$.


Solución: Para localizar los posibles puntos de inflexión, buscamos los x donde la segunda derivada se anula.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad \text{Función original}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-x)e^{-x^2/2} \qquad \text{Primera derivada}$$

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [(-x)(-x)e^{-x^2/2} + (-1)e^{-x^2/2}] \qquad \text{Regla del producto}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-x^2/2})(x^2 - 1) \qquad \text{Segunda derivada}$$

Por tanto, $f''(x) = 0$ en $x = \pm 1$ y las técnicas del Capítulo 3 llevan a concluir que ambos son puntos de inflexión (véase Figura 5.21). □

| Nota. La forma general de una función densidad de probabilidad normal (con media 0) es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2\sigma^2}$$

donde σ es la desviación típica. Esta curva en forma de «campana» tiene puntos de inflexión en $x = \pm\sigma$.

EJEMPLO 6 Médicos en EE.UU.

Entre 1980 y 1993, el número de médicos en EE.UU. sigue el modelo

$$y = 476.260e^{0,026663t}$$

donde $t = 0$ corresponde a 1980. ¿A qué ritmo estaba cambiando el número de médicos en 1988? *(Fuente: American Medical Association.)*

Solución: La derivada de ese modelo es

$$\begin{aligned} y' &= (0,026663)(476.260)e^{0,026663t} \\ &\approx 12.699e^{0,026663t} \end{aligned}$$

Evaluando la derivada en $t = 8$ vemos que el ritmo de cambio en 1988 era de unos 15.718 médicos por año.

La gráfica del modelo se muestra en la Figura 5.22. □

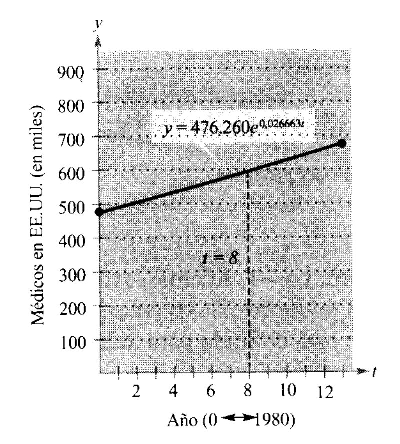


FIGURA 5.22

Integración de funciones exponenciales

Cada una de las fórmulas de derivación del Teorema 5.11 conlleva su correspondiente fórmula de integración.

TEOREMA 5.12 REGLAS DE INTEGRACIÓN DE FUNCIONES EXPONENCIALES

Si u es una función derivable de x,

1. $\int e^x\,dx = e^x + C$ 2. $\int e^u\,du = e^u + C$

EJEMPLO 7 Integración de funciones exponenciales

Hallar $\int e^{3x+1}\,dx$.

Solución: Haciendo $u = 3x + 1$, es $du = 3\,dx$, luego

$$\int e^{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{3x+1}(3)\,dx \qquad \text{Multiplicar y dividir por 3}$$

$$= \frac{1}{3} \int e^u \, du \qquad \text{Sustituir}$$

$$= \frac{1}{3} e^u + C \qquad \text{Aplicar la regla exponencial}$$

$$= \frac{e^{3x+1}}{3} + C \qquad \text{Deshacer la sustitución}$$

□

Nota. En el Ejemplo 7, el factor 3, ausente, se ha introducido para lograr que aparezca $du = 3\,dx$. Sin embargo, recordemos que no se puede introducir un factor *variable* ausente en el integrando. Así,

$$\int e^{-x^2} dx \neq \frac{1}{x} \int e^{-x^2} (x\,dx)$$

EJEMPLO 8 Integración de funciones exponenciales

Hallar $\int 5xe^{-x^2} dx$.

Solución: Si hacemos $u = -x^2$, resulta ser $du = -2x$ o sea $x\,dx = -du/2$

$$\int 5xe^{-x^2} dx = \int 5e^{-x^2}(x\,dx) \qquad \text{Reagrupar el integrando}$$

$$= \int 5e^u\left(-\frac{du}{2}\right) \qquad \text{Sustituir}$$

$$= -\frac{5}{2} \int e^u \, du \qquad \text{Sacar } -\frac{5}{2} \text{ fuera de la integral}$$

$$= -\frac{5}{2} e^u + C \qquad \text{Aplicar la regla exponencial}$$

$$= -\frac{5}{2} e^{-x^2} + C \qquad \text{Deshacer la sustitución}$$

□

EJEMPLO 9 Integración de funciones exponenciales

a) $$\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = -\int \overbrace{e^{1/x}}^{e^u} \overbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right) dx}^{du} \qquad u = \frac{1}{x}$$

$$= -e^{1/x} + C$$

b) $$\int \text{sen}\, x\, e^{\cos x} dx = -\int \overbrace{e^{\cos x}}^{e^u} \overbrace{(-\text{sen}\, x\, dx)}^{du} \qquad u = \cos x$$

$$= -e^{\cos x} + C$$

□

EJEMPLO 10 Cálculo de áreas acotadas por funciones exponenciales

a) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big]_0^1$ Véase Figura 5.23*a*

$= -e^{-1} - (-1)$

$= 1 - \dfrac{1}{e}$

$\approx 0{,}632$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \ln(1+e^x)\Big]_0^1$ Véase Figura 5.23*b*

$= \ln(1+e) - \ln 2$

$\approx 0{,}620$

c) $\displaystyle\int_{-1}^0 [e^x\cos(e^x)]\,dx = \operatorname{sen}(e^x)\Big]_{-1}^0$ Véase Figura 5.23*c*

$= \operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen}(e^{-1})$

$\approx 0{,}482$

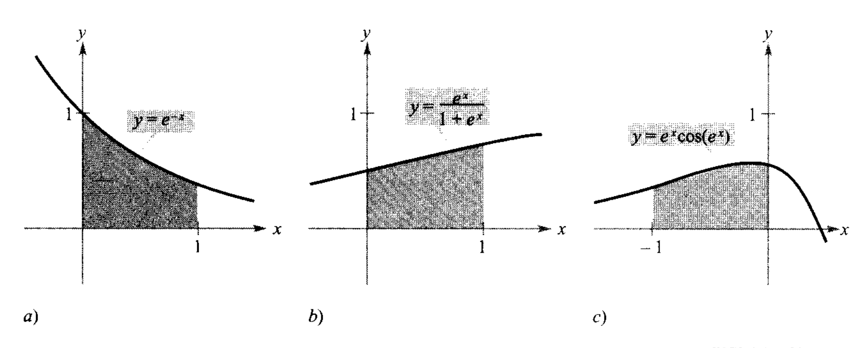


FIGURA 5.23
Áreas acotadas por funciones exponenciales. □

Ejercicios de la Sección 5.4

En los Ejercicios 1-4, escribir la ecuación exponencial en forma logarítmica o viceversa.

1. $e^0 = 1$ **2.** $e^{-2} = 0{,}1353\ldots$

3. $\ln 2 = 0{,}6931\ldots$ **4.** $\ln 0{,}5 = -0{,}6931\ldots$

En los Ejercicios 5-8, despejar x.

5. $e^{\ln x} = 4$ **6.** $e^{\ln 2x} = 12$

7. $\ln x = 2$ **8.** $\ln x^2 = 10$

En los Ejercicios 9-12, esbozar la gráfica de la función.

9. $y = e^{-x}$ **10.** $y = \frac{1}{2}e^x$

11. $y = e^{-x^2}$ **12.** $y = e^{-x/2}$

13. Representar en la calculadora $f(x) = e^x$ y la función dada. ¿Qué relación hay entre las dos gráficas?
a) $g(x) = e^{x-2}$ *b)* $h(x) = -\frac{1}{2}e^x$ *c)* $q(x) = e^{-x} + 3$

14. Representar la gráfica de la función en la calculadora y, a la vista de la gráfica, identificar sus asíntotas.
a) $f(x) = \dfrac{8}{1 + e^{-0{,}5x}}$ *b)* $g(x) = \dfrac{8}{1 + e^{-0{,}5/x}}$

En los Ejercicios 15-18, verificar que las funciones son mutuamente inversas, representando sus gráficas en los mismos ejes coordenados.

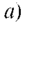
15. $f(x) = e^{2x}$
$g(x) = \ln \sqrt{x}$

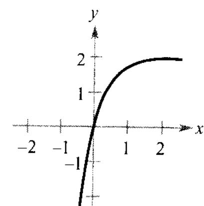
16. $f(x) = e^{x/3}$
$g(x) = \ln x^3$

17. $f(x) = e^x - 1$
$g(x) = \ln (x + 1)$

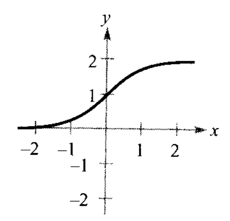
18. $f(x) = e^{x-1}$
$g(x) = 1 + \ln x$

En los Ejercicios 19-22, emparejar cada ecuación con su gráfica. Suponemos los números a y C arbitrarios, salvo que $a > 0$.

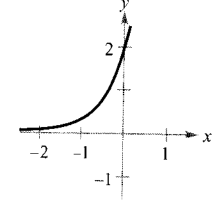




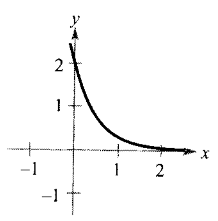
b)



c)



d)



19. $y = Ce^{ax}$

20. $y = Ce^{-ax}$

21. $y = C(1 - e^{-ax})$

22. $y = \dfrac{C}{1 + e^{-ax}}$

23. ***Análisis gráfico*** Representar en la calculadora

$$f(x) = \left(1 + \frac{0,5}{x}\right)^x \quad \text{y} \quad g(x) = e^{0,5}$$

en una misma pantalla. ¿Qué relación hay entre f y g para $x \to \infty$?

24. ***Conjetura*** Atendiendo al resultado del Ejercicio 23, formular una conjetura acerca del valor de

$$\left(1 + \frac{r}{x}\right)^x$$

cuando $x \to \infty$.

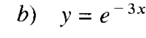
En los Ejercicios 25 y 26, comparar el número dado con el número e. ¿Es ese número mayor o menor que e?

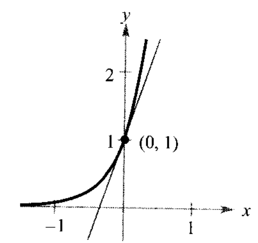
25. $\left(1 + \dfrac{1}{1.000.000}\right)^{1.000.000}$ (véase Ejercicio 24)

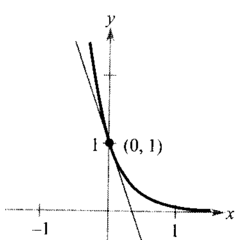
26. $1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{120} + \dfrac{1}{720} + \dfrac{1}{5.040}$

En los Ejercicios 27 y 28, calcular la pendiente de la recta tangente a la función en el punto (0, 1).

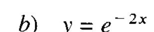
27. *a)* $y = e^{3x}$

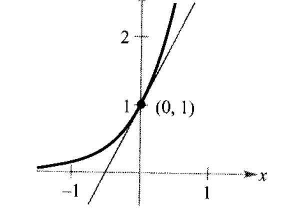

b) $y = e^{-3x}$

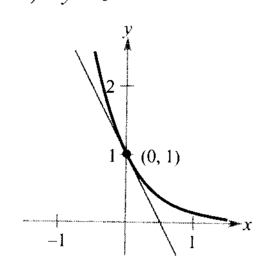




28. *a)* $y = e^{2x}$


b) $y = e^{-2x}$





En los Ejercicios 29-48, hallar la derivada de la función.

29. $f(x) = e^{2x}$

30. $f(x) = e^{1-x}$

31. $y = e^{-2x+x^2}$

32. $y = e^{-x^2}$

33. $y = e^{\sqrt{x}}$

34. $y = x^2e^{-x}$

35. $g(t) = (e^{-t} + e^t)^3$

36. $g(t) = e^{-1/t^2}$

37. $y = \ln (e^{x^2})$

38. $y = \ln \left(\dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}\right)$

39. $y = \ln (1 + e^{2x})$

40. $y = \ln \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

41. $y = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

42. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

43. $y = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$

44. $y = xe^x - e^x$

45. $f(x) = e^{-x} \ln x$

46. $f(x) = e^3 \ln x$

47. $y = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$

48. $y = \ln e^x$

En los Ejercicios 49 y 50, hallar *dy/dx* por derivación implícita.

49. $xe^y - 10x + 3y = 0$

50. $e^{xy} + x^2 - y^2 = 10$

En los Ejercicios 51 y 52, hallar la segunda derivada de la función.

51. $f(x) = (3 + 2x)e^{-3x}$

52. $g(x) = \sqrt{x} + e^x \ln x$

En los Ejercicios 53 y 54, probar que $y = f(x)$ es solución de la ecuación diferencial.

53. $y = e^x(\cos\sqrt{2}x + \operatorname{sen}\sqrt{2}x)$
$y'' - 2y' + 3y = 0$

54. $y = e^x(3\cos 2x - 4\operatorname{sen} 2x)$
$y'' - 2y' + 5y = 0$

En los Ejercicios 55-60, hallar los extremos y puntos de inflexión (si los hay). Representar f en la calculadora y confirmar los resultados.

55. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x^2/2)}$

56. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

57. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

58. $f(x) = xe^{-x}$

59. $f(x) = x^2 e^{-x}$

60. $f(x) = -2 + e^{3x}(4 - 2x)$

61. ***Área*** Calcular el área del mayor rectángulo que puede inscribirse bajo la curva $y = e^{-x^2}$ en los dos primeros cuadrantes.

62. ***Área*** Efectuar los pasos siguientes con el fin de calcular el área máxima del rectángulo de la figura.

a) Despejar c en la ecuación $f(c) = f(c + x)$.

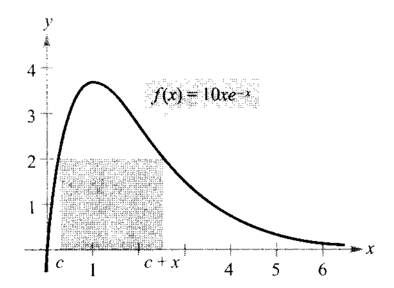
b) A la vista de ese resultado, expresar el área A en función de x. [*Ayuda:* $A = xf(c)$.]

c) Representar en la calculadora la función área y, con la gráfica, estimar las dimensiones del rectángulo de área máxima. Determinar esa área.

d) Representar en la calculadora la expresión de c hallada en *a*). Usar la gráfica para aproximar

$$\lim_{x\to 0^+} c \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} c$$

Usando este resultado, describir los cambios en dimensiones y posición del rectángulo para $0 < x < \infty$.



63. Verificar que la función

$$y = \frac{L}{1 + ae^{-x/b}}, \quad a > 0,\ b > 0,\ L > 0$$

crece a ritmo máximo cuando $y = L/2$.

64. Localizar el punto de la gráfica de $y = e^{-x}$ en el que la recta normal pasa por el origen. (Usar el método de Newton o cálculo de raíces en la calculadora.)

65. Hallar, con tres decimales, el valor de x tal que $e^{-x} = x$. (Usar el método de Newton o el cálculo de raíces en una calculadora.)

66. ***Depreciación*** El valor V de un objeto a los t años de su adquisición es

$$V = 15.000e^{-0,6286t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10$$

a) Representar la función en la calculadora.

b) Calcular el ritmo de cambio de V respecto de t cuando $t = 1$ y $t = 5$.

c) Representar en la calculadora la recta tangente a la función en $t = 1$ y $t = 5$.

67. ***Redacción*** Consideremos la función

$$f(x) = \frac{2}{1 + e^{1/x}}$$

a) Representarla en la calculadora.

b) Explicar por escrito por qué la gráfica tiene asíntota horizontal $y = 1$ y una discontinuidad evitable en $x = 0$.

68. ***Movimiento armónico*** El desplazamiento del equilibrio de una masa que oscila atada al extremo de un muelle suspendido del techo es

$$y = 1,56e^{-0,22t}\cos 4,9t$$

donde el desplazamiento y se mide en pies y t en segundos. Representar en la calculadora esa función en el intervalo [0, 10]. Hallar el valor de t en el que el desplazamiento pasa a ser menor que 3 pulgadas.

69. ***Un modelo matemático*** Un meteorólogo mide la presión atmosférica P (en kg/m^2) a varias altitudes de h km, con los resultados que muestra la tabla.

h	0	5	10	15	20
P	10.332	5.583	2.376	1.240	517

a) Representar en la calculadora los puntos $(h, \ln P)$ y usar regresión para ajustar a esos datos un modelo lineal.

b) La recta en *a*) tiene la forma $\ln P = ah + b$. Escribir la ecuación en forma exponencial.

c) Representar en la calculadora los datos y el modelo exponencial.

d) Calcular el ritmo de cambio de la presión cuando $h = 5$ y $h = 18$.

70. ***Un modelo matemático*** Un Chevrolet Beretta de 1990, con seis cilindros, transmisión automática y aire acondicionado, cuesta al por menor \$11.500. La tabla muestra su depreciación entre 1990 y 1995. *(Fuente: National Automatic Dealer's Association.)*

Año	1990	1991	1992
Valor	\$11.500	\$9.315	\$9.200

Año	1993	1994	1995
Valor	\$7.935	\$7.130	\$6.095

En lo que sigue, V denota el valor del automóvil en el año t, con $t = 0$ correspondiendo a 1990.

a) Usar regresión en la calculadora para ajustar un modelo lineal y otro cuadrático a esos datos. Representar juntos los datos y los modelos.

b) ¿Qué representa la pendiente en el modelo lineal?

c) Hallar un modelo lineal para los puntos $(t, \ln V)$ y escribir la ecuación resultante, del tipo $\ln V = at + b$, en forma exponencial.

d) Determinar la asíntota horizontal del modelo exponencial del apartado *c*). Interpretar su significado en el contexto del problema.

e) Hallar el ritmo de depreciación cuando $t = 1$ y $t = 5$.

Aproximaciones lineal y cuadrática En los Ejercicios 71 y 72, representar en la calculadora la función f en esa misma pantalla

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)(x - 0)$$

y

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{1}{2}f''(0)(x - 0)^2$$

Comparar los valores de f, P_1 y P_2 y de sus primeras derivadas en $x = 0$.

71. $f(x) = e^{x/2}$ **72.** $f(x) = e^{-x^2/2}$

73. ***Una fórmula general*** Comparar en la calculadora las gráficas de $y = e^x$ con las de las siguientes funciones.

a) $y_1 = 1 + \dfrac{x}{1!}$

b) $y_2 = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!}$

c) $y_3 = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}$

74. Identificar la forma general de los polinomios del Ejercicio 73 y extenderlo un término más. Comparar la gráfica del polinomio resultante con el de $y = e^x$. ¿Qué implica este proceso?

En los Ejercicios 75-92, hallar la integral.

75. $\int e^{5x}(5)\,dx$ **76.** $\int e^{-x^4}(-4x^3)\,dx$

77. $\int_0^1 e^{-2x}\,dx$ **78.** $\int_1^2 e^{1-x}\,dx$

79. $\int \dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}\,dx$ **80.** $\int \dfrac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}\,dx$

81. $\int_1^3 \dfrac{e^{3/x}}{x^2}\,dx$ **82.** $\int_0^{\sqrt{2}} xe^{-(x^2/2)}\,dx$

83. $\int e^x\sqrt{1 - e^x}\,dx$ **84.** $\int \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$

85. $\int \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx$ **86.** $\int \dfrac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}\,dx$

87. $\int \dfrac{5 - e^x}{e^{2x}}\,dx$ **88.** $\int \dfrac{e^{2x} + 2e^x + 1}{e^x}\,dx$

89. $\int e^{\operatorname{sen} \pi x} \cos \pi x\,dx$ **90.** $\int e^{\operatorname{tg} 2x} \sec^2 2x\,dx$

91. $\int e^{-x} \operatorname{tg}(e^{-x})\,dx$ **92.** $\int \ln(e^{2x-1})\,dx$

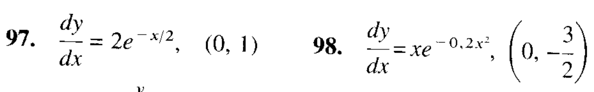
En los Ejercicios 93 y 94, resolver la ecuación diferencial.

93. $\dfrac{dy}{dx} = xe^{ax^2}$ **94.** $\dfrac{dy}{dx} = (e^x - e^{-x})^2$

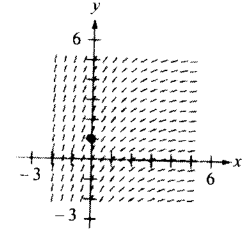
En los Ejercicios 95 y 96, hallar la solución particular de la ecuación diferencial que satisface las condiciones iniciales.

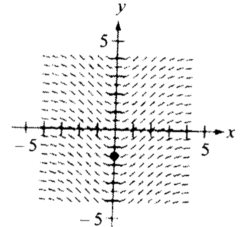
95. $f''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $f(0) = 1, f'(0) = 0$ **96.** $f''(x) = \operatorname{sen} x + e^{2x}$, $f(0) = \frac{1}{4}, f'(0) = \frac{1}{2}$

Campos de direcciones En los Ejercicios 97 y 98, se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo de direcciones. *a)* Esbozar dos soluciones de la ecuación diferencial, una de las cuales pase por el punto indicado. *b)* Hallar, por integración, la solución particular y representarla en la calculadora. Comparar el resultado con los esbozos del apartado *a*).



97. $\dfrac{dy}{dx} = 2e^{-x/2}$, $(0, 1)$ **98.** $\dfrac{dy}{dx} = xe^{-0,2x^2}$, $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$





Área En los Ejercicios 99-102, calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones. Representar cada región en la calculadora y verificar los resultados.

99. $y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 5$

100. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = a,\ x = b$

101. $y = xe^{-(x^2/2)},\ y = 0,\ x = 0,\ x = \sqrt{2}$

102. $y = e^{-2x} + 2,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2$

103. Dada la función exponencial $f(x) = e^x$, probar que:

a) $f(u - v) = \dfrac{f(u)}{f(v)}$ *b)* $f(kx) = [f(x)]^k$

104. Aproximar cada integral usando las reglas del punto medio, de los trapecios y de Simpson con $n = 12$. A continuación, aproximarlas utilizando integración en la calculadora y comparar los resultados.

a) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\, e^x\, dx$ *b)* $\displaystyle\int_0^2 2xe^{-x}\, dx$

105. ***Probabilidad*** Las baterías de automóvil tienen una vida media de 48 meses con una desviación típica de 6 meses. Las vidas de las baterías se suponen normalmente distribuidas. La probabilidad de que una batería dure entre 48 y 60 meses es

$$0{,}0665 \int_{48}^{60} e^{-0{,}0139(t-48)^2}\, dt$$

Aproximar la integral con la calculadora. Interpretar la probabilidad resultante.

106. Al ser $e^x \geqslant 1$ en $x \geqslant 0$, se sigue que

$$\int_0^x e^t\, dt \geqslant \int_0^x 1\, dt$$

Efectuar esta integración para deducir la desigualdad $e^x \geqslant 1 + x$ en $x \geqslant 0$.

107. ***Un modelo matemático*** La válvula de un depósito se abre durante 4 horas para dejar salir un producto químico en un proceso de fabricación. El ritmo de flujo de salida R (en litros por hora) en el instante t (en horas) viene dado por

t	0	1	2	3	4
R	425	240	118	71	36

a) Usando regresión en la calculadora hallar un modelo lineal para los puntos $(t, \ln R)$. Escribir la ecuación resultante, de la forma $\ln R = at + b$, en forma exponencial.

b) Representar en la calculadora los datos y el modelo exponencial.

c) Usar una integral definida para aproximar los litros que han salido durante esas cuatro horas.

108. Demostrar que $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.

109. Sea $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

a) Representar f en $(0, \infty)$ y probar que f es estrictamente decreciente en $[e, \infty)$.

b) Probar que si $e \leqslant A < B$, entonces $A^B > B^A$.

c) Usar el apartado *b)* para verificar que $e^\pi > \pi^e$.



5.5 Bases distintas de *e* y aplicaciones

CONTENIDO
- Bases distintas de *e*
- Derivación e integración
- Aplicaciones de las funciones exponenciales

Bases distintas de *e*

La **base** de la función exponencial natural es e. Esta base «natural» se puede utilizar para dar sentido a cualquier otra base a.

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL DE BASE *a*

Si a es un número real positivo ($a \neq 1$) y x es cualquier número real, la **función exponencial de base *a*** se denota a^x y se define como

$$a^x = e^{(\ln a)x}$$

Si $a = 1$, entonces $y = 1^x = 1$ es una función constante.

Estas funciones satisfacen las leyes usuales de los exponentes. Recordamos algunas de esas propiedades.

1. $a^0 = 1$
2. $a^x a^y = a^{x+y}$
3. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
4. $(a^x)^y = a^{xy}$

EJEMPLO 1 Semivida radiactiva

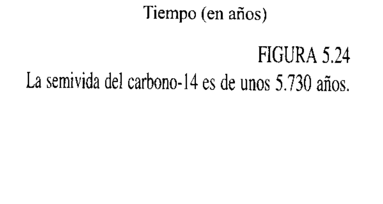


FIGURA 5.24
La semivida del carbono-14 es de unos 5.730 años.

La semivida del carbono-14 es de unos 5.730 años. Si en este momento hay 1 g de carbono-14 en una muestra, ¿cuánto quedará al cabo de 10.000 años?

Solución: Denotemos por $t = 0$ el momento actual y por y los gramos de carbono-14 en la muestra. Usando base $\frac{1}{2}$ podemos tomar como modelo para y la ecuación

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5.730}$$

Nótese que cuando $t = 5.730$, la cantidad se ha reducido a la mitad.

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{5.730/5.730} = \frac{1}{2} \text{ gramos}$$

Cuando $t = 11.460$, se ha reducido a un cuarto de la cantidad inicial y así sucesivamente. Para hallar la cantidad que queda al cabo de 10.000 años sustituimos $t = 10.000$.

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{10.000/5.730}$$
$$\approx 0{,}30 \text{ gramos}$$

La gráfica de y se muestra en la Figura 5.24. □

Las funciones logarítmicas de base general se definen de manera muy similar a las exponenciales.

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARITMO DE BASE a

Si a es un número real positivo ($a \neq 1$) y x es cualquier número real positivo, la **función logarítmica de base a** se denota $\log_a x$ y se define como

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x$$

Las funciones logarítmicas de base general a gozan de las mismas propiedades que la función logaritmo natural (Teorema 5.2).

1. $\log_a 1 = 0$ — log de 1
2. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ — log de un producto
3. $\log_a x^n = n \log_a x$ — log de una potencia
4. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ — log de un cociente

De las definiciones de las funciones exponenciales y logarítmicas de base a se sigue que $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a x$ son funciones inversas una de otra.

PROPIEDADES COMO FUNCIONES INVERSAS

1. $y = a^x$ si y sólo si $x = \log_a y$
2. $a^{\log_a x} = x$, para $x > 0$
3. $\log_a a^x = x$, para todo x

La función logaritmo de base 10 se llama **función logaritmo común** (o **decimal**). Para ella, $y = 10^x$ si y sólo si $x = \log_{10} y$.

EJEMPLO 2 Bases distintas de e

Despejar x en las siguientes ecuaciones.

a) $3^x = \dfrac{1}{81}$ *b*) $\log_2 x = -4$

Solución:

a) Aplicamos la función logaritmo de base 3 en ambos lados de la ecuación

$$3^x = \frac{1}{81}$$

$$\log_3 3^x = \log_3 \frac{1}{81}$$

$$x = \log_3 3^{-4}$$

$$x = -4$$

b) Aplicamos la función exponencial de base 3 en ambos lados de la ecuación

$$\log_2 x = -4$$

$$2^{\log_2 x} = 2^{-4}$$

$$x = \frac{1}{2^4}$$

$$x = \frac{1}{16}$$

□

Derivación e integración

Para derivar funciones exponenciales y logarítmicas en base arbitraria hay tres opciones: 1) usar las definicioens de a^x y $\log_a x$ y derivar mediante las reglas válidas para las funciones de base e, 2) usar derivación logarítmica, o 3) usar las siguientes reglas de derivación.

TEOREMA 5.13 DERIVADAS EN BASE ARBITRARIA

Sea a un número real positivo ($a \neq 1$) y sea u una función derivable de x.

1. $\dfrac{d}{dx}[a^x] = (\ln a)a^x$
2. $\dfrac{d}{dx}[a^u] = (\ln a)a^u \dfrac{du}{dx}$
3. $\dfrac{d}{dx}[\log_a x] = \dfrac{1}{(\ln a)x}$
4. $\dfrac{d}{dx}[\log_a u] = \dfrac{1}{(\ln a)u} \dfrac{du}{dx}$

Demostración: Por definición, $a^x = e^{(\ln a)x}$. Por tanto, la primera regla se prueba haciendo $u = (\ln a)x$ y derivando:

$$\frac{d}{dx}[a^x] = \frac{d}{dx}[e^{(\ln a)x}] = e^u \frac{du}{dx} = e^{(\ln a)x}(\ln a) = (\ln a)a^x$$

La tercera se demuestra así:

$$\frac{d}{dx}[\log_a x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\ln a} \ln x\right] = \frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{(\ln a)x}$$

La segunda y la cuarta son simplemente versiones vía la regla de la cadena de la primera y la tercera. □

Nota. Estas reglas de derivación son análogas a las de las funciones de base e. En efecto, sólo difieren en factores constantes $\ln a$ y $1/\ln a$. Ahí vemos una de las razones que hacen de e la base más conveniente para el cálculo.

EJEMPLO 3 Derivación de funciones en base distinta de e

Derivar cada una de estas funciones.

a) $y = 2^x$ *b)* $y = 2^{3x}$ *c)* $y = \log_{10} \cos x$

Solución:

a) $y' = \dfrac{d}{dx}[2^x] = (\ln 2)2^x$

b) $y' = \dfrac{d}{dx}[2^{3x}] = (\ln 2)2^{3x}(3) = (3 \ln 2)2^{3x}$

Escriba 2^{3x} como 8^x y derive para comprobar que obtiene el mismo resultado.

c) $y' = \dfrac{d}{dx}[\log_{10} \cos x] = \dfrac{-\text{sen } x}{[(\ln 10) \cos x]} = -\dfrac{1}{\ln 10} \text{ tg } x$ □

Ocasionalmente, un integrando contiene una función exponencial en base distinta de e. En tal caso, hay dos opciones: 1) pasar a base e utilizando la fórmula $a^x = e^{(\ln a)x}$ y entonces integrar, o 2) integrar directamente, usando la fórmula de integración (que se deduce del Teorema 5.13):

$$\int a^x\,dx = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^x + C$$

EJEMPLO 4 Integración de una función exponencial en base distinta de e

Hallar $\int 2^x\,dx$.

Solución:

$$\int 2^x\,dx = \frac{1}{\ln 2}\,2^x + C$$ □

Al introducir la regla de las potencias $D_x[x^n] = nx^{n-1}$, en el Capítulo 2, exigimos que n fuese racional. Ahora extenderemos esa regla a cualquier valor real de n. Intente probar este teorema utilizando derivación logarítmica.

TEOREMA 5.14 LA REGLA DE LAS POTENCIAS PARA EXPONENTES REALES

Sea n cualquier número real y sea u una función derivable de x.

1. $\dfrac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$ 2. $\dfrac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$

El próximo ejemplo compara las derivadas de cuatro tipos de funciones. Cada una de ellas requiere una fórmula de derivación, dependiendo de si la base o el exponente son constantes o variables.

EJEMPLO 5 Comparando variables y constantes

a) $\dfrac{d}{dx}[e^e] = 0$ Regla de la constante

b) $\dfrac{d}{dx}[e^x] = e^x$ Regla de la exponencial

c) $\dfrac{d}{dx}[x^e] = ex^{e-1}$ Regla de las potencias

d) $y = x^x$ Derivación logarítmica

$\ln y = x \ln x$

$\dfrac{y'}{y} = x\left(\dfrac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) = 1 + \ln x$

$y' = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$ □

Nota. Convénzase de que no hay regla sencilla de derivación para $y = x^x$. En general, si $y = u(x)^{v(x)}$, es preciso recurrir a la derivación logarítmica.

Aplicaciones de las funciones exponenciales

n	A
1	\$1.080,00
2	\$1.081,60
4	\$1.082,43
12	\$1.083,00
365	\$1.083,28

Si se depositan P dólares en una cuenta a una tasa r anual de interés (en forma decimal) y los intereses se acumulan en la cuenta, ¿cuál es el capital al cabo de 1 año? La respuesta depende del número n de veces que el interés se compone (se acumula), de acuerdo con la fórmula

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

Por ejemplo, el resultado para un depósito de \$1.000 al 8 por 100 de interés compuesto n veces al año se muestra en la tabla.

Al crecer n, el balance A tiende a un límite. Para hallarlo, utilizamos el próximo teorema. Para comprobar que su contenido parece razonable, calcule $[(x+1)/x]^x$ para varios valores de x (véase tabla inferior). Una demostración del teorema se puede consultar en el apéndice.

x	$\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$
10	2,59374
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71815
100.000	2,71827
1.000.000	2,71828

TEOREMA 5.15 UN LÍMITE QUE INVOLUCRA AL NÚMERO e

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = e$$

Volvamos ahora a la fórmula del balance A en una cuenta de interés compuesto n veces al año. Tomando el límite para n tendiendo a infinito, obtenemos

$$A = \lim_{n\to\infty} P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \qquad \text{Tomar el límite para } n \to \infty$$

$$= P \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^{n/r}\right]^r \qquad \text{Reescribir}$$

$$= P\left[\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^r \qquad \text{Hacer } x = n/r. \text{ Entonces } x \to \infty \text{ cuando } n \to \infty$$

$$= Pe^r \qquad \text{Aplicar el Teorema 5.15}$$

Este límite da el balance tras un año de interés **compuesto continuamente**. Así pues, para un depósito inicial de \$1.000, el balance a fin de año sería

$$A = 1.000e^{0,08} \approx \$1.083,29$$

Estos resultados se resumen a continuación.

Resumen de fórmulas de interés compuesto

Sea P = cantidad depositada, t = número de años, A = balance al final de t años, r = tasa de interés anual (forma decimal) y n = número de veces que el interés se compone al año.

1. Compuesto n veces al año: $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$
2. Compuesto continuamente: $A = Pe^{rt}$

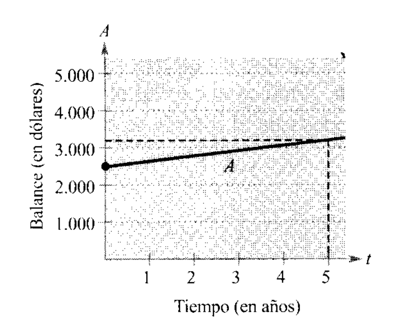


FIGURA 5.25
El balance en una cuenta crece exponencialmente.

EJEMPLO 6 Comparación de interés compuesto trimestral o continuamente

Se depositan \$2.500 en una cuenta al 5 por 100 anual de interés. Calcular el balance a los 5 años si el interés se compone *a*) trimestralmente, *b*) mensualmente, *c*) continuamente.

Solución:

a) $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = 2.500\left(1 + \frac{0{,}05}{4}\right)^{4(5)}$ Compuesto trimestralmente

$= 2.500(1{,}0125)^{20}$

$\approx \$3.205{,}09$

b) $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = 2.500\left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{12(5)}$ Compuesto mensualmente

$\approx 2.500(1{,}0041667)^{60}$

$\approx \$3.208{,}40$

c) $A = Pe^{rt} = 2.500[e^{0{,}05(5)}]$ Compuesto continuamente

$= 2.500e^{0{,}25}$

$\approx \$3.210{,}06$

La Figura 5.25 muestra cómo crece el balance durante los 5 años. Hay que hacer constar que la escala de la figura no distingue gráficamente entre los tres tipos de crecimiento exponencial en *a*), *b*) y *c*). □

EJEMPLO 7 Crecimiento de un cultivo de bacterias

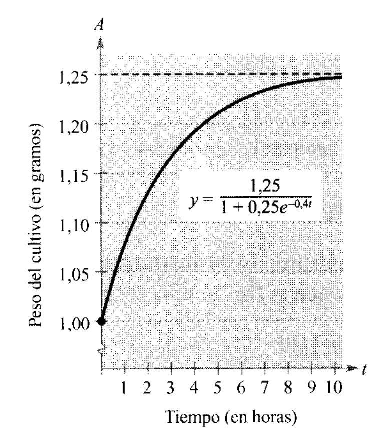


FIGURA 5.26
El límite del peso del cultivo cuando $t \to \infty$ es 1,25 g.

Un cultivo de bacterias crece según la *función logística*

$$y = \frac{1{,}25}{1 + 0{,}25e^{-0{,}4t}}, \quad t \geqslant 0$$

donde *y* es el peso del cultivo en gramos y *t* el tiempo en horas. Calcular el peso del cultivo tras *a*) 0 horas, *b*) 1 hora, y *c*) 10 horas. *d*) ¿Cuál es el límite cuando *t* tiende a infinito?

Solución:

a) Cuando $t = 0$, $y = \frac{1{,}25}{1 + 0{,}25e^{-0{,}4(0)}} = \frac{1{,}25}{1{,}25} = 1$ g

b) Cuando $t = 1$, $y = \frac{1{,}25}{1 + 0{,}25e^{-0{,}4(1)}} \approx 1{,}071$ g

c) Cuando $t = 10$, $y = \frac{1{,}25}{1 + 0{,}25e^{-0{,}4(10)}} \approx 1{,}244$ g

d) Finalmente, tomando el límite para *t* tendiendo a infinito, se obtiene

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1{,}25}{1 + 0{,}25e^{-0{,}4t}} = \frac{1{,}25}{1 + 0} = 1{,}25\text{g}$$

La Figura 5.26 muestra la gráfica de la función. □

Ejercicios de la Sección 5.5

En los Ejercicios 1-4, evaluar la expresión con la calculadora.

1. $\log_2 (\frac{1}{8})$ **2.** $\log_{27} 9$

3. $\log_7 1$ **4.** $\log_a \frac{1}{a}$

En los Ejercicios 5-8, escribir la ecuación exponencial en forma logarítmica o viceversa.

5. *a)* $2^3 = 8$ *b)* $3^{-1} = \frac{1}{3}$

6. *a)* $27^{2/3} = 9$ *b)* $16^{3/4} = 8$

7. *a)* $\log_{10} 0{,}01 = -2$ *b)* $\log_{0,5} 8 = -3$

8. *a)* $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ *b)* $49^{1/2} = 7$

En los Ejercicios 9-14, despejar x o b.

9. *a)* $\log_{10} 1.000 = x$ *b)* $\log_{10} 0{,}1 = x$

10. *a)* $\log_4 \frac{1}{64} = x$ *b)* $\log_5 25 = x$

11. *a)* $\log_3 x = -1$ *b)* $\log_2 x = -4$

12. *a)* $\log_b 27 = 3$ *b)* $\log_b 125 = 3$

13. *a)* $x^2 - x = \log_5 25$ *b)* $3x + 5 = \log_2 64$

14. *a)* $\log_3 x + \log_3 (x - 2) = 1$ *b)* $\log_{10} (x + 3) - \log_{10} x = 1$

En los Ejercicios 15-20, dibujar a mano la gráfica de la función.

15. $y = 3^x$ **16.** $y = 3^{x-1}$

17. $y = (\frac{1}{3})^x$ **18.** $y = 2^{x^2}$

19. $h(x) = 5^{x-2}$ **20.** $y = 3^{-|x|}$

En los Ejercicios 21-24, usar la calculadora para representar la función y aproximar sus ceros con tres decimales.

21. $g(x) = 6(2^{1-x}) = 25$

22. $f(t) = 300(1{,}0075^{12t}) - 735{,}41$

23. $h(s) = 32 \log_{10} (s - 2) + 15$

24. $g(x) = 1 - 2 \log_{10} [x(x - 3)]$

En los Ejercicios 25 y 26, ilustrar que las funciones son inversas una de otra dibujando sus gráficas en unos mismos ejes.

25. $f(x) = 4^x$, $g(x) = \log_4 x$ **26.** $f(x) = 3^x$, $g(x) = \log_3 x$

27. ***Para pensar*** La tabla adjunta se ha formado evaluando una cierta función. Decidir cuáles de las afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas. Explicar la razón en cada caso.
a) y es una función exponencial de x.
b) y es una función logarítmica de x.
c) x es una función exponencial de y.
d) y es una función lineal de x.

x	1	2	8
y	0	1	3

28. ***Para pensar*** Sea $f(x) = \log_{10} x$.
a) ¿Cuál es el dominio de f?
b) Hallar f^{-1}.
c) Si x está entre 1.000 y 10.000, ¿en qué intervalo es en el que hay que buscar $f(x)$?
d) ¿En qué intervalo ha de estar x si $f(x) < 0$?
e) Para que $f(x)$ crezca una unidad, ¿por qué factor hay que multiplicar x?
f) Hallar la razón entre x_1 y x_2 sabiendo que $f(x_1) = 3n$ y $f(x_2) = n$.

En los Ejercicios 29-44, derivar la función propuesta.

29. $f(x) = 4^x$ **30.** $g(x) = 2^{-x}$

31. $y = 5^{x-2}$ **32.** $y = x(7^{-3x})$

33. $g(t) = t^2 2^t$ **34.** $f(t) = \frac{3^{2t}}{t}$

35. $h(\theta) = 2^{-\theta} \cos \pi\theta$ **36.** $g(\alpha) = 5^{-\alpha/2} \operatorname{sen} 2\alpha$

37. $y = \log_3 x$ **38.** $y = \log_{10} 2x$

39. $f(x) = \log_2 \frac{x^2}{x-1}$ **40.** $h(x) = \log_3 \frac{x\sqrt{x-1}}{2}$

41. $y = \log_5 \sqrt{x^2 - 1}$ **42.** $y = \log_{10} \frac{x^2 - 1}{x}$

43. $g(t) = \frac{10 \log_4 t}{t}$ **44.** $f(t) = t^{3/2} \log_2 \sqrt{t + 1}$

En los Ejercicios 45-48, hallar dy/dx por derivación logarítmica.

45. $y = x^{2/x}$ **46.** $y = x^{x-1}$

47. $y = (x - 2)^{x+1}$ **48.** $y = (1 + x)^{1/x}$

49. ***Orden de funciones*** Ordenar las funciones $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = x^x$, $h(x) = x^2$ y $k(x) = 2^x$ de mayor a menor ritmo de crecimiento para valores grandes de x.

50. Dada la función exponencial $f(x) = a^x$, probar que
a) $f(u + v) = f(u) \cdot f(v)$ *b*) $f(2x) = [f(x)]^2$

51. ***Inflación*** Si la tasa de inflación anual es, en promedio, del 5 por 100 en los próximos 10 años, el coste C de bienes o servicios en los años de esa década es

$$C(t) = P(1{,}05)^t$$

donde P es el coste presente y t el tiempo en años.
a) Si el cambio de aceite de su automóvil cuesta hoy \$24,95, estime el precio dentro de 10 años.
b) Calcular el ritmo de cambio de C respecto de t para $t = 1$ y $t = 8$.
c) Verificar que el ritmo de cambio de C es proporcional a C. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

52. ***Depreciación*** Tras t años, el valor de un automóvil adquirido por \$20.000 es

$$V(t) = 20.000\left(\frac{3}{4}\right)^t$$

a) Con una calculadora, representar la función y hallar el valor del automóvil dos años después de su compra.
b) Calcular el ritmo de cambio de V respecto de t para $t = 1$ y $t = 4$.
c) Usar la calculadora para representar $V'(t)$ y hallar su asíntota horizontal. Interpretar su significado en el contexto del problema.

Interés compuesto En los Ejercicios 53-56, completar la tabla para determinar el balance A de P dólares depositados a una tasa r de interés durante t años y compuesto n veces al año.

n	1	2	4	12	365	Interés continuo
A						

53. $P = \$1.000$
$r = 3\frac{1}{2}$ por 100
$t = 10$ años

54. $P = \$2.500$
$r = 6$ por 100
$t = 20$ años

55. $P = \$1.000$
$r = 5$ por 100
$t = 30$ años

56. $P = \$2.500$
$r = 5$ por 100
$t = 40$ años

Interés compuesto En los Ejercicios 57-60, completar la tabla para determinar la cantidad P (valor presente) que debe ser depositada a una tasa r de interés anual para producir un balance final de \$100.000 a los t años.

t	1	10	20	30	40	50
P						

57. $r = 5$ por 100 Interés continuo

58. $r = 6$ por 100 Interés continuo

59. $r = 5$ por 100 Compuesto mensualmente.

60. $r = 7$ por 100 Compuesto diariamente.

61. ***Interés compuesto*** Una inversión renta un 6 por 100 compuesto diariamente. ¿Cuál de las siguientes opciones produciría un balance mayor a los 8 años?
a) \$20.000 ahora
b) \$30.000 en 8 años
c) \$8.000 ahora, y \$20.000 en 4 años
d) \$9.000 ahora, \$9.000 en 4 años, y \$9.000 en 8 años

62. ***Interés compuesto*** Se depositan \$100 al r por 100 de interés compuesto continuamente durante 20 años. Representar en la calculadora las funciones exponenciales que describen el crecimiento del capital para cada una de las tasas de interés que se especifican. Comparar los balances finales.
a) $r = 3$ por 100 *b*) $r = 5$ por 100
c) $r = 6$ por 100

63. ***Producción de madera*** La producción V (en millones de m^3 por acre) de un bosque de edad t años es

$$V = 6{,}7e^{(-48{,}1)/t}$$

a) Calcular el volumen límite de madera por acre cuando t tiende a infinito.
b) Hallar el ritmo de cambio de V cuando $t = 20$ y cuando $t = 60$ años.

64. ***Teoría del aprendizaje*** Un modelo matemático para la proporción P de respuestas correctas en un experimento sobre aprendizaje resultó seguir el modelo

$$P = \frac{0{,}83}{1 + e^{-0{,}2n}}$$

a) Calcular la proporción P límite cuando n tiende a infinito.
b) Calcular el ritmo de cambio de P después de $n = 3$ y de $n = 10$ pruebas.

65. ***Defoliación forestal*** Para estimar la defoliación producida por las lagartas durante un año, un ingeniero forestal cuenta el número de montones de huevos x en $\frac{1}{40}$ de acre en el otoño anterior. El porcentaje de defoliación viene dado aproximadamente por

$$y = \frac{300}{3 + 17e^{-0,0625x}}$$

donde x denota el número de montones en miles. *(Fuente: USDA Forest Service.)*

a) Representar la función en la calculadora.
b) Estimar el porcentaje de defoliación si se cuentan 2.000 montones.
c) Estimar el número de montones de huevos en un bosque sabiendo que se han defoliado los $\frac{2}{3}$ de ese bosque.
d) Estimar, mediante el Cálculo, el valor de x para el que y está creciendo a ritmo máximo.

66. ***Crecimiento de poblaciones*** Se repuebla un río con 500 peces y su población crece de acuerdo con la curva logística

$$p(t) = \frac{10.000}{1 + 19e^{-t/5}}$$

donde t se mide en meses.

a) Representar la función en la calculadora.
b) ¿Cuál es el tamaño límite de la población de peces?
c) ¿A qué ritmo crece la población al final del primer mes? ¿Y al final del décimo?
d) ¿Al final de qué mes crece más deprisa?

67. ***Un modelo matemático*** La tabla recoge los gastos en Sanidad y (en miles de millones de dólares) en EE.UU. entre 1984 y 1993, con $x = 4$ correspondiendo a 1984. *(Fuente: U.S. Health Care Financing Administration.)*

x	4	5	6	7	8
y	396,0	434,5	466,0	506,2	562,3

x	9	10	11	12	13
y	623,9	696,6	755,6	820,3	884,2

a) Usar la calculadora para hallar un modelo exponencial que ajuste esos datos, y representar los datos y el modelo.
b) Usar la calculadora para hallar un modelo logarítmico que ajuste esos datos, y representar los datos y el modelo.
c) ¿Qué modelo ajusta mejor los datos?
d) Calcular el ritmo de crecimiento de cada modelo para el año 2000. Con el fin de ahorrar dinero en Sanidad, ¿cuál sería el modelo preferible? Explicar la respuesta.

68. ***Comparación de modelos*** El montante y (en miles de millones de dólares) de las donaciones filantrópicas de individuos, fundaciones, etc., entre 1983 y 1993 en EE.UU. viene dado en la tabla adjunta, donde $x = 3$ corresponde a 1983. *(Fuente: AAFRC Trust for Philantropy.)*

x	3	4	5	6	7	8
y	63,2	68,8	73,2	83,9	90,3	98,4

x	9	10	11	12	13
y	107,0	111,9	117,1	121,9	126,2

a) Usar regresión en la calculadora para ajustar los siguientes modelos a los datos.

$$y_1 = ax + b \qquad y_2 = a + b \ln x$$
$$y_3 = ab^x \qquad y_4 = ax^b$$

b) Representar en la calculadora los datos y los modelos. ¿Cuál de los modelos se ajusta mejor a los datos?
c) Interpretar la pendiente del modelo lineal en el contexto del problema.
d) Calcular el ritmo de cambio de cada modelo para el año 1992. ¿Cuál de ellos crece a mayor ritmo en 1992?

En los Ejercicios 69-76, hallar la integral.

69. $\int 3^x \, dx$

70. $\int 4^{-x} \, dx$

71. $\int_{-1}^{2} 2^x \, dx$

72. $\int_{-2}^{0} (3^3 - 5^2) \, dx$

73. $\int x(5^{-x^2}) \, dx$

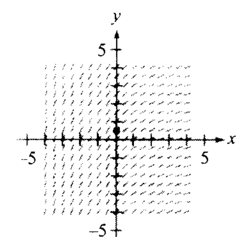
74. $\int (3 - x)7^{(3-x)^2} \, dx$

75. $\int \frac{3^{2x}}{1 + 3^{2x}} \, dx$

76. $\int 2^{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx$

Campos de direcciones En los Ejercicios 77 y 78, se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo de direcciones. *a*) Esbozar dos soluciones aproximadas de la ecuación sobre el campo de direcciones, una de las cuales pase por el punto indicado. *b*) Hallar, por integración, la solución particular y representarla en la calculadora. Comparar el resultado con los esbozos del apartado *a*).

77. $\dfrac{dy}{dx} = 0{,}4^{x/3}, \quad \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$



78. $\dfrac{dy}{dx} = e^{\operatorname{sen} x} \cos x, \quad (\pi, 2)$

79. ***Conjetura***

a) Aproxime, con ayuda de una calculadora, las integrales de las funciones

$$f(t) = 4\left(\frac{3}{8}\right)^{2t/3}, \quad g(t) = 4\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{4}\right)^{t}$$

$$\text{y} \quad h(t) = 4e^{-0{,}653886t}$$

en el intervalo [0, 4].

b) Represente en la calculadora las tres funcines.

c) A la vista de los resultados de los apartados *a*) y *b*), formule una conjetura acerca de esas tres funciones. ¿Podría haber enunciado la conjetura partiendo sólo del apartado *a*)? Explique la respuesta. Demuestre su conjetura analíticamente.

80. ***Área*** Calcular el área de la región acotada por las gráficas de $y = 3^x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3$.

81. ***Movimiento continuo de caja*** El valor presente P de un movimiento de caja anual de $2.000 al 6 por 100 compuesto continuamente durante 10 años es

$$P = \int_0^{10} 2.000e^{-0{,}06t}\, dt$$

Hallar P.

82. Completar la tabla para mostrar que e puede definirse también como $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + x)^{1/x}$.

x	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}
$(1+x)^{1/x}$					

En los Ejercicios 83 y 84, hallar una función exponencial que ajuste los datos experimentales tomados en el tiempo t.

83.

t	0	1	2	3	4
y	1.200,00	720,00	432,00	259,20	155,52

84.

t	0	1	2	3	4
y	600,00	630,00	661,50	694,58	729,30

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 85-90, decidir si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que ponga de relieve su falsedad.

85. $e = 271.801/99.990$.

86. Si $f(x) = \ln x$, entonces $f(e^{n+1}) - f(e^n) = 1$ para cualquier valor de n.

87. Las funciones $f(x) = 2 + e^x$ y $g(x) = \ln(x - 2)$ son inversas una de otra.

88. La función exponencial $y = Ce^x$ es solución de la ecuación diferencial $d^ny/dx^n = y$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

89. Las gráficas de $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en ángulo recto.

90. Si $f(x) = g(x)e^x$, los únicos ceros de f son los ceros de g.

91. Resolver la ecuación diferencial logística

$$\frac{dy}{dt} = \frac{8}{25}y\left(\frac{5}{4} - y\right), \quad y(0) = 1$$

y obtener la función de crecimiento logístico del Ejemplo 7. $\left[\textit{Ayuda: } \dfrac{1}{y(\frac{5}{4} - y)} = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{\frac{5}{4} - y}\right).\right]$

92. Hallar una ecuación para la recta tangente a $y = x^{\operatorname{sen} x}$ en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

Sea $f(x) = \begin{cases} |x|^x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

a) Representar f en la calculadora en una ventana $-3 \leqslant x \leqslant 3$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$. ¿Cuál es el dominio de f?

b) Usar las funciones *trace* y *zoom* de la calculadora para estimar $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

c) Explicar en un breve párrafo por qué f es continua en toda la recta real.

d) Estimar visualmente la pendiente de f en el punto (0, 1).

e) Explicar por qué la derivada de una función se puede aproximar mediante la fórmula

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

para valores pequeños de h. Usar esa fórmula para aproximar la pendiente de f en el punto (0, 1).

$$f'(0) \approx \frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h} = \frac{f(h)-f(-h)}{2h}$$

¿Cuánto cree que vale la pendiente de f en (0, 1)?

f) Hallar una fórmula para la derivada de f y determinar $f'(0)$. Explicar por escrito cómo puede ocurrir que una calculadora proporcione un valor incorrecto de la pendiente de una gráfica.

g) Usar esa fórmula para la derivada de f con el fin de encontrar los extremos relativos de f. Verificar la respuesta con la calculadora.

PARA MÁS INFORMACIÓN Acerca de la utilización de calculadoras como instrumentos para estimar pendientes, véase el artículo «Computer Aided Delusions», de Richard L. Hall en *The College Mathematics Journal*, septiembre 1993.



5.6 Ecuaciones diferenciales: crecimiento y desintegración

CONTENIDO ▪
Ecuaciones diferenciales ▪
Modelos de crecimiento y desintegración ▪

Ecuaciones diferenciales

Hasta aquí sólo hemos aprendido a resolver dos tipos de ecuaciones diferenciales,

$$y' = f(x) \quad \text{e} \quad y'' = f(x)$$

En esta sección aprenderemos a resolver otras más generales. La estrategia, denominada **separación de variables**, consiste en reescribir la ecuación, de manera que cada variable aparezca sólo en uno de los lados de la ecuación.

EXPLORACIÓN

En el Ejemplo 1 la solución general es

$$y^2 - 2x^2 = C$$

Represente, en la calculadora, las soluciones particulares determinadas por $C = \pm 2$, $C = \pm 1$ y $C = 0$. Describir gráficamente esas soluciones. ¿Es cierta la siguiente afirmación para cada una de ellas?

La pendiente de la gráfica en el punto (x, y) es dos veces el cociente x/y.

Explique su respuesta. ¿Están contenidas en la solución general *todas* las curvas para las que se satisface esa propiedad?

EJEMPLO 1 Separación de variables

Resolver la ecuación diferencial $y' = 2x/y$.

Solución:

$y' = \dfrac{2x}{y}$	Ecuación original
$yy' = 2x$	Multiplicar por y
$\int yy'\,dx = \int 2x\,dx$	Integrar con respecto a x
$\int y\,dy = \int 2x\,dx$	$dy = y'\,dx$
$\frac{1}{2}y^2 = x^2 + C_1$	Aplicar la regla de las potencias
$y^2 - 2x^2 = C$	Reescribir llamando $C = 2C_1$

Así pues, la solución general viene dada por

$$y^2 - 2x^2 + C$$

Puede comprobarse el resultado por derivación implícita. □

Nota. Al integrar ambos miembros de la ecuación del Ejemplo 1, no es necesario añadir una constante de integración en los dos lados. Si se hiciera así, se obtendría el mismo resultado.

$$\int y\,dy = \int 2x\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 + C_2 = x^2 + C_3$$

$$\frac{1}{2}y^2 = x^2 + (C_3 - C_2)$$

En la práctica, muchos prefieren usar la notación de Leibniz y las diferenciales al aplicar separación de variables. Con esta notación, la solución del Ejemplo 1 sería:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$$

$$y\,dy = 2x\,dx$$

$$\int y\,dy = \int 2x\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = x^2 + C_1$$

$$y^2 - 2x^2 = C$$

Modelos de crecimiento y desintegración

En muchas aplicaciones el ritmo de cambio de una variable y es proporcional al valor de y. Si y es función del tiempo t, la proporcionalidad puede expresarse así:

El ritmo de cambio de y es proporcional a y

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

La solución general de esta ecuación diferencial se da en el próximo teorema.

TEOREMA 5.16 MODELOS DE CRECIMIENTO Y DESINTEGRACIÓN EXPONENCIAL

Si y es una función derivable de t tal que $y > 0$ e $y' = ky$, para alguna constante k, entonces

$$y = Ce^{kt}$$

C es el **valor inicial** de y, y k es la **constante de proporcionalidad**. Describe **crecimiento exponencial** cuando $k > 0$ y **decrecimiento (o desintegración) exponencial** cuando $k < 0$.

Demostración:

$y' = ky$	Ecuación original
$\dfrac{y'}{y} = k$	Separar variables
$\displaystyle\int \frac{y'}{y}\,dt = \int k\,dt$	Integrar con respecto a t
$\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt$	$dy = y'\,dt$
$\ln y = kt + C_1$	Hallar la primitiva de cada lado
$y = e^{C_1}e^{kt}$	Despejar y
$y = Ce^{kt}$	Hacer $C = e^{C_1}$

□

Nota. Derivar la función $y = Ce^{kt}$ con respecto a t para comprobar que $y' = ky$.

EJEMPLO 2 Un modelo de crecimiento exponencial

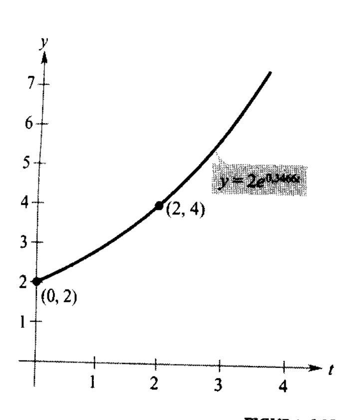
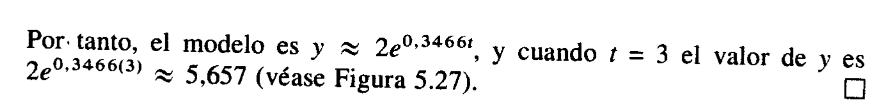


FIGURA 5.27
Si el ritmo de cambio de y es proporcional a y, la magnitud y sigue un modelo exponencial.

El ritmo de cambio de y es proporcional a y. Cuando $t = 0$, $y = 2$. Cuando $t = 2$, $y = 4$. ¿Cuál es el valor de y cuando $t = 3$?

Solución: Como $y' = ky$, sabemos que t e y están relacionadas por la ecuación $y = Ce^{kt}$. Hallamos los valores de C y k utilizando las condiciones iniciales.

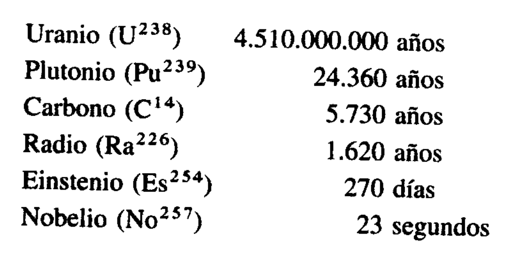


$$2 = Ce^0 \Longrightarrow C = 2 \qquad \text{Cuando } t = 0,\ y = 2$$

$$4 = 2e^{2k} \Longrightarrow k = \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0{,}3466 \qquad \text{Cuando } t = 2,\ y = 4$$

Por tanto, el modelo es $y \approx 2e^{0{,}3466t}$, y cuando $t = 3$ el valor de y es $2e^{0{,}3466(3)} \approx 5{,}657$ (véase Figura 5.27). □

La desintegración radiactiva se caracteriza por la **semivida**, el número de años que han de transcurrir para que se desintegren la mitad de los átomos iniciales de una muestra. Las semividas de algunos isótopos radiactivos comunes son las siguientes.



Uranio (U^{238})	4.510.000.000 años
Plutonio (Pu^{239})	24.360 años
Carbono (C^{14})	5.730 años
Radio (Ra^{226})	1.620 años
Einstenio (Es^{254})	270 días
Nobelio (No^{257})	23 segundos

EJEMPLO 3 Desintegración radiactiva

El peor accidente nuclear de la historia sucedió en 1986 en la planta nuclear de Chernobil, en Ucrania, no lejos de Kiev. Una explosión destruyó uno de los cuatro reactores de la planta, liberando grandes cantidades de isótopos radiactivos en la atmósfera. Dos de los cuatro reactores siguen en funcionamiento.

Supongamos que en el accidente nuclear de Chernobil se liberaron 10 gramos del isótopo Pu-239 del plutonio. ¿Cuánto tiempo hará falta para que quede sólo 1 gramo?

Solución: Sea y la masa de plutonio, en gramos. Como el ritmo de desintegración es proporcional a y, sabemos que

$$y = Ce^{kt}$$

donde t es el tiempo en años. Las condiciones iniciales nos van a permitir conocer los valores de C y de k. Como $y = 10$ en $t = 0$,

$$10 = Ce^{k(0)} = Ce^{0}$$

de donde $C = 10$. Además, como $y = 5$ cuando $t = 24.360$, se deduce que

$$\begin{aligned} 5 &= 10e^{k(24.360)} \\ \frac{1}{2} &= e^{24.360k} \\ \frac{1}{24.360}\ln\frac{1}{2} &= k \\ -2{,}8454 \times 10^{-5} &\approx k \end{aligned}$$

Por tanto, el modelo es

$$y = 10e^{-0{,}000028454t} \qquad \text{Modelo de la semivida}$$

Para saber el momento en que sólo restará 1 gramo, hemos de resolver la ecuación

$$1 = 10e^{-0{,}000028454t}$$

La solución es aproximadamente 80.923 años. □

Nota. El modelo de desintegración exponencial del Ejemplo 3 se podría haber expresado como $y = 10(\frac{1}{2})^{t/24.360}$. Este modelo es mucho más fácil de deducir, pero menos conveniente para muchas aplicaciones.

En el Ejemplo 3, observe que en un problema de crecimiento o decrecimiento exponencial, es fácil deducir C cuando se dan los valores de y para $t = 0$. El siguiente ejemplo demuestra un procedimiento para calcular C y k cuando se desconoce el valor de y para $t = 0$.

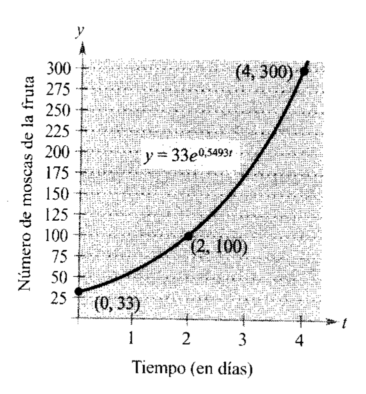


FIGURA 5.28

EJEMPLO 4 Crecimiento de una población

Supongamos que una población experimental de mosca de la fruta crece de forma exponencial. Había 100 moscas tras el segundo día y 300 tras el cuarto día. Estimar cuántas moscas había al comienzo del experimento.

Solución: Sea $y = Ce^{kt}$ el número de moscas en el instante t, con t medido en días. Como $y = 100$ en $t = 2$ y además $y = 300$ en $t = 4$, eso significa que

$$100 = Ce^{2k} \quad \text{y} \quad 300 = Ce^{4k}$$

De la primera ecuación deducimos que $C = 100e^{-2k}$. Sustituyendo este valor en la segunda, se obtiene

$$300 = 100e^{-2k}e^{4k}$$
$$300 = 100e^{2k}$$
$$\ln 3 = 2k$$
$$\frac{1}{2}\ln 3 = k$$
$$0{,}5493 \approx k$$

Por tanto, el modelo exponencial es $y = Ce^{0{,}5493t}$. Para despejar C volvemos a utilizar el hecho de que $y = 100$ cuando $t = 2$:

$$100 = Ce^{0{,}5493(2)}$$
$$C = 100e^{-1{,}0986} \approx 33$$

Así pues, la población inicial (en $t = 0$) era de $y = C = 33$ moscas (véase Figura 5.28). □

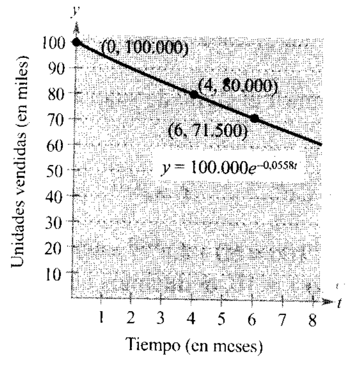


FIGURA 5.29

EJEMPLO 5 Descenso de las ventas

Cuatro meses después de suprimir la publicidad, una empresa constata que sus ventas han bajado de 100.000 unidades mensuales a 80.000. Si las ventas siguen un modelo exponencial de decrecimiento, estimar las ventas dos meses más tarde.

Solución: Usamos el modelo $y = Ce^{kt}$ con t medido en meses, como muestra la Figura 5.29. Por la condición inicial ($t = 0$) sabemos que $C = 100.000$. Además, puesto que $y = 80.000$ cuando $t = 4$, tenemos

$$80.000 = 100.000e^{4k}$$
$$0{,}8 = e^{4k}$$
$$\ln (0{,}8) = 4k$$
$$-0{,}0558 \approx k$$

Así pues, dos meses después ($t = 6$) esperamos unas ventas de

$$\begin{aligned} y &\approx 100.000e^{-0{,}0558(6)} \\ &\approx 71.500 \text{ unidades} \end{aligned}$$

□

En los Ejemplos 2 a 5, a decir verdad, no hemos tenido que resolver la ecuación diferencial

$$y' = ky$$

(Esto se hizo una vez en la demostración del Teorema 5.16.) El próximo ejemplo propone un problema que requiere separación de variables. Se refiere a la ley de enfriamiento de Newton, según la cual el ritmo de cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del ambiente.

EJEMPLO 6 Ley de enfriamiento de Newton

Si pasó por alto la «Motivación del capítulo», vuelva atrás y léala ahora. Allí podrá ver cómo datos tomados con un *Texas Instruments CBL System* pueden utilizarse para deducir experimentalmente un modelo para la ley de enfriamiento de Newton.

Sea y la temperatura (en °F) de un objeto en una habitación cuya temperatura se mantiene constante a 60°. Si el objeto se enfría de 100° a 90° en 10 minutos, ¿cuánto tiempo más tardará en enfriarse a 80°?

Solución: La ley de enfriamiento de Newton establece que

$$y' = k(y - 60), \quad 80 \leqslant y \leqslant 100$$

Para resolver esta ecuación diferencial, separamos las variables.

$$\frac{dy}{dt} = k(y - 60) \qquad \text{Ecuación diferencial}$$

$$\left(\frac{1}{y - 60}\right) dy = k\,dt \qquad \text{Separar variables}$$

$$\int \frac{1}{y - 60}\, dy = \int k\,dt \qquad \text{Integrar}$$

$$\ln |y - 60| = kt + C_1 \qquad \text{Hallar primitivas de ambos miembros}$$

Como $y > 60$, $|y - 60| = y - 60$, luego podemos omitir el signo de valor absoluto. En notación exponencial, tenemos

$$y - 60 = e^{kt + C_1} \Longrightarrow y = 60 + Ce^{kt} \qquad C = e^{C_1}$$

Recordando que $y = 100$ cuando $t = 0$, obtenemos $100 = 60 + Ce^{k(0)} = 60 + C$, lo cual implica que $C = 40$. Y al ser $y = 90$ cuando $t = 10$, deducimos que

$$\begin{aligned} 90 &= 60 + 40e^{k(10)} \\ 30 &= 40e^{10k} \\ k &= \frac{1}{10} \ln \frac{3}{4} \approx -0{,}02877 \end{aligned}$$

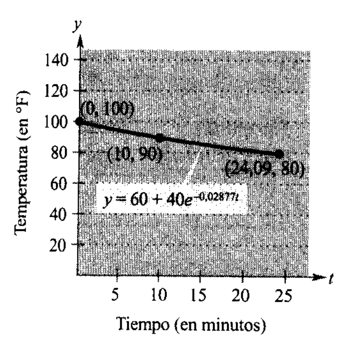


FIGURA 5.30

Así pues, el modelo es

$$y = 60 + 40e^{-0,02877t} \qquad \text{Modelo del enfriamiento}$$

y, finalmente, para $y = 80$ obtenemos

$$80 = 60 + 40e^{-0,02877t}$$
$$20 = 40e^{-0,02877t}$$
$$\frac{1}{2} = e^{-0,02877t}$$
$$\ln\frac{1}{2} = -0,02877t$$
$$t \approx 24,09 \text{ minutos}$$

Por consiguiente, tendrán que pasar unos 14,09 minutos más para que la temperatura del objeto descienda hasta 80° (véase Figura 5.30). □

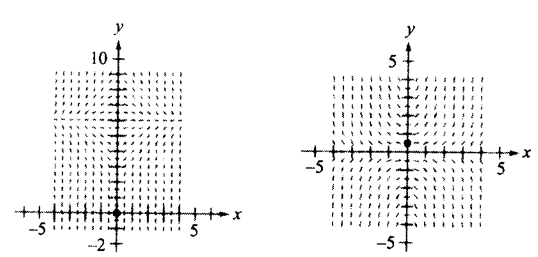
Ejercicios de la Sección 5.6

En los Ejercicios 1-6, resolver la ecuación diferencial.

1. $y' = \dfrac{5x}{y}$
2. $y' = \dfrac{\sqrt{x}}{2y}$
3. $y' = \sqrt{xy}$
4. $y' = x(1 + y)$
5. $(1 + x^2)y' - 2xy = 0$
6. $xy + y' = 100x$

Campos de direcciones En los Ejercicios 7 y 8, se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo de direcciones. *a*) Esbozar dos soluciones aproximadas de la ecuación sobre el campo de direcciones, una de las cuales pase por el punto indicado. *b*) Hallar, por integración, la solución particular y representarla en la calculadora. Comparar el resultado con el esbozo del apartado *a*).

7. $\dfrac{dy}{dx} = x(6 - y), \quad (0, 0)$
8. $\dfrac{dy}{dx} = xy, \quad \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$



Para pensar En los Ejercicios 9-12, escribir y resolver la ecuación diferencial que responde al enunciado en palabras.

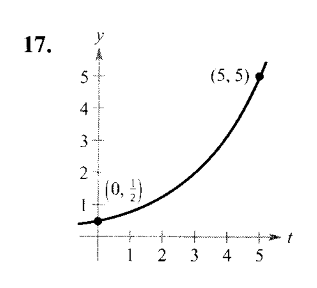
9. El ritmo de cambio de Q con respecto a t es inversamente proporcional al cuadrado de t.
10. El ritmo de cambio de P con respecto a t es proporcional a $10 - t$.
11. El ritmo de cambio de N con respecto a s es proporcional a $250 - s$.
12. El ritmo de cambio de y con respecto a x es proporcional a x y a $L - y$.

En los Ejercicios 13-16, hallar la función $y = f(t)$ que pasa por el punto (0, 10) con la primera derivada dada. Representarla en la calculadora.

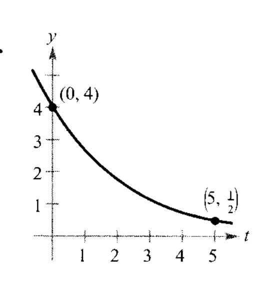
13. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}t$
14. $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{3}{4}\sqrt{t}$
15. $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{2}y$
16. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3}{4}y$

En los Ejercicios 17-20, hallar la función exponencial que pasa por los dos puntos dados.

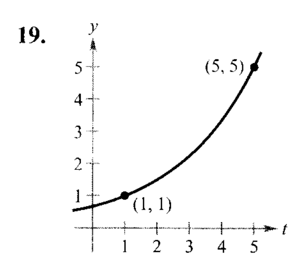
17.



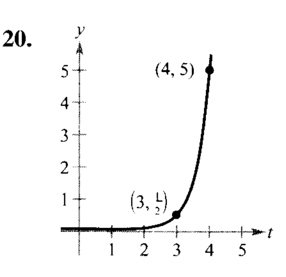
18.



19.



20.



Desintegración radiactiva En los Ejercicios 21-26, completar la tabla para cada isótopo radiactivo.

	Isótopo	*Semivida (en años)*	*Cantidad inicial*	*Cantidad después de 1.000 años*	*Cantidad después de 10.000 años*
21.	Ra^{226}	1.620	10 g		
22.	Ra^{226}	1.620		1,5 g	
23.	C^{14}	5.730			2 g
24.	C^{14}	5.730	3 g		
25.	Pu^{239}	24.360		2,1 g	
26.	Pu^{239}	24.360			0,4 g

27. ***Desintegración radiactiva*** El radio radiactivo tiene una semivida de 1.620 años aproximadamente. ¿Qué porcentaje de una muestra queda tras 100 años?

28. ***Datación por carbono*** La datación por carbono supone que el dióxido de carbono actual contiene la misma proporción de C^{14} radiactivo que tiempos atrás. Si eso es cierto, la cantidad de C^{14} absorbida por un árbol que creció siglos atrás debe ser la misma que absorbe un árbol actualmente. Un fragmento de carbón antiguo contiene sólo el 15 por 100 del que contiene un fragmento actual. Calcular su antigüedad. (La semivida del C^{14} es de 5.730 años.)

Interés compuesto En los Ejercicios 29-34, completar la tabla para una cuenta en la que el interés se compone de forma continua.

	Inversión inicial	*Tasa anual*	*Tiempo de duplicar (años)*	*Cantidad tras 10 años*
29.	\$1.000	6 por 100		
30.	\$20.000	$5\frac{1}{2}$ por 100		
31.	\$750		$7\frac{3}{4}$	
32.	\$10.000		5	
33.	\$500			\$1.292,85
34.	\$2.000			\$5.436,56

Interés compuesto En los Ejercicios 35 y 36, hallar el capital P que debe invertirse a una tasa de interés r, compuesto mensualmente, para que tras t años se haya convertido en \$500.000.

35. $r = 7\frac{1}{2}$ por 100, $t = 20$ **36.** $r = 6$ por 100, $t = 40$

Interés compuesto En los Ejercicios 37 y 38, averiguar el tiempo necesario para doblar \$1.000 invertidos a una tasa de interés r, compuesto *a*) anualmente, *b*) mensualmente, *c*) diariamente, y *d*) continuamente.

37. $r = 7$ por 100 **38.** $r = 6\frac{1}{2}$ por 100

Población En los Ejercicios 39-42, la tabla da la población (en millones) de una ciudad en 1990 y la población estimada para el año 2000. Hallar el modelo exponencial $y = Ce^{kt}$ para esa población, denotando por $t = 0$ el año 1990. Estimar, con ese modelo, la población en el año 2010.

	Ciudad	*1900*	*2000*
39.	Dhaka, Bangladesh	4,22	6,49
40.	Houston, Texas	2,30	2,65
41.	Detroit, Michigan	3,00	2,74
42.	Londres, United Kingdom	9,17	8,57

43. ***Para pensar***

a) En los Ejercicios 39-42, ¿qué constante en la ecuación $y = Ce^{kt}$ representa el ritmo de cambio?

b) En los Ejercicios 39 y 41, una población crece mientras la otra decrece. ¿Qué constante de la ecuación da cuenta de esta diferencia? Explicar las respuestas.

44. ***Un modelo matemático*** A lo largo de cinco horas se cuenta, cada hora, el número N de bacterias en un cultivo que tenía inicialmente 100. Los resultados aparecen en la tabla, con el tiempo t en horas.

t	0	1	2	3	4	5
N	100	126	151	198	243	297

a) Usar regresión en la calculadora para hallar un modelo exponencial que ajuste esos datos.
b) Estimar, con ese modelo, el tiempo necesario para que la población se cuadruplique.

45. ***Presión atmosférica*** La presión atmosférica P (en milímetros de mercurio) decrece exponencialmente con la altura x (en metros). La presión es 760 mm de mercurio al nivel del mar ($x = 0$) y 672,71 mm a 1.000 metros de altura. Calcular la presión a 3.000 metros.

46. ***Ingresos*** Una crisis económica provoca en una empresa un descenso de los ingresos de $742.000 en 1996 a $632.000 en 1998. Supuesto que los ingresos siguen una ley exponencial, estimar los ingresos esperados para 1999 (poner $t = 0$ para el año 1996).

47. ***Curva de aprendizaje*** El gerente de una fábrica estima que un operario puede producir a lo sumo 30 unidades diarias. La curva de aprendizaje para el número N de unidades producidas al día por un obrero que lleva t días trabajando es

$$N = 30(1 - e^{kt})$$

Tras 20 días de estancia en la fábrica, un trabajador produce 19 unidades diarias.
a) Hallar su curva de aprendizaje.
b) ¿Cuántos días después producirá 25 unidades diarias?

48. ***Curva de aprendizaje*** En el ejercicio anterior, el gerente exige a un trabajador nuevo que produzca 20 unidades diarias a los 30 días de su incorporación. Hallar *a*) la curva de aprendizaje que describe ese requisito mínimo y *b*) el número de días que tardará ese operario en producir 25 unidades diarias.

49. ***Ventas*** Las ventas S (en miles de unidades) de un nuevo producto t años después de ser lanzado al mercado son

$$S = Ce^{k/t}$$

a) Hallar S en función de t si se han vendido 5.000 unidades el primer año y el punto de saturación del mercado es 30.000 (es decir, $\lim_{t \to \infty} S = 30$).
b) ¿Cuántas unidades se venderán en los 5 primeros años?
c) Representar en la calculadora la función de ventas.

50. ***Ventas*** Las ventas S (en miles de unidades) de un producto nuevo, a los t años de estar en el mercado, son

$$S = 30(1 - e^{kt})$$

a) Hallar S como función de t si se han vendido 5.000 unidades el primer año.
b) ¿Cuántas unidades saturarán el mercado?
c) ¿Cuántas unidades se venden en los 5 primeros años?
d) Representar en la calculadora la función de ventas.

51. ***Explotaciones forestales*** El valor V de la madera de un bosque es

$$V(t) = 100.000e^{0,8\sqrt{t}}$$

donde t es el tiempo en años, con $t = 0$ correspondiendo a 1998. Si el capital devenga un 10 por 100 de interés continuo, el valor presente de esa madera en cualquier t es

$$A(t) = V(t)e^{-0,10t}$$

¿En qué año debe venderse la madera para hacer máxima la función valor presente?

52. ***Un modelo matemático*** La tabla recoge, en miles de millones de dólares, los ingresos netos y los intereses requeridos para pagar la deuda pública de los EE.UU. entre 1968 y 1995. *(Fuente: U.S. Office of Management and Budget.)*

Año	1986	1987	1988	1989	1990
Ingresos	769,1	854,1	909,0	990,7	1.031,3
Interés	136,0	138,7	151,8	169,3	184,2

Año	1991	1992	1993	1994	1995
Ingresos	1.054,3	1.090,5	1.153,5	1.257,7	1.346,4
Interés	194,5	199,4	198,8	203,0	234,2

a) Usar regresión en la calculadora para hallar un modelo exponencial R para los ingresos y uno logarítmico I para los intereses. Sea t el tiempo en años, con $t = 0$ correspondiendo a 1980.
b) Representar en la calculadora los datos de ingresos y el modelo exponencial. Según ese modelo, ¿cuál es el ritmo continuo de crecimiento de los ingresos?
c) Representar en la calculadora los datos de intereses y el modelo logarítmico.
d) Hallar una función $P(t)$ que aproxime el porcentaje de los ingresos necesario para pagar la deuda y representar esa función en la calculadora.

53. ***Intensidad del sonido*** El nivel β, en decibelios, de un sonido de intensidad I es

$$\beta(I) = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

donde I_0 es la intensidad de 10^{-16} vatios/cm², que corresponde al umbral de audición. Determinar $\beta(I)$ para:

a) $I = 10^{-14}$ vatios/cm² (cuchicheo).
b) $I = 10^{-9}$ vatios/cm² (calle con mucho tráfico).
c) $I = 10^{-6,5}$ vatios/cm² (martillo neumático).
d) $I = 10^{-4}$ vatios/cm² (umbral de dolor).

54. ***Nivel de ruido*** Con la instalación de materiales especiales, el nivel de ruido en un auditorio bajó de 93 a 80 decibelios. Usar la función del Ejercicio 53 para calcular el porcentaje de decrecimiento en la intensidad de ruido.

55. ***Intensidad de un terremoto*** La magnitud R de un terremoto de intensidad I, en la escala de Richter, es

$$R = \frac{\ln I - \ln I_0}{\ln 10}$$

donde I_0 es una intensidad mínima que se utiliza para comparar. Supongamos $I_0 = 1$.

a) Calcular la intensidad del terremoto de San Francisco de 1906 ($R = 8,3$).
b) ¿Por qué factor hay que multiplicar la intensidad para que la medida en la escala de Richter se doble?
c) Hallar dR/dI.

56. ***Ley de enfriamiento de Newton*** Cuando un objeto se saca de un horno y se coloca en un ambiente a temperatura constante de 90 °F, su temperatura es de 1.500 °F. Una hora más tarde ha bajado a 1.120 °F. Calcular su temperatura a las 5 horas de sacarlo del horno.

57. ***Ley de enfriamiento de Newton*** Un termómetro se lleva de un lugar que estaba a 72 °F a otro donde hay 20 °F. Determinar la lectura del termómetro a los 5 minutos, sabiendo que en un minuto baja a 48 °F.

58. ***Comparación de modelos*** El tiempo t (en segundos) que necesita un Dodge Avenger de 1995 para alcanzar una velocidad de s millas/h partiendo del reposo viene dado en la tabla. *(Fuente: Road & Track, marzo 1995.)*

s	30	40	50	60	70	80	90
t	3,4	5,0	7,0	9,3	12,0	15,8	20,0

a) Usar la calculadora para hallar un modelo exponencial que ajuste esos datos.
b) Representar en la calculadora los datos y el modelo.
c) Hallar t y dt/ds para $s = 55$.

59. ***Hipotecas*** A una hipoteca de \$120.000 a 35 años le corresponde una mensualidad de \$985,93. Parte del pago mensual son intereses y otra parte amortización. La cantidad que se dedica a intereses es

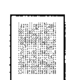
$$u = M - \left(M - \frac{Pr}{12}\right)\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}$$

y la que amortiza el capital es

$$v = \left(M - \frac{Pr}{12}\right)\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}$$

En esas fórmulas, P es el importe de la hipoteca, r la tasa de interés, M el pago mensual y t el tiempo en años.

a) Representar en la calculadora cada función, mostrando en la pantalla los 35 años de duración de la hipoteca.
b) En los primeros años, la mayor parte de la mensualidad, ¿a qué menester se dedica? Estimar el momento en que se dedican cantidades iguales a intereses y a amortización.
c) Enunciar, a la vista de las gráficas, una conjetura sobre la relación entre las pendientes de las rectas tangentes a las dos curvas para un t concreto. Dar un argumento analítico que verifique esa conjetura.
d) Repetir los apartados *a)* y *b)* para un plazo de 20 años (M = \$1.118,56). ¿Qué se puede concluir?



5.7 Ecuaciones diferenciales: separación de variables

CONTENIDO
- Soluciones particulares y generales
- Separación de variables
- Ecuaciones diferenciales homogéneas
- Aplicaciones

Soluciones particulares y generales

A lo largo del texto hemos identificado varios fenómenos físicos que pueden ser descritos por ecuaciones diferenciales. Así ocurría, en la Sección 5.6, con la desintegración radiactiva, el crecimiento de poblaciones o la ley de enfriamiento de Newton.

Se dice que una función $y = f(x)$ es solución de una ecuación diferencial si la ecuación se satisface al sustituir y y sus derivadas por $f(x)$ y sus derivadas. Por ejemplo, derivando y sustituyendo se comprueba que $y = e^{-2x}$ es solución de la ecuación diferencial $y' + 2y = 0$. Se puede demostrar que toda solución de esta ecuación diferencial es de la forma

$$y = Ce^{-2x} \qquad \text{Solución general de } y' + 2y = 0$$

donde C es cualquier número real. Esa solución se llama la **solución general**. Algunas ecuaciones diferenciales tienen **soluciones singulares** que no se pueden expresar como casos especiales de la solución general. No consideraremos tales soluciones en este libro. El **orden** de una ecuación diferencial viene determinado por la derivada de orden más alto que aparece en la ecuación. Así, $y' = 4y$ es una ecuación diferencial de primer orden.

En el Ejemplo 8 de la Sección 4.1 vimos que la ecuación diferencial de segundo orden $s''(t) = -32$ tiene solución general

$$s(t) = -16t^2 + C_1 t + C_2 \qquad \text{Solución general de } s''(t) = -32$$

que contiene dos constantes arbitrarias. Se puede demostrar que una ecuación diferencial de orden n tiene una solución general con n constantes arbitrarias.

EJEMPLO 1 Comprobación de soluciones

Averiguar si las siguientes funciones son solución de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$.

a) $y = \text{sen } x$ *b)* $y = 4e^{-x}$ *c)* $y = Ce^x$

Solución:

a) Como $y = \text{sen } x$, $y' = \cos x$, e $y'' = -\text{sen } x$, se sigue que

$$y'' - y = -\text{sen } x - \text{sen } x = -2 \text{ sen } x \neq 0$$

Por tanto, $y = \text{sen } x$ no es solución.

b) Como $y = 4e^{-x}$, $y' = -4e^{-x}$, e $y'' = 4e^{-x}$, se sigue que

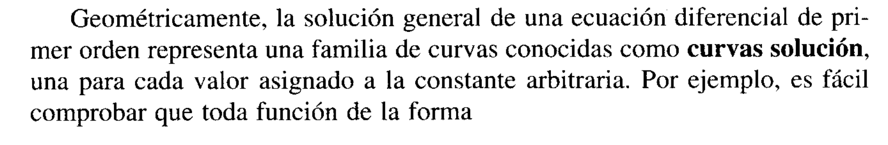
$$y'' - y = 4e^{-x} - 4e^{-x} = 0$$

Por tanto, $y = 4e^{-x}$ es solución.

c) Como $y = Ce^x$, $y' = Ce^x$, e $y'' = Ce^x$, se sigue que

$$y'' - y = Ce^x - Ce^x = 0$$

Por tanto, $y = Ce^x$ es solución para cualquier valor de C. □



Geométricamente, la solución general de una ecuación diferencial de primer orden representa una familia de curvas conocidas como **curvas solución**, una para cada valor asignado a la constante arbitraria. Por ejemplo, es fácil comprobar que toda función de la forma

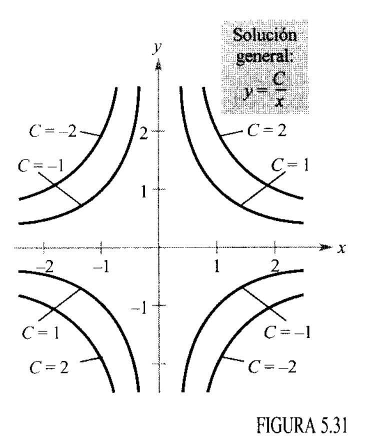


FIGURA 5.31
Curvas solución de $xy' + y = 0$.

$$y = \frac{C}{x} \qquad \text{Solución general de } xy' + y = 0$$

es una solución de la ecuación diferencial $xy' + y = 0$. La Figura 5.31 muestra algunas de esas curvas solución correspondientes a distintos valores de C.

Las **soluciones particulares** de una ecuación diferencial se obtienen a partir de **condiciones iniciales** que dan el valor de la variable dependiente, o de una de sus derivadas, para un valor particular de la variable independiente. El término «condición inicial» proviene de que en los problemas cuya variable independiente es el tiempo t, se parte del valor de la variable dependiente o de alguna de sus derivadas en el instante *inicial* $t = 0$. Por ejemplo, la ecuación diferencial de segundo orden $s''(t) = -32$, con solución general

$$s(t) = -16t^2 + C_1t + C_2 \qquad \text{Solución general de } s''(t) = -32$$

podría tener las condiciones iniciales

$$s(0) = 80, \quad s'(0) = 64 \qquad \text{Condiciones iniciales}$$

En tal caso, las condiciones iniciales determinarían la solución particular

$$s(t) = -16t^2 + 64t + 80 \qquad \text{Solución particular}$$

EJEMPLO 2 Cálculo de una solución particular

Para la ecuación diferencial

$$xy' - 3y = 0$$

verificar que $y = Cx^3$ es solución. Hallar la solución particular determinada por la condición inicial $y = 2$ cuando $x = -3$.

Solución: Que $y = Cx^3$ es solución es claro, ya que $y' = 3Cx^2$ y

$$\begin{aligned} xy' - 3y &= x(3Cx^2) - 3(Cx^3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Además, la condición inicial $y = 2$ en $x = -3$ permite escribir

$$\begin{aligned} y &= Cx^3 && \text{Solución general} \\ 2 &= C(-3)^3 && \text{Sustituir la condición inicial} \\ -\frac{2}{27} &= C && \text{Despejar } C \end{aligned}$$

y concluimos que la solución particular es

$$y = -\frac{2x^3}{27} \qquad \text{Solución particular}$$

Compruebe la solución sustituyendo y e y' en la ecuación diferencial original. □

Nota. El número de condiciones iniciales necesario para fijar una solución particular es el número de constantes de la solución general.

Separación de variables

PARA MÁS INFORMACIÓN
Un ejemplo interesante de ecuación diferencial separable en Ingeniería puede verse en el artículo «Designing a Rose Cutter», de J. S. Hartzler en *The College Mathematics Journal*, enero 1995.

Consideremos una ecuación diferencial que pueda escribirse en la forma

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

donde M es una función continua de x y N una función continua de y. Como vimos en la sección anterior, en una ecuación de este tipo todos los términos en x se pueden agrupar con dx y todos los términos con y se pueden agrupar con dy. Tales ecuaciones se llaman **separables** y su proceso de resolución se denomina *separación de variables*. He aquí varios ejemplos de ecuaciones diferenciales separables.

Ecuación diferencial original	*Reescrita con variables separadas*
$x^2 + 3y\frac{dy}{dx} = 0$	$3y\,dy = -x^2\,dx$
$(\text{sen}\,x)\,y' = \cos x$	$dy = \text{ctg}\,x\,dx$
$\frac{xy'}{e^y + 1} = 2$	$\frac{1}{e^y + 1}\,dy = \frac{2}{x}\,dx$

EJEMPLO 3 Separación de variables

Hallar la solución general de

$$(x^2 + 4)\frac{dy}{dx} = xy$$

Solución: Para empezar, observemos que $y = 0$ es solución. Con el fin de encontrar otras soluciones, supongamos $y \neq 0$ y separemos las variables como sigue.

$$(x^2 + 4)\,dy = xy\,dx \qquad \text{Forma diferencial}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x^2 + 4}\,dx \qquad \text{Separar variables}$$

Integrando ahora obtenemos

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x^2+4}\,dx \qquad \text{Integrar}$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C_1$$

$$= \ln\sqrt{x^2+4} + C_1$$

$$|y| = e^{C_1}\sqrt{x^2+4}$$

$$y = \pm e^{C_1}\sqrt{x^2+4}$$

Puesto que $y = 0$ es solución, podemos escribir la solución general como

$$y = C\sqrt{x^2+4} \qquad \text{Solución general}$$

□

Nota. Aconsejamos al lector que *compruebe*, en todo este capítulo, *cada una de las soluciones*. En el ejemplo 3 se puede verificar la solución $y = C\sqrt{x^2+4}$ derivando y sustituyendo en la ecuación original.

En algunos casos no es factible escribir la solución general en la forma explícita $y = f(x)$. El próximo ejemplo ilustra esa situación. Puede comprobarse la solución por derivación implícita.

EJEMPLO 4 Cálculo de una solución particular

Hallar la solución particular determinada por la condición inicial $y(0) = 1$ para la ecuación diferencial

$$xy\,dx + e^{-x^2}(y^2-1)\,dy = 0$$

Solución: Salta a la vista que $y = 0$ es solución de la ecuación diferencial, pero esa solución no cumple la condición inicial dada. Por tanto, supongamos $y \neq 0$. Para separar las variables, hemos de quitar y del primer sumando y del segundo e^{-x^2}. Por consiguiente, multiplicamos por e^{x^2}/y, con lo que obtenemos

$$xy\,dx + e^{-x^2}(y^2-1)\,dy = 0$$

$$e^{-x^2}(y^2-1)\,dy = -xy\,dx$$

$$\int\left(y - \frac{1}{y}\right)dy = \int -xe^{x^2}\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} - \ln y = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

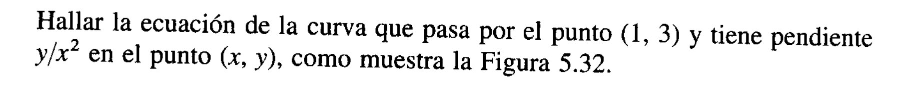
La condición inicial $y(0) = 1$ nos dice que $\frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2} + C$, de modo que $C = 1$. Así pues, la solución particular buscada tiene la forma implícita

$$\frac{y^2}{2} - \ln y = -\frac{1}{2}e^{x^2} + 1$$

$$y^2 - \ln y^2 + e^{x^2} = 2$$

□

EJEMPLO 5 La curva de una solución particular


Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 3) y tiene pendiente y/x^2 en el punto (x, y), como muestra la Figura 5.32.

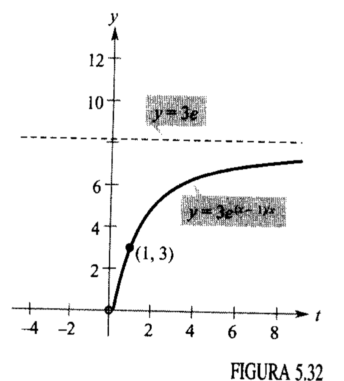


FIGURA 5.32

Solución: Como la pendiente de la curva viene dada por y/x^2, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2}$$

con la condición inicial $y(1) = 3$. Separando variables e integrando se obtiene

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2}, \quad y \neq 0$$

$$\ln |y| = -\frac{1}{x} + C_1$$

$$y = e^{-(1/x)+C_1} = Ce^{-1/x}$$

Al ser $y = 3$ en $x = 1$, se deduce que $3 = Ce^{-1}$ y $C = 3e$. Por tanto, la ecuación de la curva especificada es

$$y = (3e)e^{-1/x} = 3e^{(x-1)/x}, \quad x > 0$$

□

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Nota. Por $f(x, y)$ denotamos una función de dos variables, del mismo modo que $f(x)$ denota una función de una sola variable. Estudiaremos las funciones de dos variables en el Capítulo 12.

Algunas ecuaciones diferenciales no separables en x e y se convierten en separables mediante un cambio de variables. Eso sucede para las ecuaciones diferenciales del tipo $y' = f(x, y)$, donde f es una **función homogénea.** Se dice que la función $f(x, y)$ es **homogénea de grado** n si

$$\boxed{f(tx, ty) = t^n f(x, y)}$$

Función homogénea de grado n

donde n es un número real.

EJEMPLO 6 Comprobación de funciones homogéneas

a) $f(x, y) = x^2y - 4x^3 + 3xy^2$ es una función homogénea de grado 3 porque

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= (tx)^2(ty) - 4(tx)^3 + 3(tx)(ty)^2 \\ &= t^3(x^2y) - t^3(4x^3) + t^3(3xy^2) \\ &= t^3(x^2y - 4x^3 + 3xy^2) \\ &= t^3 f(x, y) \end{aligned}$$

b) $f(x, y) = xe^{x/y} + y \text{ sen } (y/x)$ es una función homogénea de grado 1 porque

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= txe^{tx/ty} + ty \text{ sen } \frac{ty}{tx} \\ &= t\left(xe^{x/y} + y \text{ sen } \frac{y}{x}\right) \\ &= tf(x, y) \end{aligned}$$

c) $f(x, y) = x + y^2$ no es homogénea porque

$$f(tx, ty) = tx + t^2y^2 = t(x + ty^2) \neq t^n(x + y^2)$$

d) $f(x, y) = x/y$ es una función homogénea de grado 0 porque

$$f(tx, ty) = \frac{tx}{ty} = t^0 \frac{x}{y}$$ □

DEFINICIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL HOMOGÉNEA

Una ecuación diferencial homogénea es una ecuación diferencial de la forma

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

donde M y N son funciones homogéneas del mismo grado.

EJEMPLO 7 Ecuaciones diferenciales homogéneas

a) $(x^2 + xy)\, dx + y^2\, dy = 0$ es homogénea de grado 2.

b) $(x^2 + 1)\, dx + y^2\, dy = 0$ *no* es una ecuación diferencial homogénea. □

Al resolver una ecuación diferencial homogénea por separación de variables utilizaremos el siguiente resultado sobre cambio de variables.

TEOREMA 5.17 CAMBIO DE VARIABLES PARA ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

Si $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ es homogénea, puede ser transformada en una ecuación diferencial de variables separadas haciendo la sustitución

$$y = vx$$

donde v es una función derivable de x.

EJEMPLO 8 Resolución de una ecuación diferencial homogénea

ADVERTENCIA La sustitución $y = vx$ produce una ecuación diferencial separable en las variables x, v. Hay que expresar la solución obtenida al final en términos de las variables originales x, y.

Hallar la solución general de $(x^2 - y^2)\,dx + 3xy\,dy = 0$.

Solución: Como $(x^2 - y^2)$ y $3xy$ son ambas homogéneas de grado 2, hacemos $y = vx$. Así, $dy = x\,dv + v\,dx$, de modo que sustituyendo obtenemos

$$(x^2 - v^2x^2)\,dx + 3x(vx)\overbrace{(x\,dv + v\,dx)}^{dy} = 0$$
$$(x^2 + 2v^2x^2)\,dx + 3x^3v\,dv = 0$$
$$x^2(1 + 2v^2)\,dx + x^2(3vx)\,dv = 0$$

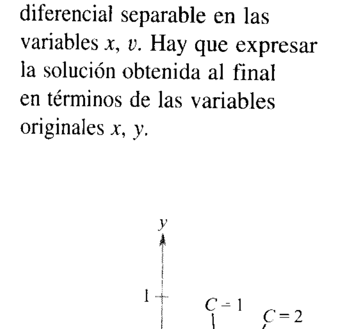


FIGURA 5.33
Soluciones de $(x^2 - y^2)\,dx + 3xy\,dy = 0$.

Ahora dividimos por x^2 y separamos las variables.

$$(1 + 2v^2)\,dx = -3vx\,dv$$
$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{-3v}{1 + 2v^2}\,dv$$
$$\ln|x| = -\frac{3}{4}\ln(1 + 2v^2) + C_1$$
$$4\ln|x| = -3\ln(1 + 2v^2) + \ln|C|$$
$$\ln x^4 = |C(1 + 2v^2)^{-3}|$$
$$x^4 = C(1 + 2v^2)^{-3}$$

Sustituyendo v se obtiene la solución general

$$x^4 = C\left[1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{-3}$$
$$\left(1 + 2\frac{y^2}{x^2}\right)^3 x^4 = C$$
$$(x^2 + 2y^2)^3 = Cx^2 \qquad \text{Solución general}$$

□



Si dispone de una calculadora apropiada, represente varias de las soluciones del Ejemplo 8. Por ejemplo, la Figura 5.33 muestra las gráficas de $(x^2 + 2y^2)^3 = Cx^2$ para $C = 1, 2, 3$ y 4.

Aplicaciones

EJEMPLO 9 Una población de coyotes

El ritmo de cambio de coyotes $N(t)$ en una población es directamente proporcional a $650 - N(t)$, donde t es el tiempo en años. Cuando $t = 0$, la población era 300 y cuando $t = 2$ ha crecido hasta 500. Calcular la población cuando $t = 3$.

Solución: Como el ritmo de cambio es proporcional a 650 − $N(t)$, podemos escribir la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = k(650 - N)$$

que podemos resolver por separación de variables:

$dN = k(650 - N)\,dt$	Forma diferencial
$\dfrac{dN}{650 - N} = k\,dt$	Separar variables
$-\ln\|650 - N\| = kt + C_1$	Integrar
$\ln\|650 - N\| = -kt - C_1$	
$650 - N = e^{-kt - C_1}$	Suponer $N < 650$
$N = 650 - Ce^{-kt}$	Solución general

Al ser $N = 300$ en $t = 0$, deducimos que $C = 350$, por lo que

$$N = 650 - 350e^{-kt}$$

Usando ahora que $N = 500$ para $t = 2$, obtenemos

$$500 = 650 - 350e^{-2k} \implies e^{-2k} = \frac{3}{7} \implies k \approx 0{,}4236$$

Así pues, el modelo para la población de coyotes es

$$N = 650 - 350e^{-0{,}4236t} \qquad \text{Modelo de población}$$

Cuando $t = 3$, aproximamos la población como

$$N = 650 - 350e^{-0.4236(3)} \approx 552 \text{ coyotes}$$

La Figura 5.34 ilustra el modelo resultante.

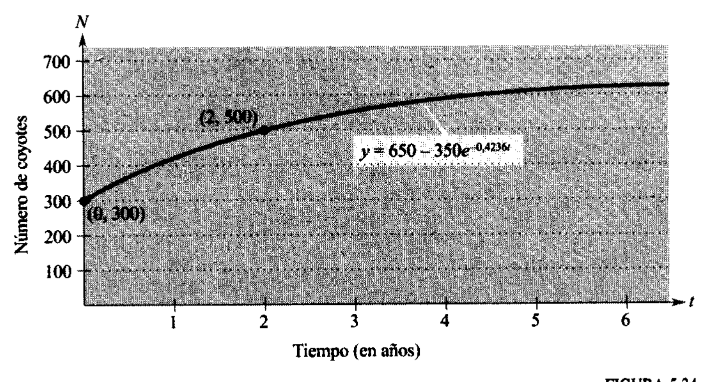


FIGURA 5.34
Modelo para la población de coyotes. □

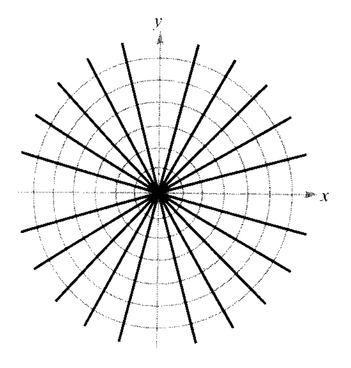


FIGURA 5.35
Cada recta $y = Kx$ es una trayectoria ortogonal de la familia de círculos.

Un problema común en Física consiste en hallar una familia de curvas, cada una de las cuales sea ortogonal a una familia de curvas dada. Por ejemplo, la Figura 5.35 muestra una familia de círculos

$$x^2 + y^2 = C \qquad \text{Familia de círculos}$$

cada uno de los cuales corta a las rectas de la familia

$$y = Kx \qquad \text{Familia de rectas}$$

en ángulo recto. Dos familias así se dice que son **mutuamente ortogonales** y cada curva de una familia se llama una **trayectoria ortogonal** a la otra familia. En Electrostática, las líneas de fuerza son ortogonales a las curvas equipotenciales. En Termodinámica, el flujo de calor en una superficie plana es ortogonal a las curvas isotermas.

EJEMPLO 10 Cálculo de trayectorias ortogonales

Describir las trayectorias ortogonales a la familia de curvas

$$y = \frac{C}{x}$$

para $C \neq 0$. Dibujar varias curvas de cada familia.

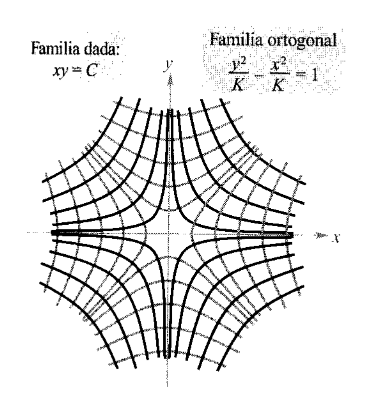


FIGURA 5.36
Trayectorias ortogonales.

Solución: Escribiendo la ecuación como $xy = C$ y derivando implícitamente respecto de x obtenemos la ecuación diferencial

$$xy' + y = 0 \qquad \text{Ecuación diferencial}$$

$$x\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \qquad \text{Pendiente de la familia dada}$$

Como y' representa la pendiente de la familia de curvas dada en (x, y), la familia ortogonal ha de tener pendiente x/y, así que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \qquad \text{Pendiente de la familia ortogonal}$$

Ya podemos hallar la familia ortogonal separando variables e integrando.

$$\int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

Por consiguiente, cada trayectoria ortogonal es una hipérbola dada por

$$\frac{y^2}{K} - \frac{x^2}{K} = 1 \qquad 2C_1 = K \neq 0$$

Todas tienen su centro en el origen y sus ejes transversales son verticales para $K > 0$ y horizontales para $K < 0$. Varias de esas trayectorias se muestran en la Figura 5.36. □

Ejercicios de la Sección 5.7

En los Ejercicios 1-6, verificar la solución de la ecuación diferencial.

Solución	*Ecuación diferencial*
1. $y = Ce^{4x}$	$\dfrac{dy}{dx} = 4y$
2. $x^2 + y^2 = Cy$	$y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$
3. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$	$y'' + y = 0$
4. $y = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\operatorname{sen} x$	$y'' + 2y' + 2y = 0$
5. $y = -\cos x \ln \lvert\sec x + \operatorname{tg} x\rvert$	$y'' + y = \operatorname{tg} x$
6. $y = \frac{2}{5}(e^{-2x} + e^x)$	$y'' + 2y' = 2e^x$

En los Ejercicios 7-12, averiguar si la función es solución de la ecuación diferencial $y^{(4)} - 16y = 0$.

7. $y = 3 \cos x$

8. $y = 3 \cos 2x$

9. $y = e^{-2x}$

10. $y = 5 \ln x$

11. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3 \operatorname{sen} 2x + C_4 \cos 2x$

12. $y = 5e^{-2x} + 3 \cos 2x$

En los Ejercicios 13-18, averiguar si la función es solución de la ecuación diferencial $xy' - 2y = x^3e^x$.

13. $y = x^2$ **14.** $y = x^2e^x$

15. $y = x^2(2 + e^x)$ **16.** $y = \operatorname{sen} x$

17. $y = \ln x$ **18.** $y = x^2e^x - 5x^2$

19. ***Para pensar*** Se sabe que $y = Ce^{kx}$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}07y$$

Con esa información, ¿es posible determinar C o k? En tal caso, calcular su valor.

20. ***Para pensar*** Sabiendo que $y = A \operatorname{sen} \omega t$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0$$

calcular el valor de ω.

En los Ejercicios 21 y 22, se dan algunas de las curvas correspondientes a diferentes valores de C en la solución general de la ecuación diferencial. Hallar la solución particular que pasa por el punto que se indica en la figura.

Solución	*Ecuación diferencial*
21. $y^2 = Cx^3$	$2xy' - 3y = 0$
22. $2x^2 - y^2 = C$	$yy' - 2x = 0$

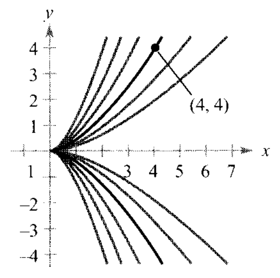


FIGURA E.21

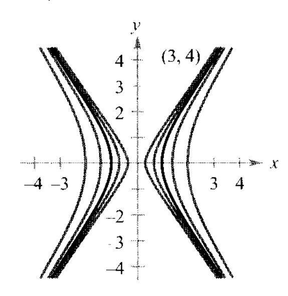


FIGURA E.22

En los Ejercicios 23 y 24, se da la solución general de la ecuación diferencial. Representar en la calculadora las soluciones particulares para los valores de C que se especifican.

23. $4yy' - x = 0$
$4y^2 - x^2 = C$
$C = 0,\ C = \pm 1,\ C = \pm 4$

24. $yy' + x = 0$
$x^2 + y^2 = C$
$C = 0,\ C = 1,\ C = 4$

En los Ejercicios 25-30, comprobar que la solución general satisface la ecuación diferencial y, a continuación, hallar la solución particular que cumple la condición inicial.

25. $y = Ce^{-2x}$
$y' + 2y = 0$
$y = 3$ en $x = 0$

26. $2x^2 + 3y^2 = C$
$2x + 3yy' = 0$
$y = 2$ en $x = 1$

27. $y = C_1 \operatorname{sen} 3x + C_2 \cos 3x$
$y'' + 9y = 0$
$y = 2$ en $x = \pi/6$
$y' = 1$ en $x = \pi/6$

28. $y = C_1 + C_2 \ln x$
$xy'' + y' = 0$
$y = 0$ en $x = 2$
$y' = \frac{1}{2}$ en $x = 2$

29. $y = C_1x + C_2x^3$
$x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$
$y = 0$ en $x = 2$
$y' = 4$ en $x = 2$

30. $y = e^{2x/3}(C_1 + C_2x)$
$9y'' - 12y' + 4y = 0$
$y = 4$ en $x = 0$
$y = 0$ en $x = 3$

En los Ejercicios 31-38, hallar, por integración, una solución general de la ecuación diferencial.

31. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$

32. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{1 + x^2}$

33. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - 2}{x}$

34. $\dfrac{dy}{dx} = x \cos x^2$

35. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} 2x$

36. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}^2 x$

37. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{x - 3}$

38. $\dfrac{dy}{dx} = xe^{x^2}$

En los Ejercicios 39-48, hallar la solución general de la ecuación diferencial.

39. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$

40. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 2}{3y^2}$

41. $\dfrac{dr}{ds} = 0{,}05r$

42. $\dfrac{dr}{ds} = 0{,}05s$

43. $(2 + x)y' = 3y$

44. $xy' = y$

45. $yy' = \operatorname{sen} x$

46. $\sqrt{1 - 4x^2}y' = x$

47. $y \ln x - xy' = 0$

48. $yy' - 2e^x = 0$

En los Ejercicios 49-58, hallar la solución particular de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial.

	Ecuación diferencial	*Condición inicial*
49.	$yy' - e^x = 0$	$y(0) = 4$
50.	$\sqrt{x} + \sqrt{y}y' = 0$	$y(1) = 4$
51.	$y(x + 1) + y' = 0$	$y(-2) = 1$
52.	$xyy' - \ln x = 0$	$y(1) = 0$
53.	$y(1 + x^2)y' - x(1 + y^2) = 0$	$y(0) = \sqrt{3}$
54.	$y\sqrt{1 - x^2}y' - x\sqrt{1 - y^2} = 0$	$y(0) = 1$
55.	$\dfrac{du}{dv} = uv \operatorname{sen} v^2$	$u(0) = 1$
56.	$\dfrac{dr}{ds} = e^{r+s}$	$r(1) = 0$
57.	$dP - kP\,dt = 0$	$P(0) = P_0$
58.	$dT + k(T - 70)\,dt = 0$	$T(0) = 140$

En los Ejercicios 59 y 60, hallar una ecuación para la curva que pasa por el punto y tiene la pendiente que se indica.

	Punto	*Pendiente*
59.	(1, 1)	$y' = -\dfrac{9x}{16y}$
60.	(8, 2)	$y' = \dfrac{2y}{3x}$

En los Ejercicios 61 y 62, hallar todas las funciones f con la propiedad especificada.

61. La tangente a la gráfica de f en el punto (x, y) corta al eje x en $(x + 2, 0)$.

62. Todas las tangentes a la gráfica de f pasan por el origen.

En los Ejercicios 63-68, decir si la función es homogénea y, si lo es, de qué grado.

63. $f(x, y) = x^3 - 4xy^2 + y^3$

64. $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

65. $f(x, y) = 2 \ln xy$

66. $f(x, y) = \operatorname{tg}(x + y)$

67. $f(x, y) = 2 \ln \dfrac{x}{y}$

68. $f(x, y) = \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$

En los Ejercicios 69-74, resolver la ecuación diferencial homogénea.

69. $y' = \dfrac{x + y}{2x}$

70. $y' = \dfrac{x^3 + y^3}{xy^2}$

71. $y' = \dfrac{x - y}{x + y}$

72. $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$

73. $y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$

74. $y' = \dfrac{3x + 2y}{x}$

En los Ejercicios 75-78, hallar la solución particular que satisface la condición inicial.

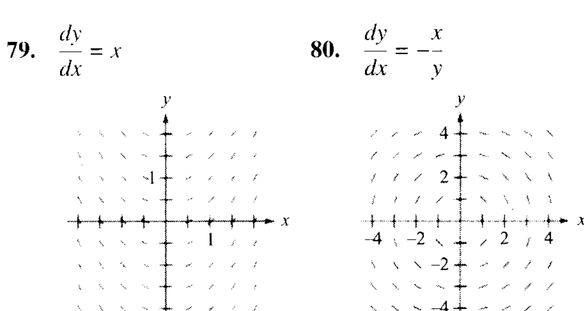
	Ecuación diferencial	*Condición inicial*
75.	$x\,dy - (2xe^{-y/x} + y)\,dx = 0$	$y(1) = 0$
76.	$-y^2\,dx + x(x + y)\,dy = 0$	$y(1) = 1$
77.	$\left(x \sec \dfrac{y}{x} + y\right)dx - x\,dy = 0$	$y(1) = 0$
78.	$(2x^2 + y^2)\,dx + xy\,dy = 0$	$y(1) = 0$

Campos de direcciones Consideremos la ecuación diferencial de primer orden

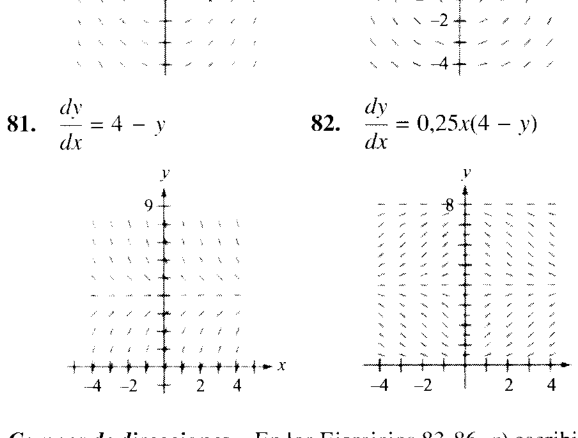
$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

La función F asigna a cada punto (x_0, y_0) de su dominio una dirección (pendiente) de la solución de la ecuación diferencial. Para visualizar esto, dibujamos un pequeño segmento en varios puntos que indique esa dirección, obteniendo de esa manera un campo de direcciones. Este campo puede utilizarse para aproximar gráficamente las soluciones de la ecuación diferencial. En los Ejercicios 79-82, esbozar unas cuantas soluciones de la ecuación diferencial sobre su campo de direcciones y, a continuación, hallar la solución general analíticamente.

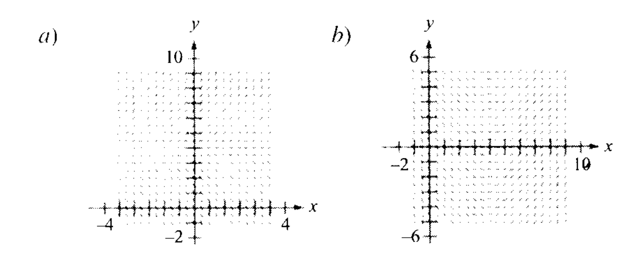
79. $\dfrac{dy}{dx} = x$ **80.** $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

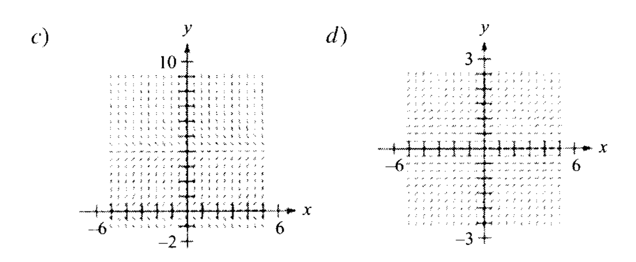


81. $\dfrac{dy}{dx} = 4 - y$ **82.** $\dfrac{dy}{dx} = 0{,}25x(4 - y)$



Campos de direcciones En los Ejercicios 83-86, *a*) escribir una ecuación diferencial que corresponda al enunciado, *b*) asignar a la ecuación diferencial un campo de direcciones, y *c*) verificar el resultado representando en la calculadora el campo de direcciones de cada ecuación diferencial.





83. El ritmo de cambio de y respecto de x es proporcional a la diferencia entre y y 4.

84. El ritmo de cambio de y respecto de x es proporcional a la diferencia entre x y 4.

85. El ritmo de cambio de y respecto de x es proporcional al producto de y por la diferencia entre y y 4.

86. El ritmo de cambio de y respecto de x es proporcional a y^2.

87. ***Crecimiento de las ventas*** Denotemos por S las ventas de un producto, por L el nivel máximo de ventas (ambos en miles de unidades) y por t el tiempo en meses. El ritmo de cambio de S respecto de t varía conjuntamente con el producto de S y $L - S$ (véase figura).

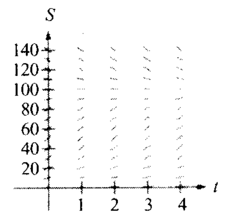
a) Escribir la ecuación diferencial para el modelo de las ventas si $L = 100$, $S = 10$ cuando $t = 0$, y $S = 20$ cuando $t = 1$. Verificar que $S = L/(1 + Ce^{-kt})$.

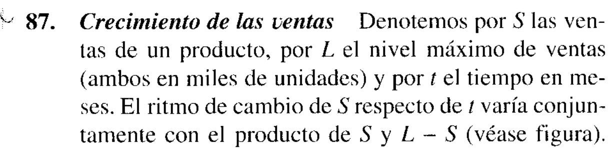
b) ¿Cuándo está creciendo más rápidamente el aumento de las ventas?

c) Representar en la calculadora la función de ventas.

d) Esbozar la solución del apartado *a*) sobre el campo de direcciones de la figura.

e) Si el nivel máximo de ventas estimado es correcto, usar el campo de direcciones para describir la forma de las curvas solución para las ventas si, en algún período de tiempo, las ventas sobrepasan L.





88. ***Crecimiento de poblaciones*** El ritmo de crecimiento de una población de moscas de la fruta es proporcional al tamaño de la población en cada momento. Si había 180 moscas al final del segundo día y 300 al final del cuarto, ¿cuántas había inicialmente?

89. ***Desintegración radiactiva*** El ritmo de desintegración del radio radiactivo, cuya semivida es 1.620 años, es proporcional a la cantidad presente en cada momento. ¿Qué porcentaje queda sin desintegrarse al cabo de 25 años?

90. ***Reacción química*** En una reacción química, un compuesto se convierte en otro a un ritmo proporcional a la cantidad que queda por transformarse. Inicialmente había 20 gramos del compuesto original y al cabo de una hora hay 16 gramos. ¿Cuándo se habrá transformado el 75 por 100 del compuesto?

91. ***Navegación*** Despreciando resistencia, un bote parte del reposo y acelera (dv/dt) a un ritmo proporcional a la diferencia entre las velocidades del viento y del bote.

a) Expresar la velocidad como función del tiempo t si el viento sopla a 20 nudos y al cabo de un minuto el bote se desplaza a 5 nudos.

b) Con el resultado del apartado *a*), escribir la distancia recorrida en función del tiempo.

92. ***Receptor de radio*** En áreas montañosas la recepción de radio es débil. Consideremos un transmisor de FM situado en el punto $(-1, 1)$, detrás de una colina representada por $y = x - x^2$, y un receptor situado al otro lado de la colina. (Suponemos que el eje x representa el nivel del suelo en la base de la colina.)

a) ¿Cuál es la mínima distancia a la colina a la que se puede colocar el receptor para que su recepción no sea obstruida?

b) Expresar esa distancia mínima x en función de h si el transmisor está situado en $(-1, h)$.

c) Representar en la calculadora la función del apartado *b*), hallar su asíntota vertical e interpretar el resultado.

En los Ejercicios 93-98, hallar las trayectorias ortogonales de la familia dada. Representar en la calculadora varias curvas de cada familia.

93. $x^2 + y^2 = C$

94. $2x^2 - y^2 = C$

95. $x^2 = Cy$

96. $y^2 = 2Cx$

97. $y^2 = Cx^3$

98. $y = Ce^x$

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 99-102, decidir si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar el porqué o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

99. Si $y = f(x)$ es solución de una ecuación diferencial de primer orden, $y = f(x) + C$ lo es también.

100. La ecuación diferencial $y' = xy - 2y + x - 2$ se puede escribir en forma de variables separadas.

101. La función $f(x, y) = x^2 + xy + 2$ es homogénea.

102. Las familias $x^2 + y^2 = 2Cy$ y $x^2 + y^2 = 2Kx$ son mutuamente ortogonales.

5.8 Funciones trigonométricas inversas y derivación

CONTENIDO
- Funciones trigonométricas inversas
- Derivadas de las funciones trigonométricas inversas
- Resumen de las reglas de derivación básicas

Funciones trigonométricas inversas

Esta sección comienza con una afirmación algo chocante: *ninguna de las seis funciones trigonométricas admite inversa*. Y es cierto, ya que las seis funciones trigonométricas son periódicas y, en consecuancia, no inyectivas. En esta sección analizaremos esas seis funciones para ver si podemos restringir su dominio de manera tal que, en ese *dominio restringido*, admitan ya funciones inversas.

En el Ejemplo 4 de la Sección 5.3 vimos que la función seno es creciente (y por tanto inyectiva) en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ (véase Figura 5.37). En ese intervalo podemos definir la inversa de la función seno *restringida* como

$$y = \operatorname{arcsen} x \quad \text{si y sólo si} \quad \operatorname{sen} y = x$$

FIGURA 5.37
La función seno es inyectiva en $[-\pi/2, \pi/2]$.

donde $-1 \leqslant x \leqslant 1$ y $-\pi/2 \leqslant \operatorname{arcsen} x \leqslant \pi/2$.

Bajo restricciones adecuadas, cada una de las seis funciones trigonométricas es inyectiva y admite inversa, como recoge la siguiente definición.

EXPLORACIÓN

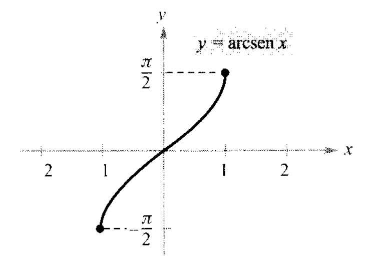
La función inversa de la secante En la anterior definición, la función inversa de la secante se ha definido restringiendo el dominio de la función secante a los intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. La mayoría de los libros coinciden en la restricción elegida, pero algunos discrepan. ¿Qué otros dominios podrían adoptarse? Explique su razonamiento gráficamente. La mayoría de las calculadoras no disponen de la función inversa de la secante. ¿Cómo se puede evaluar dicha función con la calculadora?

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

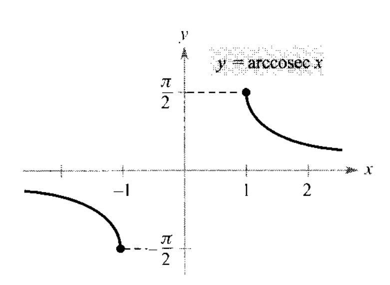
Función	*Dominio*	*Recorrido*
$y = \operatorname{arcsen} x$ si y sólo si $\operatorname{sen} y = x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$ si y sólo si $\cos y = x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	$0 \leqslant y \leqslant \pi$
$y = \operatorname{arctg} x$ si y sólo si $\operatorname{tg} y = x$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arcctg} x$ si y sólo si $\operatorname{ctg} y = x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$
$y = \operatorname{arcsec} x$ si y sólo si $\sec y = x$	$\lvert x \rvert \geqslant 1$	$0 \leqslant y \leqslant \pi,\ y \neq \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arccosec} x$ si y sólo si $\operatorname{cosec} y =$	$\lvert x \rvert \geqslant 1$	$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2},\ y \neq 0$

Nota. El término «arcsen x» se lee «arco seno de x» o, en más detalle, «ángulo cuyo seno es x». Una notación alternativa para la función inversa del seno es «$\operatorname{sen}^{-1} x$».

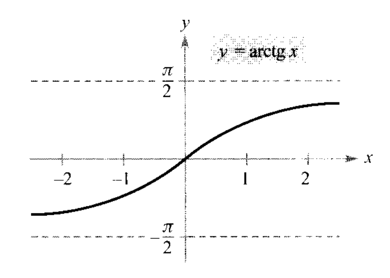
La Figura 5.38 muestra las gráficas de las seis funciones trigonométricas inversas.



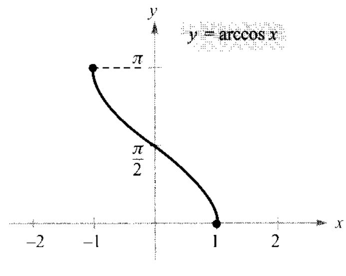
Dominio: $[-1, 1]$
Recorrido: $[-\pi/2, \pi/2]$



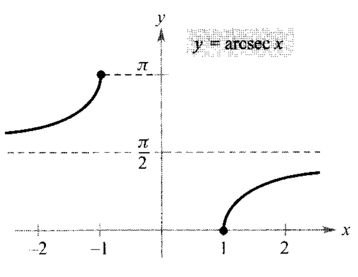
Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Recorrido: $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$



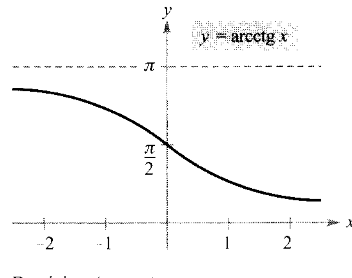
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido: $(-\pi/2, \pi/2)$



Dominio: $[-1, 1]$
Recorrido: $[0, \pi]$



Dominio: $[-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Recorrido: $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido: $(0, \pi)$

FIGURA 5.38
Gráficas de las seis funciones trigonométricas inversas.

EJEMPLO 1 Evaluación de las funciones trigonométricas inversas

Nota. Al evaluar funciones trigonométricas inversas recuerde que denotan *ángulos medidos en radianes.*

Evaluar:

a) $\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$ *b*) $\arccos 0$ *c*) $\text{arctg}\,\sqrt{3}$ *d*) $\text{arcsen}\,(0{,}3)$

Solución:

a) Por definición, $y = \text{arcsen}\,(-\frac{1}{2})$ implica que $\text{sen}\, y = -\frac{1}{2}$. En el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ el valor correcto de y es $-\pi/6$.

$$\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

b) Por definición, $y = \arccos 0$ implica que $\cos y = 0$. En el intervalo $[0, \pi]$ tenemos $y = \pi/2$.

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

c) Por definición, $y = \text{arctg}\,\sqrt{3}$ implica que $\text{tg}\, y = \sqrt{3}$. En el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ tenemos $y = \pi/3$.

$$\text{arctg}\,\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

d) Usando la calculadora en «modo radianes» se obtiene

$$\text{arcsen}\,(0{,}3) \approx 0{,}3047$$ □

EXPLORACIÓN

Representar $y = \arccos(\cos x)$ en $-4\pi \leqslant x \leqslant 4\pi$. ¿Por qué no resulta ser la gráfica de $y = x$?

Las funciones inversas tienen las propiedades

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

Al aplicar estas relaciones a las funciones trigonométricas inversas, debe tenerse en cuenta que las funciones trigonométricas tienen inversas sólo en los dominios restringidos. Para valores de x fuera de esos dominios, esas dos propiedades no son válidas. Así, arcsen (sen π) es 0, no π.

PROPIEDADES DE INVERSAS

Si $-1 \leqslant x \leqslant 1$ y $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, entonces

$$\text{sen}\,(\text{arcsen}\, x) = x \quad \text{y} \quad \text{arcsen}\,(\text{sen}\, y) = y$$

Si $-\pi/2 < y < \pi/2$, entonces

$$\text{tg}\,(\text{arctg}\, x) = x \quad \text{y} \quad \text{arctg}\,(\text{tg}\, y) = y$$

Si $|x| \geqslant 1$ y $0 \leqslant y < \pi/2$ o $\pi/2 < y \leqslant \pi$, entonces

$$\sec(\text{arcsec}\, x) = x \quad \text{y} \quad \text{arcsec}\,(\sec y) = y$$

Propiedades análogas son válidas para las otras funciones trigonométricas inversas.

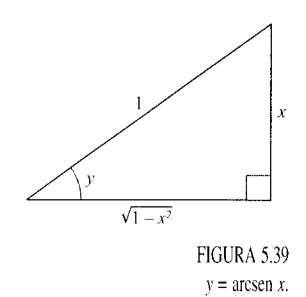


FIGURA 5.39
$y = \text{arcsen } x$.

EJEMPLO 2 Usando las propiedades de inversas para resolver una ecuación

$\text{arctg }(2x - 3) = \dfrac{\pi}{4}$	Ecuación original
$\text{tg }[\text{arctg }(2x - 3)] = \text{tg }\dfrac{\pi}{4}$	Tomar tangentes en ambos lados
$2x - 3 = 1$	Aplicar la propiedad de inversa
$x = 2$	Despejar x

□

Algunos problemas requieren evaluar expresiones del tipo cos (arcsen x), como ilustra el próximo ejemplo.

EJEMPLO 3 Usando triángulos rectángulos

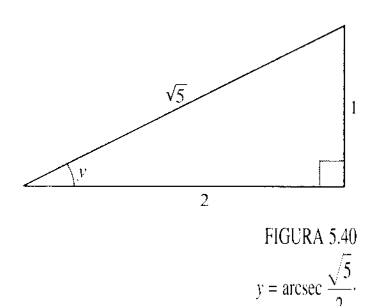


FIGURA 5.40
$y = \text{arcsec } \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

a) Dada $y = \text{arcsen } x$, donde $0 < y < \pi/2$, hallar cos y.
b) Dada $y = \text{arcsec }(\sqrt{5}/2)$, hallar tg y.

Solución:

a) Como $y = \text{arcsen } x$, sabemos que sen $y = x$. Esta relación entre x e y puede representarse en un triángulo rectángulo, como indica la Figura 5.39.

$$\cos y = \cos (\text{arcsen } x) = \frac{\text{ady.}}{\text{hip.}} = \sqrt{1 - x^2}$$

(Este resultado es válido también para $-\pi/2 < y < 0$.)

b) Usando el triángulo rectángulo de la Figura 5.40 se obtiene

$$\text{tg } y = \text{tg}\left[\text{arcsec}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right] = \frac{\text{op.}}{\text{ady.}} = \frac{1}{2}$$

□

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

En la Sección 5.1 vimos que la derivada de la función *trascendente* $f(x) = \ln x$ es la función *algebraica* $f'(x) = 1/x$. Ahora veremos que las derivadas de las funciones trigonométricas inversas son también algebraicas (aunque las funciones trigonométricas son trascendentes).

El próximo teorema da la lista de las derivadas de las seis funciones trigonométricas inversas. Nótese que tres de ellas son las negativas de las otras tres.

Nota. No hay acuerdo universal sobre la definición de arcsec x (o de arccosec x) para valores negativos de x. Al definir el recorrido de la arcsec elegimos preservar la identidad de reciprocidad

$$\text{arcsec } x = \text{arccos } \frac{1}{x}$$

Por ejemplo, para evaluar arcsec (−2) hacemos

$$\text{arcsec }(-2) = \text{arccos }(-0{,}5) \approx 2{,}09$$

Una de las consecuencias de la definición de la inversa de arcsec expuesta en el texto es que su gráfica tiene pendiente positiva en todo x de su dominio (Figura 5.38). Ello se refleja en el signo de valor absoluto en la fórmula de la derivada de arcsec x.

TEOREMA 5.18 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Si u es una función derivable de x,

$$\frac{d}{dx}[\text{arcsen } u] = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad \frac{d}{dx}[\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{arctg } u] = \frac{u'}{1+u^2} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arcctg } u] = \frac{-u'}{1+u^2}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{arcsec } u] = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arccosec } u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

Estas fórmulas se deducen por derivación implícita. Así, $y = \text{arcsen } x$, entonces $\text{sen } y = x$ y $(\cos y)y' = 1$. (Véase Ejercicio 64.)

EJEMPLO 4 Derivación de funciones trigonométricas inversas

Si su calculadora no dispone de la función arcsec, puede obtener su gráfica usando

$$f(x) = \text{arcsec } x = \arccos \frac{1}{x}$$

a) $\displaystyle \frac{d}{dx}[\text{arcsen }(2x)] = \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

b) $\displaystyle \frac{d}{dx}[\text{arctg }(3x)] = \frac{3}{1+(3x)^2} = \frac{3}{1+9x^2}$

c) $\displaystyle \frac{d}{dx}[\text{arcsen } \sqrt{x}] = \frac{(1/2)x^{-1/2}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

d) $\displaystyle \frac{d}{dx}[\text{arcsec } e^{2x}] = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}\sqrt{(e^{2x})^2-1}} = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}\sqrt{e^{4x}-1}} = \frac{2}{\sqrt{e^{4x}-1}}$

El signo de valor absoluto no es necesario, porque $e^{2x} > 0$. □

EJEMPLO 5 Una derivada que admite simplificación

Derivar $y = \text{arcsen } x + x\sqrt{1-x^2}$.

Solución:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + x\left(\frac{1}{2}\right)(-2x)(1-x^2)^{-1/2} + \sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} \\ &= \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} \\ &= 2\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

□

Nota. En el Ejemplo 5 se aprecia una de las ventajas de las funciones trigonométricas inversas: pueden utilizarse para integrar funciones algebraicas comunes. Por ejemplo, del resultado de ese ejemplo se sigue que

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\text{arcsen } x + x\sqrt{1-x^2})$$

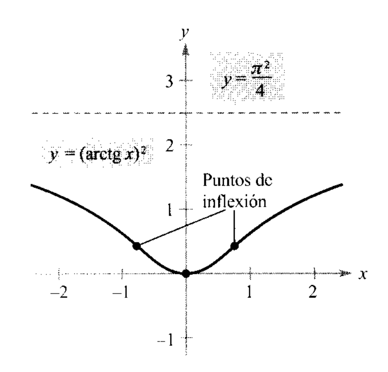


FIGURA 5.41
La gráfica de $y = (\text{arctg } x)^2$ tiene una asíntota horizontal en $y = \pi^2/4$.

EJEMPLO 6 Una gráfica relacionada con una función inversa

Analizar la gráfica de $y = (\text{arctg } x)^2$.

Solución: De la derivada

$$y' = 2(\text{arctg } x)\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{2 \text{ arctg } x}{1+x^2}$$

deducimos que el único número crítico es $x = 0$. Por el criterio de la primera derivada, corresponde a un mínimo relativo. Y de la segunda derivada

$$y'' = \frac{(1+x)\left(\frac{2}{1+x^2}\right) - (2 \text{ arctg } x)(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1 - 2x \text{ arctg } x)}{(1+x^2)^2}$$

se sigue que los puntos de inflexión están en los x donde $2x \text{ arctg } x = 1$. Usando el método de Newton se ve que esos puntos son $x \approx \pm 0{,}765$. Finalmente, de

$$\lim_{x \to \pm\infty} (\text{arctg } x)^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

concluimos que la gráfica tiene a $y = \pi^2/4$ como asíntota horizontal. La Figura 5.41 muestra la gráfica. □

EJEMPLO 7 Haciendo máximo un ángulo

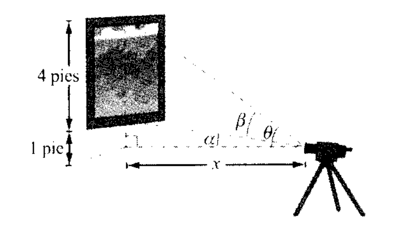


FIGURA 5.42
La cámara debe estar a 2,236 pies de la pared para hacer que el ángulo β sea máximo.

Se está fotografiando de un cuadro de 4 pies de altura colgado en una pared de una galería de arte. La lente de la cámara está 1 pie bajo el extremo inferior del cuadro (Figura 5.42). ¿A qué distancia de la pared ha de colocarse la cámara para conseguir que el ángulo subtendido por el cuadro sea máximo?

Solución: En la Figura 5.42, el ángulo β que deseamos maximizar cumple

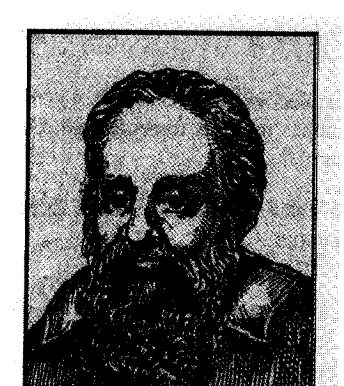
$$\beta = \theta - \alpha = \text{arcctg } \frac{x}{5} - \text{arcctg } x$$

Derivando obtenemos

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{-1/5}{1 + (x^2/25)} - \frac{-1}{1+x^2} = \frac{-5}{25+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{4(5-x^2)}{(25+x^2)(1+x^2)}$$

Como $d\beta/dx = 0$ cuando $x = \sqrt{5}$, concluimos del criterio de la primera derivada que esa distancia hace máximo al ángulo β. Así pues, la distancia requerida es $x \approx 2{,}236$ pies y el ángulo máximo $\beta \approx 0{,}7297$ radianes $\approx 41{,}81°$. □

Resumen de las reglas de derivación básicas



GALILEO GALILEI (1564-1642)

La visión de la Ciencia en Galileo arrancaba de la aceptada perspectiva aristotélica de que la Naturaleza tiene magnitudes susceptibles de descripción, tales como «fluidez» o «potencialidad». Él optó por describir el mundo físico en términos de *cantidades* medibles, como el tiempo, la distancia, la fuerza y la masa.

En el siglo XVII Europa se vió inmersa en la era científica por grandes pensadores como Descartes, Galileo, Huygens, Newton y Kepler. Estos hombres creían en una naturaleza gobernada por leyes básicas, expresables en gran parte en términos matemáticos. Una de las publicaciones más influyentes de la época, el *Diálogo dei massimi sistemi* de Galileo Galilei, se ha convertido en una descripción clásica del pensamiento científico moderno.

Conforme las Matemáticas se han ido desarrollando en los siglos posteriores, se ha visto que unas pocas funciones elementales son suficientes como modelos de la mayoría (algunas funciones importantes usadas en Ciencia o en Ingeniería, como las funciones de Bessel o la función gamma, no son funciones elementales) de los fenómenos de la Física, la Química, la Biología, la Ingeniería, la Economía y otros muchos campos. Una **función elemental** es una función de la lista siguiente o que puede construirse con las que aparecen en ella mediante sumas, productos, cocientes o composiciones.

Funciones algebraicas	*Funciones trascendentes*
Funciones polinómicas	Funciones logarítmicas
Funciones racionales	Funciones exponenciales
Funciones con radicales	Funciones trigonométricas
	Funciones trigonométricas inversas

Con las reglas de derivación introducidas hasta ahora en el texto es posible derivar todas las funciones elementales. Por conveniencia, resumimos esas reglas aquí.

Reglas básicas de derivación de funciones elementales

1. $\frac{d}{dx}[cu] = cu'$
2. $\frac{d}{dx}[u \pm v] = u' \pm v'$
3. $\frac{d}{dx}[uv] = uv' + vu'$
4. $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{vu' - uv'}{v^2}$
5. $\frac{d}{dx}[c] = 0$
6. $\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$
7. $\frac{d}{dx}[x] = 1$
8. $\frac{d}{dx}[|u|] = \frac{u}{|u|}(u'),\ u \neq 0$
9. $\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{u'}{u}$
10. $\frac{d}{dx}[e^u] = e^u u'$
11. $\frac{d}{dx}[\log_a u] = \frac{u'}{(\ln a)u}$
12. $\frac{d}{dx}[a^u] = (\ln a)a^u u'$
13. $\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} u] = (\cos u)u'$
14. $\frac{d}{dx}[\cos u] = -(\operatorname{sen} u)u'$
15. $\frac{d}{dx}[\operatorname{tg} u] = (\sec^2 u)u'$
16. $\frac{d}{dx}[\operatorname{ctg} u] = -(\operatorname{cosec}^2 u)u'$
17. $\frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \operatorname{tg} u)u'$
18. $\frac{d}{dx}[\operatorname{cosec} u] = -(\operatorname{cosec} u \operatorname{ctg} u)u'$
19. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsen} u] = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
20. $\frac{d}{dx}[\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
21. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arctg} u] = \frac{u'}{1 + u^2}$
22. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcctg} u] = \frac{-u'}{1 - u^2}$
23. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$
24. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arccosec} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$

Ejercicios de la Sección 5.8

Análisis numérico y gráfico En los Ejercicios 1 y 2, *a*) completar la tabla con ayuda de calculadora, *b*) representar a mano los puntos de la tabla y la función, *c*) representar la función en la calculadora y comparar con el dibujo anterior, y *d*) hallar las intersecciones con los ejes y las simetrías de la gráfica.

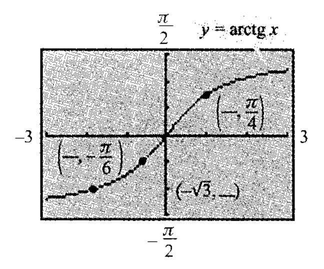
x	−1	−0,8	−0,6	−0,4	−0,2
y					

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y						

1. $y = \text{arcsen}\, x$ **2.** $y = \text{arccos}\, x$

3. ***¿Verdadero o falso?*** Decidir si esta afirmación es correcta y explicar la respuesta: Como $\cos(-\pi/3) = \frac{1}{2}$, se sigue que $\text{arccos}\, \frac{1}{2} = -\pi/3$.

4. Determinar las coordenadas que faltan en los puntos de la gráfica de la función.



En los Ejercicios 5-12, evaluar la expresión sin calculadora.

5. $\text{arcsen}\, \frac{1}{2}$ **6.** $\text{arcsen}\, 0$

7. $\text{arccos}\, \frac{1}{2}$ **8.** $\text{arccos}\, 0$

9. $\text{arctg}\, \frac{\sqrt{3}}{3}$ **10.** $\text{arcctg}\, (-1)$

11. $\text{arccosec}\, (-\sqrt{2})$ **12.** $\text{arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

En los Ejercicios 13-16, usar la calculadora para aproximar la función trigonométrica inversa. Redondear la respuesta a dos decimales.

13. $\text{arccos}\, (-0{,}8)$ **14.** $\text{arcsen}\, (-0{,}39)$

15. $\text{arcsen}\, 1{,}269$ **16.** $\text{arctg}\, (-3)$

17. ***Para pensar*** Explicar por qué $\text{tg}\, \pi = 0$ no implica que $\text{arctg}\, 0 = \pi$.

18. Confirmar con la calculadora que $f(x) = \text{sen}\, x$ y $g(x) = \text{arcsen}\, x$ son funciones inversas (recordar que debe restringirse el dominio).

En los Ejercicios 19-22, evaluar la expresión sin usar calculadora. (*Ayuda:* Véase Ejemplo 3.)

19. *a*) $\text{sen}\left(\text{arctg}\, \frac{3}{4}\right)$ **20.** *a*) $\text{tg}\left(\text{arccos}\, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $\sec\left(\text{arcsen}\, \frac{4}{5}\right)$ *b*) $\cos\left(\text{arcsen}\, \frac{5}{13}\right)$

21. *a*) $\text{ctg}\left[\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ **22.** *a*) $\sec\left[\text{arctg}\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$

b) $\text{cosec}\left[\text{arctg}\left(-\frac{5}{12}\right)\right]$ *b*) $\text{tg}\left[\text{arcsen}\left(-\frac{5}{6}\right)\right]$

En los Ejercicios 23-30, escribir la expresión en forma algebraica.

23. $\cos(\text{arcsen}\, 2x)$ **24.** $\sec(\text{arctg}\, 3x)$

25. $\text{sen}\,(\text{arcsec}\, x)$ **26.** $\cos(\text{arcctg}\, x)$

27. $\text{tg}\left(\text{arcsec}\, \frac{x}{3}\right)$ **28.** $\sec[\text{arcsen}\,(x-1)]$

29. $\text{cosec}\left(\text{arctg}\, \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ **30.** $\cos\left(\text{arcsen}\, \frac{x-h}{r}\right)$

En los Ejercicios 31 y 32, representar en la calculadora f y g conjuntamente para comprobar que son iguales. Explicar la razón. Identificar sus asíntotas.

31. $f(x) = \text{sen}\,(\text{arctg}\, 2x),\quad g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$

32. $f(x) = \text{tg}\left(\text{arccos}\, \frac{x}{2}\right),\quad g(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

En los Ejercicios 33 y 34, verificar cada identidad.

33. *a*) $\text{arccosec}\, x = \text{arcsen}\, \frac{1}{x},\quad |x| \geqslant 1$

b) $\text{arctg}\, x + \text{arctg}\, \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},\quad x > 0$

34. *a*) $\text{arcsen}\,(-x) = -\text{arcsen}\, x,\quad |x| \leqslant 1$

b) $\text{arccos}\,(-x) = \pi - \text{arccos}\, x,\quad |x| \leqslant 1$

En los Ejercicios 35-38, dibujar la gráfica de la función a mano y comprobarla en la calculadora.

35. $f(x) = \text{arcsen}\,(x - 1)$ **36.** $f(x) = \text{arctg}\, x + \frac{\pi}{2}$

37. $f(x) = \text{arcsec}\, 2x$ **38.** $f(x) = \arccos \frac{x}{4}$

En los Ejercicios 39-42, despejar x.

39. $\text{arcsen}\,(3x - \pi) = \frac{1}{2}$ **40.** $\text{arctg}\, 2x = -1$

41. $\text{arcsen}\sqrt{2x} = \arccos\sqrt{x}$ **42.** $\arccos x = \text{arcsec}\, x$

En los Ejercicios 43-56, hallar la primera derivada de la función.

43. $f(x) = 2\,\text{arcsen}\,(x - 1)$ **44.** $f(x) = \text{arcsen}\, t^2$

45. $f(x) = 3 \arccos \frac{x}{2}$ **46.** $f(x) = \text{arcsec}\, 2x$

47. $f(x) = \text{arctg}\, \frac{x}{a}$ **48.** $f(x) = \text{arctg}\sqrt{x}$

49. $f(x) = \dfrac{\text{arcsen}\, 3x}{x}$ **50.** $h(x) = x\, \text{arctg}\, x$

51. $h(t) = \text{sen}\,(\arccos t)$

52. $f(x) = \text{arcsen}\, x + \arccos x$

53. $y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + \text{arctg}\, x\right)$

54. $y = \frac{1}{2}(x\sqrt{1 - x^2} + \text{arcsen}\, x)$

55. $y = x\, \text{arcsen}\, x + \sqrt{1 - x^2}$

56. $y = x\, \text{arctg}\, 2x - \frac{1}{4}\ln(1 + 4x^2)$

Aproximaciones lineal y cuadrática En los Ejercicios 57 y 58, usar derivación simbólica para hallar la aproximación lineal

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

y la aproximación cuadrática

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

de la función f en $x = a$. Dibujar la función y sus dos aproximaciones.

57. $f(x) = \text{arcsen}\, x$, $a = \frac{1}{2}$ **58.** $f(x) = \text{arctg}\, x$, $a = 1$

En los Ejercicios 59 y 60, encontrar los extremos relativos de la función.

59. $f(x) = \text{arcsen}\, x - x$ **60.** $f(x) = \text{arcsen}\, x - 2x$

61. ***Ritmo de cambio angular*** En un experimento sobre caída libre, se deja caer un objeto desde una altura de 256 pies. Una cámara, situada en el suelo y distante 500 pies del punto de impacto, toma imágenes de la caída.
a) Hallar la función posición que describe la altura del objeto en cada instante t, supuesto que se deja caer en $t = 0$. ¿En qué momento llega al suelo?
b) Calcular el ritmo de cambio del ángulo de elevación de la cámara cuando $t = 1$ y $t = 2$.

62. ***Ritmo de cambio angular*** Una cámara de televisión graba el despegue vertical de un cohete desde 750 metros del punto de lanzamiento. Sea θ el ángulo de elevación del cohete y s la distancia entre la cámara y el cohete. Expresar θ como función de s. Derivar el resultado para hallar $d\theta/dt$ en términos de s y de ds/dt.

63. Demostrar que

$$\text{arctg}\, x + \text{arctg}\, y = \text{arctg}\,\frac{x + y}{1 - xy}, \quad xy \neq 1$$

Usar esa fórmula para probar que

$$\text{arctg}\,\frac{1}{2} + \text{arctg}\,\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

64. Verificar las siguientes fórmulas de derivación.

a) $\dfrac{d}{dx}[\text{arcsen}\, u] = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

b) $\dfrac{d}{dx}[\text{arctg}\, u] = \dfrac{u'}{1 + u^2}$

c) $\dfrac{d}{dx}[\text{arcsec}\, u] = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$

d) $\dfrac{d}{dx}[\arccos u] = \dfrac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

e) $\dfrac{d}{dx}[\text{arcctg}\, u] = \dfrac{-u'}{1 + u^2}$

f) $\dfrac{d}{dx}[\text{arccosec}\, u] = \dfrac{-u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$

65. ***Existencia de inversa*** Averiguar los valores de k para los que la función $f(x) = kx + \text{sen}\, x$ tiene inversa.

66. ***Para pensar*** Representar en la calculadora

$$f(x) = \text{sen } x \quad \text{y} \quad g(x) = \text{arcsen (sen } x)$$

a) ¿Por qué la gráfica de g no es la recta $y = x$?
b) Hallar los extremos de g.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 67-70, decidir si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar por qué o exhibir un ejemplo que ponga de manifiesto su falsedad.

67. La pendiente de la gráfica de la inversa de la función tangente es positiva para todo x.

68. El recorrido de $y = \text{arcsen } x$ es $[0, \pi]$.

69. $\dfrac{d}{dx}[\text{arctg (tg } x)] = 1$ para todo x en el dominio.

70. $\text{arcsen}^2\, x + \text{arccos}^2\, x = 1$.



5.9 Funciones trigonométricas inversas e integración

CONTENIDO ▪
Integrales que contienen funciones trigonométricas inversas ▪
Completar el cuadrado ▪
Resumen de reglas de integración básicas ▪

Integrales que contienen funciones trigonométricas inversas

Las derivadas de las seis funciones trigonométricas inversas se agrupan en pares. En cada par, la derivada de una es la negativa de la de la otra.

$$\frac{d}{dx}[\text{arcsen } x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

y

$$\frac{d}{dx}[\text{arccos } x] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Al hacer la lista de primitivas es suficiente una de cada par. Suele usarse arcsen x como primitiva de $1/\sqrt{1-x^2}$ en lugar de $-\text{arccos } x$. El próximo teorema da una fórmula para la primitiva de cada una de las tres parejas. Su demostración se deja como ejercicio (véase Ejercicio 48).

TEOREMA 5.19 INTEGRALES QUE CONTIENEN FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Sea u una función derivable de x y sea $a > 0$.

1. $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{arcsen}\,\frac{u}{a} + C$$
2. $$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\,\text{arctg}\,\frac{u}{a} + C$$
3. $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\,\text{arcsec}\,\frac{|u|}{a} + C$$

Nota. Otra demostración de la parte 2 del Teorema 5.19 puede verse en el artículo «A Direct Proof of the Integral Formula for Arctangent» de Arnold J. Insel, en *The College Mathematics Journal*, mayo 1989.

EJEMPLO 1 Integrales que contienen funciones trigonométricas inversas

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \text{arcsen}\,\frac{x}{2} + C$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+9x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,dx}{(\sqrt{2})^2 + (3x)^2}$ $\qquad u = 3x,\ a = \sqrt{2}$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\,\text{arctg}\,\frac{3x}{\sqrt{2}} + C$$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}} = \int \frac{2\,dx}{2x\sqrt{(2x)^2 - 3^2}}$ $\qquad u = 2x,\ a = 3$

$$= \frac{1}{3}\,\text{arcsec}\,\frac{|2x|}{3} + C$$ □

Integrales como la del Ejemplo 2 son fáciles con ayuda de programas de integración simbólica en calculadora. No obstante, al usarlos hay que recordar que pueden no dar una primitiva, y ello por dos razones. En primer lugar, algunas funciones elementales tienen primitivas no elementales. Y por otra parte, todos esos programas tienen limitaciones, así que puede darse el caso de que le introduzcamos una función para cuya integración no está preparada. Recuerde asimismo que las primitivas que involucran funciones trigonométricas o logarítmicas se pueden expresar de maneras muy diversas. Por ejemplo, al resolver con uno de esos programas la integral del Ejemplo 2, se obtiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \text{arctg}\,\sqrt{e^{2x}-1} + C$$

Demuestre que esta primitiva es equivalente a la obtenida en el Ejemplo 2.

Las integrales del Ejemplo 1 son aplicaciones muy directas de las fórmulas de integración. Por desgracia, no es lo frecuente. Las fórmulas de integración que involucran funciones trigonométricas inversas suelen camuflarse de muy diversas formas.

EJEMPLO 2 Integración por sustitución

Hallar $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

Solución: Tal como está, la integral no se ajusta a ninguna de las tres fórmulas para las funciones trigonométricas inversas. Pero haciendo $u = e^x$ se obtiene

$$u = e^x \implies du = e^x\,dx \implies dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}$$

Con esa sustitución ya podemos integrar así:

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(e^x)^2 - 1}}$ — Escribir e^{2x} como $(e^x)^2$

$\displaystyle= \int \frac{du/u}{\sqrt{u^2-1}}$ — Sustituir

$\displaystyle= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$ — Reescribir para que se aplique la regla del arcsec

$\displaystyle= \text{arcsec}\,\frac{|u|}{1} + C$ — Aplicar la regla del arcsec

$= \text{arcsec}\,e^x + C$ — Deshacer la sustitución □

EJEMPLO 3 Reescribir como suma de dos cocientes

Hallar $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$

Solución: Tampoco esta integral parece ajustarse a las fórmulas. Sin embargo, desdoblando el integrando en dos partes, la primera es integrable por la regla de las potencias y la segunda da una inversa del seno.

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + \int \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\int (4-x^2)^{-1/2}(-2x)\,dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{(4-x^2)^{1/2}}{1/2}\right] + 2 \operatorname{arcsen}\frac{x}{2} + C\\ &= -\sqrt{4-x^2} + 2\operatorname{arcsen}\frac{x}{2} + C\end{aligned}$$ □

Completar el cuadrado

Cuando hay funciones cuadráticas en el integrando, completar el cuadrado ayuda a resolver la integral. Por ejemplo, la función cuadrática $x^2 + bx + c$ puede escribirse como diferencia de dos cuadrados sumando y restando $(b/2)^2$

$$x^2 + bx + c = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

EJEMPLO 4 Completar el cuadrado

Hallar $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 7}.$

Solución: Escribimos el denominador como suma de dos cuadrados.

$$x^2 - 4x + 7 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 7 = (x-2)^2 + 3 = u^2 + a^2$$

Ahora, hacemos $u = x - 2$ y $a = \sqrt{3}$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 7} = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{3}} + C$$ □

Si el coeficiente dominante no es 1, conviene sacarlo factor común del cuadrado. Por ejemplo, se puede completar el cuadrado en $2x^2 - 8x + 10$ como sigue

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + 10 &= 2(x^2 - 4x + 5) \\ &= 2(x^2 - 4x + 4 - 4 + 5) \\ &= 2[(x-2)^2 + 1] \end{aligned}$$

Para completar el cuadrado cuando el coeficiente de x^2 es negativo, el mismo proceso de sacar factor común sirve. Así, se puede completar el cuadrado en $3x - x^2$ como sigue:

$$\begin{aligned} 3x - x^2 &= -(x^2 - 3x) \\ &= -\left[x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

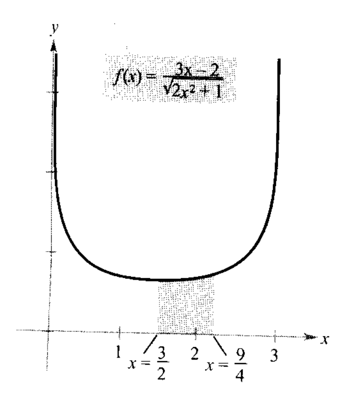


FIGURA 5.43
El área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x y las rectas $x = 3/2$, $x = 9/4$ es $\pi/6$.

EJEMPLO 5 Completar el cuadrado (coeficiente dominante negativo)

Calcular el área de la región acotada por la gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}$$

el eje x y las rectas $x = \frac{3}{2}$ y $x = \frac{9}{4}$.

Solución: En la Figura 5.43 vemos que el área viene dada por

$$\text{Área} = \int_{3/2}^{9/4} \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}\, dx$$

Usando la forma con el cuadrado completado de antes se puede integrar:

$$\begin{aligned} \int_{3/2}^{9/4} \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2}} &= \int_{3/2}^{9/4} \frac{dx}{\sqrt{(3/2)^2 - [x - (3/2)]^2}} \\ &= \text{arcsen}\, \frac{x - (3/2)}{3/2}\Bigg]_{3/2}^{9/4} \\ &= \text{arcsen}\, \frac{1}{2} - \text{arcsen}\, 0 \\ &= \frac{\pi}{6} \\ &\approx 0{,}524 \end{aligned}$$

□

Con integrales como la del Ejemplo 5 siempre queda el recurso de una solución numérica. Así, la regla de Simpson con $n = 6$ da en este caso

$$\int_{3/2}^{9/4} \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}\, dx$$
$$\approx 0{,}523599$$

Este valor difiere del valor exacto ($\pi/6 \approx 0{,}5235987$) en menos de una millonésima.

Resumen de reglas de integración básicas

Ya hemos completado la introducción de **reglas básicas de integración**. Si se quiere llegar a un uso eficaz de tales fórmulas resulta más que conveniente aprenderlas de memoria.

Reglas básicas de integración ($a > 0$)

1. $\int kf(u)\,du = k\int f(u)\,du$
2. $\int [f(u) \pm g(u)]\,du = \int f(u)\,du \pm \int g(u)\,du$
3. $\int du = u + C$
4. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$
6. $\int e^u\,du = e^u + C$
7. $\int a^u\,du = \left(\dfrac{1}{\ln a}\right)a^u + C$
8. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$
9. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
10. $\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u| + C$
11. $\int \operatorname{ctg} u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
12. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$
13. $\int \operatorname{cosec} u\,du = -\ln|\operatorname{cosec} u + \operatorname{ctg} u| + C$
14. $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C$
15. $\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\operatorname{ctg} u + C$
16. $\int \sec u \operatorname{tg} u\,du = \sec u + C$
17. $\int \operatorname{cosec} u \operatorname{ctg} u\,du = -\operatorname{cosec} u + C$
18. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen} \dfrac{u}{a} + C$
19. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{u}{a} + C$
20. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arcsec} \dfrac{|u|}{a} + C$

Se aprende mucho comparando esta lista con la de las reglas de derivación de la sección anterior. Mientras disponemos ya de reglas de derivación suficientes para derivar *cualquier* función elemental, la situación en lo que se refiere a la integración dista mucho de ese nivel.

Las reglas recogidas en la lista de aquí arriba son esencialmente las que hemos podido deducir de las reglas de derivación. No hemos desarrollado reglas para integrar un producto o un cociente general, o la función logaritmo natural o las funciones trigonométricas inversas. Lo que es más importante, ninguna de las reglas de la lista es aplicable si no se logra construir el *du* apropiado correspondiente a la *u* de la fórmula. La cuestión es que necesitamos trabajar más sobre técnicas de integración, cosa que haremos en el Capítulo 7. Tal vez los dos ejemplos próximos den una idea más clara de lo que *se puede* y de lo que *no se puede* hacer con las técnicas de que disponemos en este momento.

EJEMPLO 6 Comparación de problemas de integración

Hallar las integrales que sea posible, de entre las que se proponen, mediante las técnicas estudiadas hasta ahora en este libro.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ *b*) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$ *c*) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

Solución:

a) *Se puede* integrar (se ajusta a la regla de la arcsec).

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec}|x| + C$$

b) *Se puede* integrar también (se adapta la regla de las potencias).

$$\begin{aligned}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \frac{1}{2}\int (x^2-1)^{-1/2}(2x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2-1)^{1/2}}{1/2}\right] + C\\ &= \sqrt{x^2-1} + C\end{aligned}$$

c) *No se puede* integrar con las técnicas de que disponemos. Verifique esta conclusión pasando revista a las fórmulas de nuestra lista. □

EJEMPLO 7 Comparación de problemas de integración

Hallar las integrales que sea posible, de entre las que se proponen, mediante las técnicas estudiadas hasta ahora en este libro.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$ *b*) $\displaystyle\int \frac{\ln x\,dx}{x}$ *c*) $\displaystyle\int \ln x\,dx$

Solución:

a) *Se puede* integrar (se ajusta a la regla log).

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\ln x} &= \int \frac{1/x}{\ln x}\,dx\\ &= \ln|\ln x| + C\end{aligned}$$

b) *Se puede* integrar (la regla de las potencias es suficiente).

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x\,dx}{x} &= \int \left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)^1\,dx\\ &= \frac{(\ln x)^2}{2} + C\end{aligned}$$

c) *No se puede* integrar con las técnicas de que disponemos. □

Nota. Hagamos constar que en los Ejemplos 6 y 7 son precisamente las funciones de aspecto más sencillo las que no somos capaces de integrar todavía.

Ejercicios de la Sección 5.9

En los Ejercicios 1-20, hallar la integral.

1. $\displaystyle\int_0^{1/6} \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} = dx$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

3. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{1+4x^2}\,dx$

4. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^3 \frac{1}{9+x^2}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{4+(x-1)^2}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{x^4-1}{x^2+1}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{t}{t^4+16}\,dt$

11. $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{1-t^4}}\,dt$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-4}}\,dx$

13. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\text{arcsen}\, x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

14. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

14. $\displaystyle\int_{-1/2}^0 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

16. $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{x}{1+x^2}\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{4+e^{4x}}\,dx$

18. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{3+(x-2)^2}\,dx$

19. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\text{sen}\, x}{1+\cos^2 x}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$

En los Ejercicios 21-32, calcular la integral, completando el cuadrado cuando sea necesario.

21. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2-2x+2}$

22. $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x^2+6x+13}$

23. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+6x+13}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^2+2x+2}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-4x}}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x}}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx$

29. $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x-3}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+2x^2+2}\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9+8x^2-x^4}}\,dx$

Para pensar En los Ejercicios 33-36, determinar cuál de las integrales puede ser obtenida usando las reglas básicas estudiadas hasta ahora en el libro.

33. *a*) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ *c*) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$

34. *a*) $\displaystyle\int e^{x^2}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ *c*) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}e^{1/x}\,dx$

35. *a*) $\displaystyle\int \sqrt{x-1}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\,dx$ *c*) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

36. *a*) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$ *c*) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$

En los Ejercicios 37 y 38, hallar la integral mediante sustitución.

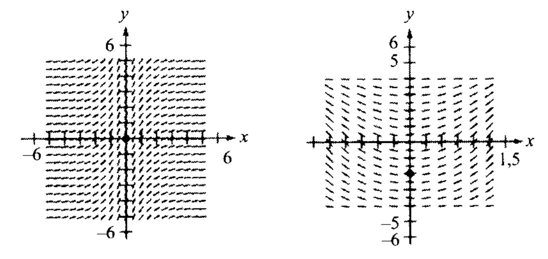
37. $\displaystyle\int \sqrt{e^t-3}\,dt$

38. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,dx$

Campos de direcciones En los Ejercicios 39 y 40, se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo de direcciones. Un *campo de direcciones* consta de segmentos rectos, con pendientes fijadas por la ecuación diferencial, que ofrecen una visualización de sus soluciones. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación sobre el campo de direcciones, una de las cuales pase por el punto especificado. *b*) Hallar, por integración, la solución particular de la ecuación diferencial y representarla en la calculadora. Comparar el resultado con los dibujos del apartado *a*).

39. $\displaystyle\frac{dy}{dx}=\frac{3}{1+x^2}$, $(0, 0)$

40. $\displaystyle\frac{dy}{dx}=x\sqrt{16-y^2}$, $(0, -2)$



En los Ejercicios 41 y 42, calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

41. $\displaystyle y=\frac{1}{x^2-2x+5}$, $y=0$, $x=1$, $x=3$

42. $\displaystyle y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$

43. ***Aproximación*** Determinar qué valor aproxima mejor el área de la región entre el eje x y la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

en el intervalo $[-0{,}5,\ 0{,}5]$. (Basar la elección en un dibujo de la región, no en cálculos.)

a) 4 *b*) −3 *c*) 1 *d*) 2 *e*) 3

44. ***Aproximación*** Dibujar la región cuya área viene dada por la integral

$$\int_0^1 \text{arcsen}\, x\, dx$$

y usar integración en la calculadora para aproximar su valor.

45. *a*) Probar que

$$\int_0^1 \frac{4}{1 + x^2}\, dx = \pi$$

b) Estimar el número π usando la regla de Simpson con $n = 6$ y la integral en *a*).

c) Estimar el número π usando integración en la calculadora.

46. ***Investigación*** Consideremos la función

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_x^{x+2} \frac{2}{t^2 + 1}\, dt$$

a) Dar una breve explicación escrita de $F(x)$ con relación a

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$$

Haciendo caso de tal explicación, estimar el valor de x donde $F(x)$ es máxima.

b) Efectuar la integración para hallar una forma alternativa de $F(x)$. Localizar, usando el Cálculo, el valor de x que hace máxima a $F(x)$ y compararlo con la estimación del apartado *a*).

47. Consideremos la integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{6x - x^2}}\, dx$$

a) Hallar la integral completando el cuadrado en el radical.

b) Hallarla ahora haciendo la sustitución $u = \sqrt{x}$.

c) Las primitivas obtenidas en *a*) y *b*) parecen muy diferentes. Representarles en la calculadora para ver la relación entre ellas. Determinar sus dominios.

48. Comprobar las siguientes fórmulas por derivación ($a > 0$).

a) $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{arcsen}\, \frac{u}{a} + C$

b) $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\, \text{arctg}\, \frac{u}{a} + C$

c) $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\, \text{arcsec}\, \frac{|u|}{a} + C$

49. ***Movimiento vertical*** Se lanza un objeto desde el suelo hacia arriba con velocidad inicial de 500 pies/s. En este ejercicio el objetivo es analizar su movimiento mientras asciende.

a) Despreciando la resistencia del aire, expresar la velocidad en función del tiempo. Representar esta función en la calculadora.

b) Usando el resultado del apartado *a*), hallar la función posición y calcular la altura máxima alcanzada por el objeto.

c) Si la resistencia del aire fuese proporcional al cuadrado de la velocidad, el movimiento seguiría la ecuación

$$\frac{dv}{dt} = -(32 + kv^2)$$

donde -32 pies/s^2 es la aceleración de la gravedad y k una constante. Hallar la velocidad en función del tiempo resolviendo la ecuación

$$\int \frac{dv}{32 + kv^2} = -\int dt$$

d) Representar en la calculadora la función velocidad del punto *c*) $v(t)$ si $k = 0{,}001$. Usar la gráfica para estimar el instante t_0 en el que se alcanza la máxima altura.

e) Usar integración en la calculadora para aproximar el valor de

$$\int_0^{t_0} v(t)\, dt$$

donde $v(t)$ y t_0 son los obtenidos en *d*). Ésta es la estimación de la máxima altura del objeto.

f) Explicar la diferencia entre los resultados de *b*) y los de *e*).

PARA MÁS INFORMACIÓN Véase el artículo «What Goes Up Must Come Down; Will Air Resistance Make It Return Sooner, or Later?» de John Lekner, en *Mathematics Magazine*, enero 1982.

50. Representar $y_1 = \dfrac{x}{1 + x^2}$, $y_2 = \text{arctg}\, x$, e $y_3 = x$ en $[0, 10]$. Probar que $\dfrac{x}{1 + x^2} < \text{arctg}\, x < x$ para $x > 0$.



5.10 Funciones hiperbólicas





JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728-1777)

Johann Heinrich Lambert, un matemático germano-suizo y colega de Euler, fue el primero en publicar un tratado acerca de las funciones hiperbólicas.

Funciones hiperbólicas

En esta sección estudiaremos brevemente una clase de funciones exponenciales especial, las llamadas **funciones hiperbólicas**. Esta denominación proviene de la comparación entre el área de una región circular (Figura 5.44) y la de una región hiperbólica (Figura 5.45). La integral que da el área del semicírculo contiene una *función trigonométrica (circular) inversa*:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2} + \text{arcsen}\, x\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}571$$

La integral que da el área de la región hiperbólica contiene una función hiperbólica inversa:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} + \text{sh}^{-1}\, x\right]_{-1}^{1} \approx 2{,}296$$

Ésta es una de las muchas analogías existentes entre las funciones hiperbólicas y las trigonométricas.

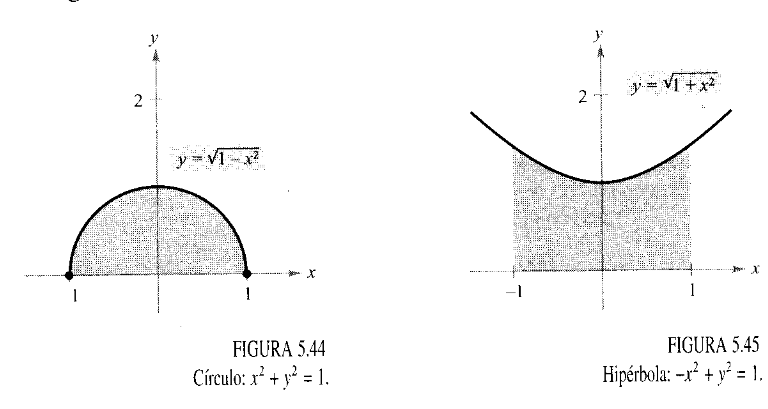
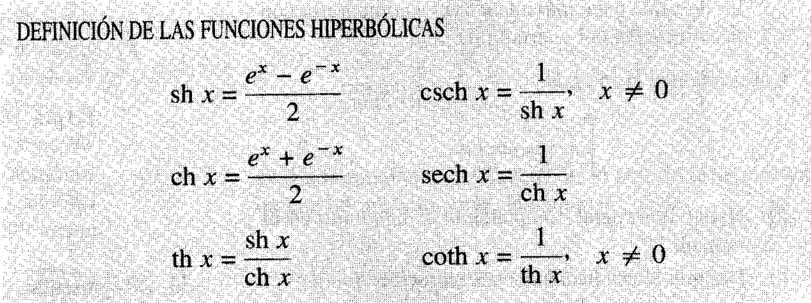


FIGURA 5.44
Círculo: $x^2 + y^2 = 1$.

FIGURA 5.45
Hipérbola: $-x^2 + y^2 = 1$.

PARA MÁS INFORMACIÓN
Véase el artículo «An Introduction to Hyperbolic Functions in Elementary Calculus» de Jerome Rosenthal, en *Mathematics Teacher*, abril 1986.



DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

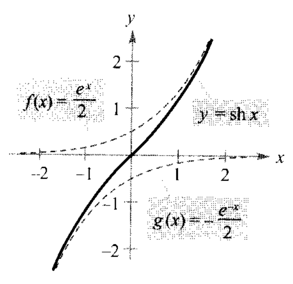
$$\text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{csch}\, x = \frac{1}{\text{sh}\, x}, \quad x \neq 0$$

$$\text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{sech}\, x = \frac{1}{\text{ch}\, x}$$

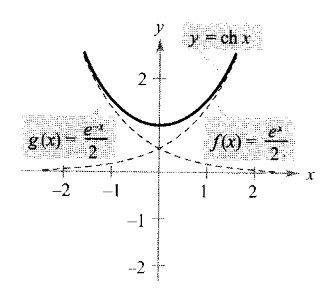
$$\text{th}\, x = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x} \qquad \text{coth}\, x = \frac{1}{\text{th}\, x}, \quad x \neq 0$$

Nota. sh x se lee «seno hiperbólico de x», ch x se lee «coseno hiperbólico de x», etc.

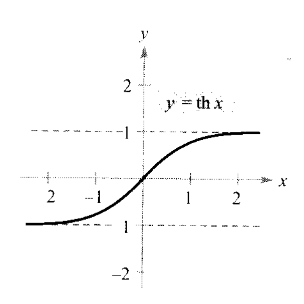
La Figura 5.46 muestra las gráficas de las seis funciones hiperbólicas, así como sus dominios y recorridos. Nótese que las gráficas de sh x y ch x se pueden obtener sumando las funciones exponenciales $f(x) = \frac{1}{2}e^x$ y $g(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$.



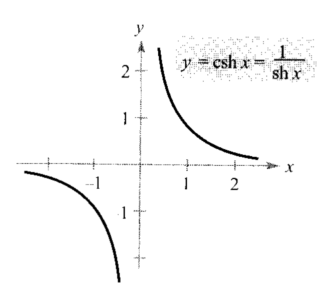
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido: $(-\infty, \infty)$



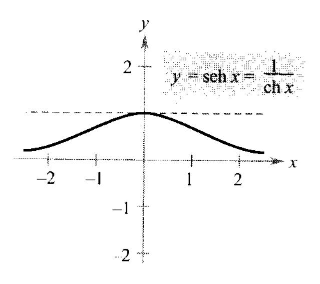
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido: $[1, \infty)$



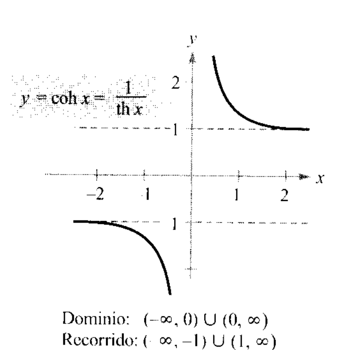
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido: $(-1, 1)$



Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Recorrido: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido: $(0, 1]$



Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Recorrido: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

FIGURA 5.46
Gráficas de las seis funciones hiperbólicas.

Muchas identidades trigonométricas tienen sus correspondientes *identidades hiperbólicas*. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{4}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

PARA MÁS INFORMACIÓN Véase el artículo «A Short Proof Linking the Hyperbolic and Geometric Functions» de Michael J. Seery, en *AMATYC Review*, volumen 15, n.º 2.

y

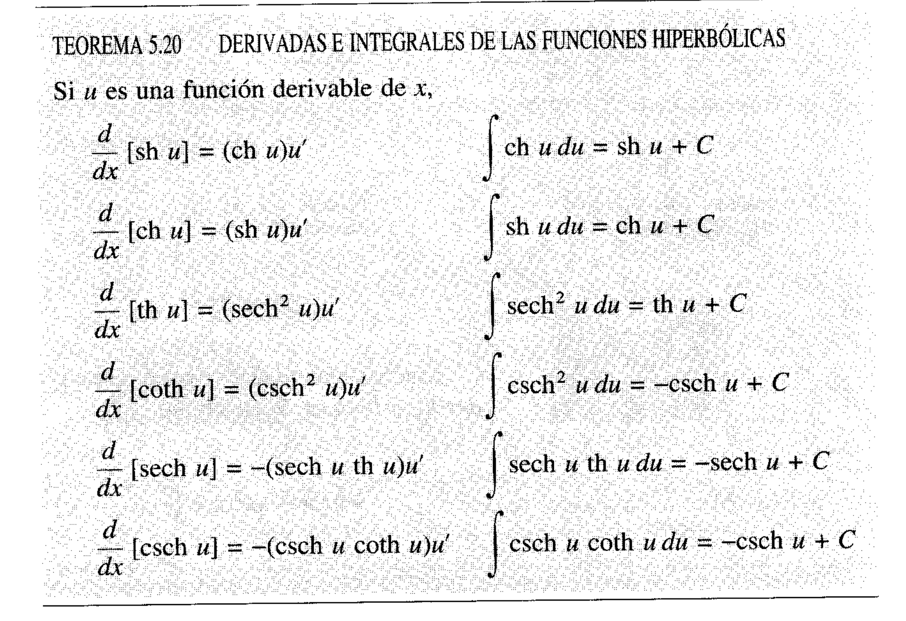
$$\begin{aligned}
2 \text{ sh } x \text{ ch } x &= 2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \\
&= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \\
&= \text{sh } 2x
\end{aligned}$$

IDENTIDADES HIPERBÓLICAS

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1 \qquad \text{sh}(x+y) = \text{sh}\, x\, \text{ch}\, y + \text{ch}\, x\, \text{sh}\, y$$
$$\text{th}^2 x + \text{sech}^2 x = 1 \qquad \text{sh}(x-y) = \text{sh}\, x\, \text{ch}\, y - \text{ch}\, x\, \text{sh}\, y$$
$$\text{cth}^2 x - \text{csch}^2 x = 1 \qquad \text{ch}(x+y) = \text{ch}\, x\, \text{ch}\, y + \text{sh}\, x\, \text{sh}\, y$$
$$\text{ch}(x-y) = \text{ch}\, x\, \text{ch}\, y - \text{sh}\, x\, \text{sh}\, y$$
$$\text{sh}^2 x = \frac{-1 + \text{ch}\, 2x}{2} \qquad \text{ch}^2 x = \frac{1 + \text{ch}\, 2x}{2}$$
$$\text{sh}\, 2x = 2\, \text{sh}\, x\, \text{ch}\, x \qquad \text{ch}\, 2x = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x$$

Derivación e integración de funciones hiperbólicas

Puesto que las funciones hiperbólicas se expresan mediante e^x y e^{-x}, es fácil obtener reglas de derivación para ellas. El próximo teorema presenta una lista de esas reglas junto con las correspondientes reglas de integración.



TEOREMA 5.20 DERIVADAS E INTEGRALES DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Si u es una función derivable de x,

$$\frac{d}{dx}[\text{sh}\, u] = (\text{ch}\, u)u' \qquad \int \text{ch}\, u\, du = \text{sh}\, u + C$$
$$\frac{d}{dx}[\text{ch}\, u] = (\text{sh}\, u)u' \qquad \int \text{sh}\, u\, du = \text{ch}\, u + C$$
$$\frac{d}{dx}[\text{th}\, u] = (\text{sech}^2 u)u' \qquad \int \text{sech}^2 u\, du = \text{th}\, u + C$$
$$\frac{d}{dx}[\text{coth}\, u] = (\text{csch}^2 u)u' \qquad \int \text{csch}^2 u\, du = -\text{csch}\, u + C$$
$$\frac{d}{dx}[\text{sech}\, u] = -(\text{sech}\, u\, \text{th}\, u)u' \qquad \int \text{sech}\, u\, \text{th}\, u\, du = -\text{sech}\, u + C$$
$$\frac{d}{dx}[\text{csch}\, u] = -(\text{csch}\, u\, \text{coth}\, u)u' \qquad \int \text{csch}\, u\, \text{coth}\, u\, du = -\text{csch}\, u + C$$

Demostración:

$$\frac{d}{dx}[\text{sh}\, x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}\, x$$
$$\frac{d}{dx}[\text{th}\, x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x}\right] = \frac{\text{ch}\, x(\text{ch}\, x) - \text{sh}\, x(\text{sh}\, x)}{\text{ch}^2 x}$$
$$= \frac{1}{\text{ch}^2 x} = \text{sech}^2 x$$

En los Ejercicios 83 y 87 se pide la demostración de las demás. □

EJEMPLO 1 Derivación de funciones hiperbólicas

a) $\dfrac{d}{dx}[\text{sh}\,(x^2 - 3)] = 2x\,\text{ch}\,(x^2 - 3)$

b) $\dfrac{d}{dx}[\ln\,(\text{ch}\,x)] = \dfrac{\text{sh}\,x}{\text{ch}\,x} = \text{th}\,x$

c) $\dfrac{d}{dx}[x\,\text{sh}\,x - \text{ch}\,x] = x\,\text{ch}\,x + \text{sh}\,x - \text{sh}\,x = x\,\text{ch}\,x$ □

EJEMPLO 2 Localización de extremos relativos

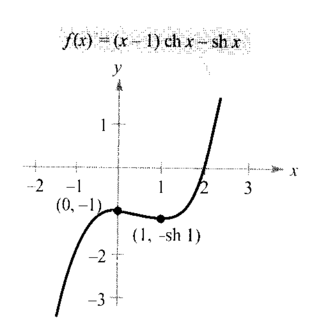


FIGURA 5.47
$f''(0) < 0$, luego $(0, -1)$ es un máximo relativo, $f''(1) > 0$, así que $(1, -\text{sh}\,1)$ es un mínimo relativo.

Localizar los extremos relativos de $f(x) = (x - 1)\,\text{ch}\,x - \text{sh}\,x$.

Solución: Comenzamos igualando a cero la derivada de f.

$$f'(x) = (x - 1)\,\text{sh}\,x + \text{ch}\,x - \text{ch}\,x = 0$$
$$(x - 1)\,\text{sh}\,x = 0$$

Así pues, los números críticos son $x = 1$ y $x = 0$. Con el criterio de la segunda derivada es fácil comprobar que en $(0, -1)$ hay un máximo relativo y en $(1, -\text{sh}\,1)$ un mínimo relativo, como muestra la Figura 5.47. Confirme este resultado con la calculadora. Si no dispone en ella de las funciones hiperbólicas, utilice exponenciales así:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 1)\left(\frac{1}{2}\right)(e^x + e^{-x}) - \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2}(xe^x + xe^{-x} - e^x - e^{-x} - e^x + e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2}(xe^x + xe^{-x} - 2e^x) \end{aligned}$$ □

Cuando un cable flexible uniforme, como un hilo telefónico, está suspendido de dos soportes, adopta la forma de una **catenaria**, que se estudia en el Ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Cables colgantes

Los cables de un tendido eléctrico están suspendidos entre dos torres, formando la catenaria que muestra la Figura 5.48, de ecuación

$$y = a\,\text{ch}\,\frac{x}{a}$$

FIGURA 5.48
Catenaria.

La distancia entre las dos torres es $2b$. Calcular la pendiente de la catenaria en el punto de sujeción del cable en la torre de la derecha.

Solución: Derivando se ve que

$$y' = a\left(\frac{1}{a}\right) \operatorname{sh} \frac{x}{a} = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$$

En el punto $(b, a \operatorname{ch}(b/a))$, la pendiente (por la izquierda) viene dada por

$$m = \operatorname{sh} \frac{b}{a}$$ □

EJEMPLO 4 Integración de una función hiperbólica

$$\int \operatorname{ch} 2x \operatorname{sh}^2 2x \, dx = \frac{1}{2} \int (\operatorname{sh} 2x)^2 (2 \operatorname{ch} 2x) \, dx \qquad u = \operatorname{sh} 2x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(\operatorname{sh} 2x)^3}{3}\right] + C$$

$$= \frac{\operatorname{sh}^3 2x}{6} + C$$ □

Funciones hiperbólicas inversas

A diferencia de las trigonométricas, las funciones hiperbólicas no son periódicas. De hecho, volviendo a la Figura 5.46 se ve que cuatro de las seis son inyectivas (el seno, la tangente, la cosecante y la cotangente hiperbólicas). El Teorema 5.7 afirma que esas cuatro admiten inversas. Las otras dos son inyectivas si se restringe su dominio a los números reales positivos, de modo que en este dominio restringido ya admiten función inversa. Como las funciones hiperbólicas se definen en términos de las exponenciales, no es de extrañar que las funciones hiperbólicas inversas puedan expresarse en términos de funciones logarítmicas, como indica el Teorema 5.21.

TEOREMA 5.21 FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Función	*Dominio*
$\operatorname{sh}^{-1} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$	$(-\infty, \infty)$
$\operatorname{ch}^{-1} x = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1})$	$[1, \infty)$
$\operatorname{th}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$	$(-1, 1)$
$\operatorname{coth}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$	$(0, 1]$
$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{\lvert x \rvert}\right)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Demostración La demostración es una aplicación directa de las propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas. Por ejemplo, si

$$f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

podemos ver que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$, lo cual implica que g es la inversa de f. □

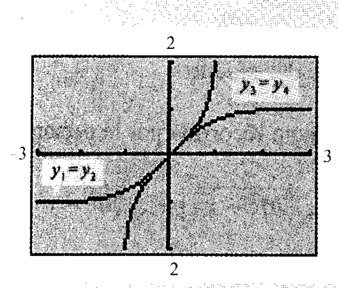


FIGURA 5.49
Gráficas de la función tangente hiperbólica y de su inversa.

Puede utilizar una calculadora para verificar gráficamente los resultados del Teorema 5.21. Por ejemplo, dibujando las gráficas de las funciones

$y_1 = \operatorname{th} x$ — Tangente hiperbólica

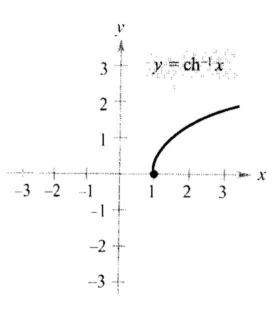
$y_2 = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ — Definición de la tangente hiperbólica

$y_3 = \operatorname{th}^{-1} x$ — Inversa de la tangente hiperbólica

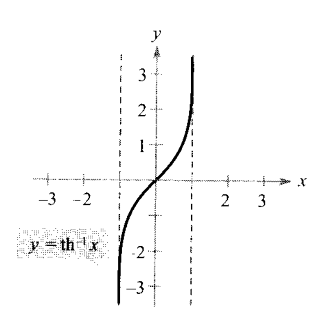
$y_4 = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$ — Definición de la inversa de la tangente hiperbólica

La Figura 5.49 muestra la pantalla obtenida. Como se ve, $y_1 = y_2$ y también $y_3 = y_4$. Nótese, asimismo, que la gráfica de y_1 es la reflexión de la de y_3 en la recta $y = x$.

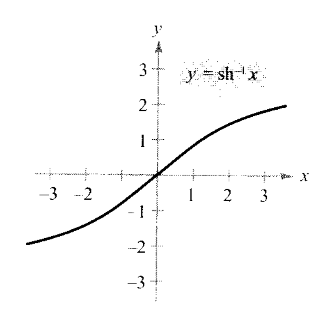
Las gráficas de las funciones hiperbólicas inversas se muestran en la Figura 5.50.



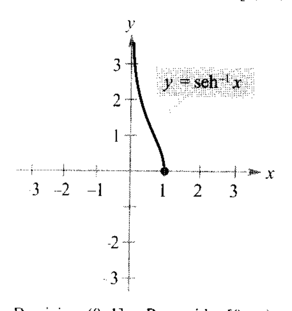
Dominio: $[1, \infty)$ Recorrido: $[0, \infty)$



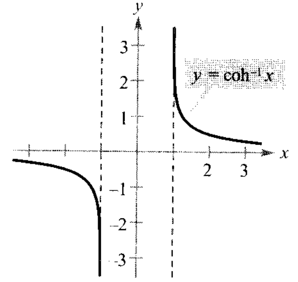
Dominio: $(-1, 1)$ Recorrido: $(-\infty, \infty)$



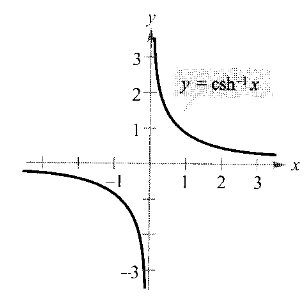
Dominio: $(-\infty, \infty)$ Recorrido: $(-\infty, \infty)$



Dominio: $(0, 1]$ Recorrido: $[0, \infty)$



Dominio: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ Recorrido: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ Recorrido: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

FIGURA 5.50
Gráficas de las seis funciones hiperbólicas inversas.

Con la inversa de la secante hiperbólica se puede definir la curva *tractriz* o *curva de persecución*, que aparece en el próximo ejemplo.

EJEMPLO 5 Una tractriz

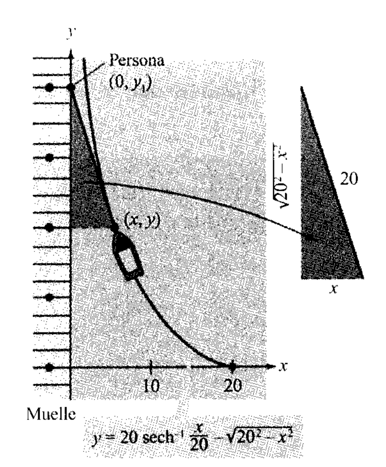


FIGURA 5.51
Una persona debe caminar 41,27 pies para acercar el bote a 5 pies del muelle.

Alguien está arrastrando un bote tirando de él con una cuerda (Figura 5.51). Mientras camina por el muelle, el bote recorre una **tractriz** de ecuación

$$y = a \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

donde a es la longitud de la cuerda. Si $a = 20$, hallar la distancia que debe caminar la persona para llevar el bote a 5 pies del muelle.

Solución: En la Figura 5.51 vemos que la distancia recorrida por la persona es

$$\begin{aligned} y_1 &= y + \sqrt{20^2 - x^2} = \left(20 \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{20} - \sqrt{20^2 - x^2}\right) + \sqrt{20^2 - x^2} \\ &= 20 \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{20} \end{aligned}$$

Cuando $x = 5$, esta distancia es

$$\begin{aligned} y_1 = 20 \operatorname{sech}^{-1} \frac{5}{20} &= 20 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - (1/4)^2}}{1/4} \\ &= 20 \ln (4 + \sqrt{15}) \\ &\approx 41{,}27 \text{ pies} \end{aligned}$$

Derivación e integración de funciones hiperbólicas inversas

Las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas, que recuerdan las de las funciones trigonométricas inversas, se recogen en el Teorema 5.22, junto con las correspondientes fórmulas de integración (en forma logarítmica). Puede comprobarse cada una de ellas aplicando las definiciones logarítmicas de las funciones hiperbólicas inversas. (Véanse Ejercicios 84-86.)

TEOREMA 5.22 DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN RELATIVAS A FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Si u es una función derivable de x,

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sh}^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{ch}^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}} \qquad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln (u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{th}^{-1} u] = \frac{u'}{1 - u^2} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{coth}^{-1} u] = \frac{u'}{1 - u^2} \qquad \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{a + u}{a - u}\right| + C$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sech}^{-1} u] = \frac{-u'}{u\sqrt{1 - u^2}} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{csch}^{-1} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{1 + u^2}} \qquad \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{|u|} + C$$

EJEMPLO 6 Más sobre la tractriz

Para la tractriz del Ejemplo 5, probar que el bote está siempre apuntando hacia la persona que tira de él.

Solución: En un punto (x, y) de la tractriz la pendiente de la gráfica da la dirección del bote, como se ve en la Figura 5.51.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}\left[20 \operatorname{sech}^{-1}\frac{x}{20} - \sqrt{20^2 - x^2}\right] \\ &= -20\left(\frac{1}{20}\right)\left[\frac{1}{(x/20)\sqrt{1-(x/20)^2}}\right] - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-2x}{\sqrt{20^2 - x^2}}\right) \\ &= \frac{-20^2}{x\sqrt{20^2 - x^2}} + \frac{x}{\sqrt{20^2 - x^2}} \\ &= -\frac{\sqrt{20^2 - x^2}}{x} \end{aligned}$$

Y en esa misma figura se constata que la pendiente del segmento que une $(0, y_1)$ con (x, y) es también $m = (-\sqrt{20^2 - x^2})/x$. Así pues, el bote apunta hacia la persona en todo momento. (Por esa razón se llama *curva de persecución* a la tractriz.) □

EJEMPLO 7 Integración usando funciones hiperbólicas inversas

Evaluar $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - 9x^2}}$.

Solución: Sea $a = 2$ y $u = 3x$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{4-9x^2}} &= \int \frac{3\,dx}{(3x)\sqrt{4-9x^2}} & \int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} \\ &= -\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{4-9x^2}}{|3x|} + C & -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{|u|} + C \end{aligned}$$
□

EJEMPLO 8 Integración usando funciones hiperbólicas inversas

Evaluar $\displaystyle\int \frac{dx}{5 - 4x^2}$.

Solución: Sea $a = \sqrt{5}$ y $u = 2x$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5-4x^2} &= \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{(\sqrt{5})^2 - (2x)^2} & \int \frac{du}{a^2-u^2} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+2x}{\sqrt{5}-2x}\right| + C & \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C \\ &= \frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+2x}{\sqrt{5}-2x}\right| + C \end{aligned}$$
□

Ejercicios de la Sección 5.10

En los Ejercicios 1-6, calcular el valor indicado. Si el valor no es un número racional, dar la respuesta con tres decimales correctos.

1. *a*) sh 3
b) th (–2)

2. *a*) ch 0
b) sech 1

3. *a*) csch (ln 2)
b) coh (ln 5)

4. *a*) $\text{sh}^{-1}\,0$
b) $\text{th}^{-1}\,0$

5. *a*) $\text{ch}^{-1}\,2$
b) $\text{sech}^{-1}\,\frac{2}{3}$

6. *a*) $\text{csch}^{-1}\,2$
b) $\text{coth}^{-1}\,3$

En los Ejercicios 7-12, verificar la identidad.

7. $\text{th}^2\,x + \text{sech}^2\,x = 1$

8. $\text{ch}^2\,x = \dfrac{1 + \text{ch}\,2x}{2}$

9. $\text{sh}\,(x + y) = \text{sh}\,x\,\text{ch}\,y + \text{ch}\,x\,\text{sh}\,y$

10. $\text{sh}\,2x = 2\,\text{sh}\,x\,\text{ch}\,x$

11. $\text{sh}\,3x = 3\,\text{sh}\,x + 4\,\text{sh}^3\,x$

12. $\text{ch}\,x + \text{ch}\,y = 2\,\text{ch}\,\dfrac{x+y}{2}\,\text{ch}\,\dfrac{x-y}{2}$

En los Ejercicios 13 y 14, usar el valor de la función hiperbólica dada para hallar el de las demás.

13. $\text{sh}\,x = \frac{3}{2}$, ch $x =$ ____, th $x =$ ____, csch $x =$ ____, sech $x =$ ____, coth $x =$ ____

14. sh $x =$ ____, ch $x =$ ____, $\text{th}\,x = \frac{1}{2}$, csch $x =$ ____, sech $x =$ ____, coth $x =$ ____

En los Ejercicios 15-28, calcular la derivada de la función.

15. $y = \text{sh}\,(1 - x^2)$

16. $y = \text{coth}\,3x$

17. $f(x) = \ln\,(\text{sh}\,x)$

18. $g(x) = \ln\,(\text{ch}\,x)$

19. $y = \ln\left(\text{th}\,\dfrac{x}{2}\right)$

20. $y = x\,\text{sh}\,x - \text{ch}\,x$

21. $h(x) = \dfrac{1}{4}\,\text{sh}\,2x - \dfrac{x}{2}$

22. $h(t) = t - \text{coth}\,t$

23. $f(t) = \text{arctg}\,(\text{sh}\,t)$

24. $f(x) = e^{\text{sh}\,x}$

25. $g(x) = x^{\text{ch}\,x}$

26. $g(x) = \text{sech}^2\,3x$

27. $y = (\text{ch}\,x - \text{sh}\,x)^2$

28. $y = \text{sech}\,(x + 1)$

En los Ejercicios 29 y 30, hallar los extremos relativos de la función y confirmar los resultados en la calculadora mediante una gráfica.

29. $f(x) = \text{sen}\,x\,\text{sh}\,x - \cos x\,\text{ch}\,x, \quad -4 \leqslant x \leqslant 4$

30. $f(x) = x\,\text{ch}\,(x - 1) - \text{sh}\,(x - 1)$

En los Ejercicios 31 y 32, representar la función en la calculadora y aproximar sus extremos relativos.

31. $g(x) = x\,\text{sech}\,x$

32. $h(x) = 2\,\text{th}\,x - x$

En los Ejercicios 33 y 34, probar que la función satisface la ecuación diferencial.

	Función	*Ecuación diferencial*
33.	$y = a\,\text{sh}\,x$	$y''' - y' = 0$
34.	$y = a\,\text{ch}\,x$	$y'' - y = 0$

Aproximación lineal y cuadrática En los Ejercicios 35 y 36, usar derivación simbólica para hallar la aproximación lineal

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

y la aproximación cuadrática

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

a la función en $x = a$. Representar en la calculadora la función y las dos aproximaciones.

35. $f(x) = \text{th}\,x$
$a = 1$

36. $f(x) = \text{ch}\,x$
$a = 0$

En los Ejercicios 37-52, hallar la integral.

37. $\displaystyle\int \text{sh}\,(1 - 2x)\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{\text{ch}\,\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

39. $\displaystyle\int \text{ch}^2\,(x-1)\,\text{sh}\,(x-1)\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{\text{sh}\,x}{1 + \text{sh}^2\,x}\,dx$

41. $\displaystyle\int \frac{\text{ch}\,x}{\text{sh}\,x}\,dx$

42. $\displaystyle\int \text{sech}^2\,(2x - 1)\,dx$

43. $\displaystyle\int x\,\text{sech}^2\,\frac{x^2}{2}\,dx$

44. $\displaystyle\int \text{sech}^3\,x\,\text{th}\,x\,dx$

45. $\int \frac{\operatorname{csch}(1/x)\coth(1/x)}{x^2}\,dx$

46. $\int \operatorname{sh}^2 x\,dx$

47. $\int_0^4 \frac{1}{25 - x^2}\,dx$

48. $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}}\,dx$

49. $\int_0^{\sqrt{2}/4} \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}\,dx$

50. $\int \frac{2}{x\sqrt{1 + 4x^2}}\,dx$

51. $\int \frac{x}{x^4 + 1}\,dx$

52. $\int \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{9 - \operatorname{sh}^2 x}}\,dx$

En los Ejercicios 53-60, hallar la derivada de la función.

53. $y = \operatorname{ch}^{-1}(3x)$

54. $y = \operatorname{th}^{-1}\frac{x}{2}$

55. $y = \operatorname{sh}^{-1}(\operatorname{tg} x)$

56. $y = \operatorname{sech}^{-1}(\cos 2x), \quad 0 < x < \pi/4$

57. $y = \coth^{-1}(\operatorname{sen} 2x)$

58. $y = (\operatorname{csch}^{-1} x)^2$

59. $y = 2x\operatorname{sh}^{-1}(2x) - \sqrt{1 + 4x^2}$

60. $y = x\operatorname{th}^{-1} x + \ln\sqrt{1 - x^2}$

Tractriz En los Ejercicios 61 y 62, usar la ecuación de la tractriz $y = a\operatorname{sech}^{-1}\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$.

61. Hallar dy/dx.

62. Sea L la recta tangente a la tractriz en el punto P. Si L corta al eje y en el punto Q, probar que la distancia entre P y Q es a.

En los Ejercicios 63-70, hallar la integral indefinida usando las fórmulas del Teorema 5.22.

63. $\int \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}}\,dx$

64. $\int \frac{e^x}{1 - e^{2x}}\,dx$

65. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1 + x}}\,dx$

66. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + x^3}}\,dx$

67. $\int \frac{-1}{4x - x^2}\,dx$

68. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$

69. $\int \frac{1}{1 - 4x - 2x^2}\,dx$

70. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2x^2 + 4x + 8}}$

En los Ejercicios 71-74, resolver la ecuación diferencial.

71. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{80 + 8x - 16x^2}}$

72. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x - 1)\sqrt{-4x^2 + 8x - 1}}$

73. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 21x}{5 + 4x - x^2}$

74. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x}{4x - x^2}$

En los Ejercicios 75-78, calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

75. $y = \operatorname{sech}\frac{x}{2}, \quad y = 0, x = -4, x = 4$

76. $y = \operatorname{th} 2x, \quad y = 0, x = 2$

77. $y = \frac{5x}{\sqrt{x^4 + 1}}, \quad y = 0, x = 2$

78. $y = \frac{6}{\sqrt{x^2 - 4}}, \quad y = 0, x = 3, x = 5$

79. ***Reacciones químicas*** Los productos A y B se combinan en razón 3 a 1 para formar un compuesto. La cantidad x de compuesto producida en el instante t es proporcional a las cantidades que quedan sin transformar de A y B en la solución. Así pues, si se mezclan 3 kg de A con 2 kg de B, se tiene

$$\frac{dx}{dt} = k\left(3 - \frac{3x}{4}\right)\left(2 - \frac{x}{4}\right) = \frac{3k}{16}(x^2 - 12x + 32)$$

Si en 10 minutos se ha formado 1 kg del compuesto, calcular la cantidad formada en 20 minutos, resolviendo la integral

$$\int \frac{3k}{16}\,dt = \int \frac{dx}{x^2 - 12x + 32}$$

80. ***Movimiento vertical*** Un objeto se deja caer desde una altura de 400 pies.
   a) Expresar su velocidad en función del tiempo (despreciando la resistencia del aire).
   b) Hallar la función posición, utilizando el resultado de *a*).

c) Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, entonces

$$\frac{dv}{dt} = -32 + kv^2$$

donde -32 pies/s^2 es la aceleración de la gravedad y k una constante. Probar que la velocidad v es, como función del tiempo,

$$v(t) = -\sqrt{\frac{32}{k}}\ \text{th}\ (\sqrt{32k}t)$$

afectuando la siguiente integración y simplificando el resultado:

$$\int \frac{dv}{32 - kv^2} = -\int dt$$

d) Usando el resultado de *c*), calcular $\lim_{t\to\infty} v(t)$ e interpretarlo.

e) Integrar la función velocidad del apartado *c*) y hallar la posición s de un objeto en función de t. Representar en la calculadora la función posición para $k = 0{,}01$ y la función posición del punto *b*) en la misma pantalla. Estimar el tiempo adicional requerido para que el objeto alcance el suelo, cuando se tiene en cuenta la resistencia del aire.

81. ***Redacción*** Describa qué cree que sucedería si se aumentara el valor de k en el ejercicio anterior. A continuación, compruebe su opinión con un valor concreto de k.

82. Demostrar que arctg (sh x) = arcsen (th x).

En los Ejercicios 83-87, verificar la fórmula de derivación.

83. $\frac{d}{dx}[\text{ch}\ x] = \text{sh}\ x$

84. $\frac{d}{dx}[\text{sech}^{-1}\ x] = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

85. $\frac{d}{dx}[\text{ch}^{-1}\ x] = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

86. $\frac{d}{dx}[\text{sh}^{-1}\ x] = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

87. $\frac{d}{dx}[\text{sech}\ x] = -\text{sech}\ x\ \text{th}\ x$

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

Arco de St Louis El arco Gateway de St Louis, Missouri, fue diseñado utilizando la función coseno hiperbólico. La ecuación del arco es

$$y = 693{,}8597 - 68{,}7672\ \text{ch}\ 0{,}0100333x,$$
$$-299{,}2239 \leqslant x \leqslant 299{,}2239$$

donde x e y se miden en pies. Las secciones del arco son triángulos equiláteros y (x, y) describe la curva que forman los centros de masas de esos triángulos. Para cada valor de x, el área de la sección triangular es

$$A = 125{,}1406\ \text{ch}\ 0{,}0100333x$$

(Fuente: Owner's Manual for the Gateway Arch, Saint Louis, MO, de William Thayer.)

a) ¿A qué altura sobre el suelo está el centro del triángulo más alto? (El nivel del suelo es $y = 0$.)

b) ¿Cuál es la altura del arco? (*Ayuda:* Para un triángulo equilátero, $A = \sqrt{3}c^2$, donde c es la mitad de la base del triángulo y su centro de masa está situado a dos tercios de la altura del triángulo.)

c) ¿Qué anchura tiene el arco en su base?

Ejercicios de repaso del Capítulo 5

En los Ejercicios 1 y 2, esbozar la gráfica de f a mano e identificar sus asíntotas.

1. $f(x) = \ln x + 3$

2. $f(x) = \ln (x - 3)$

En los Ejercicios 3 y 4, usar las propiedades de los, logaritmos para escribir la expresión como una suma, diferencia y/o múltiplo de logaritmos.

3. $\ln \sqrt[5]{\frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1}}$

4. $\ln [(x^2 + 1)(x - 1)]$

En los Ejercicios 5 y 6, escribir la expresión como el logaritmo de una única cantidad.

5. $\ln 3 + \frac{1}{3} \ln (4 - x^2) - \ln x$

6. $3[\ln x - 2 \ln (x^2 + 1)] + 2 \ln 5$

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 7 y 8, discutir si el enunciado es correcto o no.

7. El dominio de $f(x) = \ln x$ es toda la recta real.

8. $\ln (x + y) = \ln x + \ln y$

En los Ejercicios 9 y 10, despejar x.

9. $\ln\sqrt{x+1} = 2$ **10.** $\ln x + \ln(x-3) = 0$

En los Ejercicios 11-18, hallar la derivada de la función.

11. $g(x) = \ln\sqrt{x}$ **12.** $h(x) = \ln\dfrac{x(x-1)}{x-2}$

13. $f(x) = x\sqrt{\ln x}$ **14.** $f(x) = \ln[x(x^2-2)^{2/3}]$

15. $y = \dfrac{1}{b^2}\left[\ln(a+bx) + \dfrac{a}{a+bx}\right]$

16. $y = \dfrac{1}{b^2}[a + bx - a\ln(a+bx)]$

17. $y = -\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{a+bx}{x}$ **18.** $y = -\dfrac{1}{ax} + \dfrac{b}{a^2}\ln\dfrac{a+bx}{x}$

En los Ejercicios 19-26, hallar la integral.

19. $\displaystyle\int \frac{1}{7x-2}\,dx$ **20.** $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\,dx$ **22.** $\displaystyle\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx$

23. $\displaystyle\int_1^4 \frac{x+1}{x}\,dx$ **24.** $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sec\theta\,d\theta$ **26.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx$

En los Ejercicios 27-34, *a*) hallar la inversa de f, *b*) representar en la calculadora f y f^{-1} en una misma pantalla, y *c*) comprobar que $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$.

27. $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ **28.** $f(x) = 5x - 7$

29. $f(x) = \sqrt{x+1}$ **30.** $f(x) = x^3 + 2$

31. $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ **32.** $f(x) = x^2 - 5,\ x \geqslant 0$

33. $f(x) = \ln\sqrt{x}$ **34.** $f(x) = e^{1-x}$

En los Ejercicios 35-38, dibujar a mano la gráfica de la función.

35. $y = e^{-x/2}$ **36.** $g(x) = 6(2^{-x^2})$

37. $h(x) = -3\operatorname{arcsen} 2x$ **38.** $f(x) = 2\operatorname{arctg}(x+3)$

En los Ejercicios 39 y 40, evaluar la expresión sin usar la calculadora. (*Ayuda:* Dibujar un triángulo rectángulo.)

39. *a*) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2})$
b) $\cos(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2})$

40. *a*) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 2)$
b) $\cos(\operatorname{arcsec}\sqrt{5})$

En los Ejercicios 41-58, hallar la derivada de la función.

41. $f(x) = \ln(e^{-x^2})$ **42.** $g(x) = \ln\dfrac{e^x}{1+e^x}$

43. $g(t) = t^2e^t$ **44.** $h(z) = e^{-z^2/2}$

45. $y = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}$ **46.** $y = x^{2x+1}$

47. $f(x) = 3^{x-1}$ **48.** $f(x) = (4e)^x$

49. $g(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$ **50.** $f(\theta) = \dfrac{1}{2}e^{\operatorname{sen} 2\theta}$

51. $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x)$ **52.** $y = \operatorname{arctg}(x^2 - 1)$

53. $y = x\operatorname{arcsec} x$ **54.** $y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} e^{2x}$

55. $y = x(\operatorname{arcsen} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x$

56. $y = \sqrt{x^2-4} - 2\operatorname{arcsec}(x/2),\quad 2 < x < 4$

57. $y = 2x - \operatorname{ch}\sqrt{x}$ **58.** $y = x\operatorname{th}^{-1} 2x$

En los Ejercicios 59 y 60, hallar dy/dx por derivación implícita.

59. $y\ln x + y^2 = 0$ **60.** $\cos x^2 = xe^y$

61. ***Para pensar*** Supuesta a constante, hallar la derivada de cada función.

a) $y = x^a$, *b*) $y = a^x$, *c*) $y = x^x$, *d*) $y = a^a$

62. ***Interés compuesto*** ¿Qué capital hay que invertir al 7 por 100 de interés compuesto continuamente para que al cabo de 15 años el balance final sea $10.000?

63. ***Interés compuesto*** Un depósito a una tasa del r por 100 de interés compuesto continuamente dobla su valor en 10 años. Calcular r.

64. ***Ritmo de ascensión*** El tiempo t, en minutos, que tarda un pequeño avión en subir hasta una altura de h pies es

$$t = 50\log_{10}\frac{18.000}{18.000 - h}$$

donde 18.000 es el tope de altitud del aparato.

a) Determinar el dominio de la función apropiado al contexto del problema.

b) Representar en la calculadora la función e identificar sus asíntotas.

c) Cuando el avión se acerca a su techo tope, ¿qué puede decirse del tiempo que necesita para ascender?

d) ¿En qué instante está creciendo la altitud a ritmo máximo?

En los Ejercicios 65-80, hallar la integral.

65. $\int xe^{-3x^2}\,dx$

66. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

67. $\int \frac{e^{4x} - e^{2x} + 1}{e^x}\,dx$

68. $\int \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}\,dx$

69. $\int \frac{e^x}{e^x - 1}\,dx$

70. $\int x^2 e^{x^3+1}\,dx$

71. $\int \frac{1}{e^{2x} + e^{-2x}}\,dx$

72. $\int \frac{1}{3 + 25x^2}\,dx$

73. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx$

74. $\int \frac{1}{16 + x^2}\,dx$

75. $\int \frac{x}{16 + x^2}\,dx$

76. $\int \frac{4 - x}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx$

77. $\int \frac{\text{arctg}\,(x/2)}{4 + x^2}\,dx$

78. $\int \frac{\text{arcsen}\,x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

79. $\int \frac{x}{\sqrt{x^4 - 1}}\,dx$

80. $\int x^2 \,\text{sech}^2\, x^3\,dx$

En los Ejercicios 81 y 82, calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

81. $y = xe^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$

82. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

En los Ejercicios 83-88, resolver la ecuación diferencial.

83. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3}{x}$

84. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

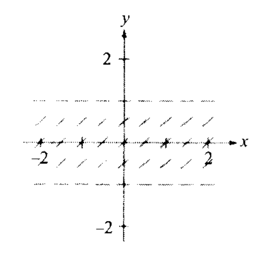
85. $y' - 2xy = 0$

86. $y' - e^y \,\text{sen}\, x = 0$

87. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$

88. $\frac{dy}{dx} = \frac{3(x + y)}{x}$

89. Usar la ecuación diferencial $y' = \sqrt{1 - y^2}$ y el campo de direcciones de la figura para responder las cuestiones.



a) Dibujar varias curvas solución sobre el campo de direcciones.

b) ¿Cuándo es máximo el ritmo de cambio de la solución? ¿Cuándo es mínimo?

c) Hallar la solución general de la ecuación diferencial. Comparar el resultado con las curvas trazadas en el apartado *a*).

90. Demostrar que $y = e^x(a \cos 3x + b \,\text{sen}\, 3x)$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 2y' + 10y = 0$.

91. Hallar las trayectorias ortogonales a la familia $(x - C)^2 + y^2 = C^2$ y representar varios miembros de cada familia en la calculadora.

92. ***Presión atmosférica*** Bajo condiciones ideales, la presión del aire decrece continuamente con la altura sobre el nivel del mar a un ritmo proporcional a la presión en esa altura. Si el barómetro mide 30 pulgadas al nivel del mar y 15 pulgadas a 18.000 pies, ¿cuál es la presión a 35.000 pies?

93. ***Probabilidad*** Se toman al azar dos números entre 0 y 10. La probabilidad de que su producto sea menor que $n (0 < n < 100)$ es

$$P = \frac{1}{100}\left(n + \int_{n/10}^{10} \frac{n}{x}\,dx\right)$$

a) ¿Qué probabilidad tiene el producto de ser menor que 25?

b) ¿Y menor que 50?

94. ***Movimiento vertical*** Supongamos que un objeto encuentra al caer una resistencia del aire proporcional a su velocidad. Si la aceleración de la gravedad es –9,8 m/s^2, el cambio neto de la velocidad es

$$\frac{dv}{dt} = kv - 9{,}8$$

a) Expresar la velocidad como función del tiempo si la velocidad inicial es v_0.

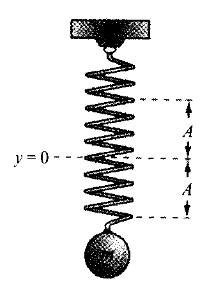
b) Usando el resultado de *a*), hallar el límite de la velocidad cuando t tiende a infinito.

c) Integrar la función velocidad encontrada en *a*) para hallar la función posición s.

95. ***Movimiento armónico*** Un peso de masa m está sujeto al extremo de un muelle que oscila con movimiento armónico simple (véase figura en la página siguiente). Según la ley de Hooke,

$$\int \frac{dy}{\sqrt{A^2 - y^2}} = \int \sqrt{\frac{k}{m}}\,dt$$

donde A es el desplazamiento máximo, t el tiempo y k una constante. Expresar y en función de t, supuesto $y = 0$ en $t = 0$.



96. ***Un modelo matemático*** Los pares ordenados (t, P) dan la población P (en millones) de EE.UU. entre los años 1850 y 1990, donde t es el tiempo en años, con $t = 0$ correspondiendo a 1900. *(Fuente: U.S. Bureau of Census.)*

$$(-50, 23{,}2), (-40, 31{,}4), (-30, 39{,}8), (-20, 50{,}2), (-10, 62{,}9), (0, 76{,}0), (10, 92{,}0), (20, 105{,}7), (30, 122{,}8), (40, 131{,}7), (50, 150{,}7), (60, 178{,}5), (70, 203{,}3), (80, 226{,}5), (90, 248{,}7)$$

a) Usar regresión en la calculadora para ajustar los siguientes modelos a esos datos:

Lineal: $y = at + b$
Cuadrático: $y = at^2 + bt + c$
Exponencial: $y = ab^t$

b) Representar en la calculadora los datos y los modelos.

c) Evaluar cada modelo y su ritmos de crecimiento para el año 1998. ¿Qué modelo parece más razonable?

97. ***Ahorro de combustible*** Un cierto automóvil hace 28 millas por galón de gasolina cuando viaja a velocidades inferiores a 50 millas/h. Por encima de esa velocidad, el número de millas por galón desciende un 12 por 100 por cada 10 millas/h.

a) Si s es la velocidad e y el número de millas por galón, expresar y como función de s resolviendo la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{ds} = -0{,}012y, \quad s > 50$$

b) Usar la función del apartado *a)* para completar la tabla.

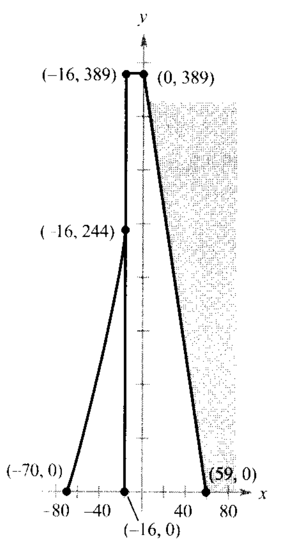
Velocidad	50	55	60	65	70
Millas por galón					

Capítulo 6

MOTIVACIÓN DEL CAPÍTULO

HOOVER DAM

La presa Hoover, una de las presas de hormigón más grandes del mundo, se apoya en las paredes del Black Canyon y en su propia estructura para regular las aguas del río Colorado.



Sección de la presa

Construcción de una presa

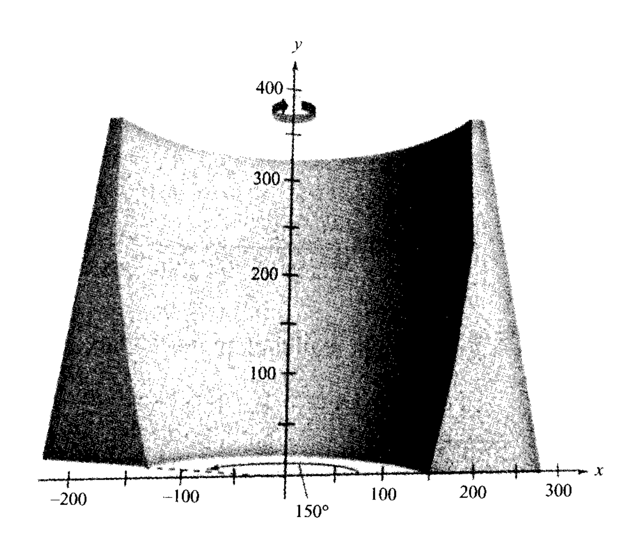
Las presas se proyectaron al principio para asegurar reservas de agua en las épocas de sequía. Conforme los conocimientos técnicos han progresado, han sido dedicadas a otros menesteres, tales como formación de lagos de recreo, saltos generadores de energía o previsión de riadas. Junto con esos beneficios, una presa puede implicar daños ecológicos y obliga a recolocar a las personas e incluso la fauna de la zona. Asimismo, una presa de construcción deficiente supone un riesgo de catástrofe para la región de su entorno.

Uno de los diseños empleados en la construcción de presas es la presa de arco. Suele utilizarse en cañones estrechos y se curva hacia el agua que contiene. La fuerza del agua presiona las paredes de la presa contra el cañón, de manera que la roca hace de soporte adicional para la estructura. Eso permite ahorrar materiales en la construcción de la presa, por comparación con las de soporte vertical.

Una sección de una presa de arco típica sigue el modelo del esquema (a la izquierda) y responde a la función

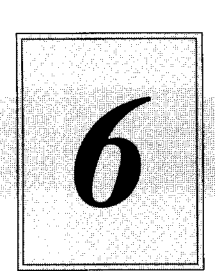
$$f(x) = \begin{cases} 0{,}03x^2 + 7{,}1x + 350, & -70 \leqslant x \leqslant -16 \\ 389, & -16 < x < 0 \\ -6{,}593x + 389, & 0 \leqslant x \leqslant 59 \end{cases}$$

Al girar esa sección en torno al eje y se forma la presa de arco. El número de grados que se gira y la anchura de la base varían de una a otra, dependiendo sobre todo de las variaciones que pueda sufrir el nivel del agua. Una posible configuración, con giro de 150° y base de 150 pies, se muestra en el esquema de la página siguiente.



CUESTIONES

1. Calcular el área de una sección de la presa.
2. Planificar una estrategia para estimar el volumen de hormigón necesario para construir la presa.
3. Estimar, con esa estrategia, el volumen de hormigón necesario en la construcción de la presa del esquema anterior.



Aplicaciones de la integral

CONTENIDO ▪
Áre de una región entre dos curvas ▪
Área de una región entre dos curvas que se cortan ▪



6.1 Área de una región entre dos curvas

Área de una región entre dos curvas

El cálculo del área de una región *bajo* una curva mediante integrales definidas se extiende sin esfuerzo a regiones comprendidas *entre* dos curvas. Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Si, como sucede en la Figura 6.1, las dos gráficas están por encima del eje x y la de f por encima de la de g, podemos interpretar el área de la región entre ellas como el área bajo f menos el área bajo g, como sugiere la Figura 6.2.

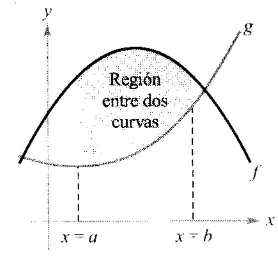


FIGURA 6.1

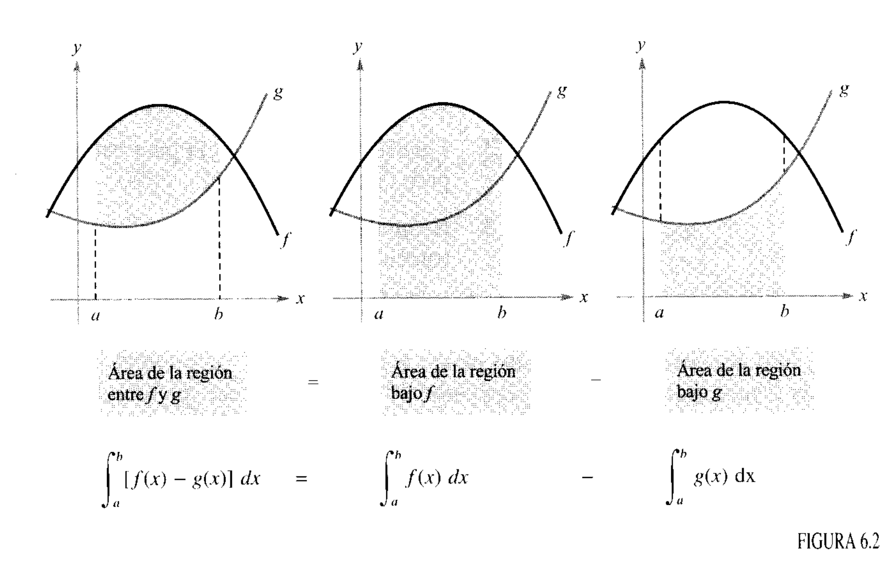


FIGURA 6.2

Rectángulo representativo
Altura: $f(x_i) - g(x_i)$
Anchura: Δx

FIGURA 6.3

Con el fin de verificar que el resultado de la Figura 6.2 es razonable, partimos $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de ellos de anchura Δx. Entonces, como ilustra la Figura 6.3, formamos un **rectángulo representativo** de anchura Δx y

altura $f(x_i) - g(x_i)$, donde x_i está en el i-ésimo subintervalo. El área de ese rectángulo representativo es

$$\Delta A_i = \text{(altura)(anchura)} = [f(x_i) - g(x_i)]\Delta x$$

Sumando las áreas de los n rectángulos y tomando el límite para $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$, obtenemos

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]\Delta x$$

Como f y g son continuas en $[a, b]$, $f - g$ es continua también, luego el límite existe. Por tanto, el área de la región dada es

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]\Delta x \\ &= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \end{aligned}$$

ÁREA DE UNA REGIÓN ENTRE DOS CURVAS

Si f y g son continuas en $[a, b]$ y $g(x) \leqslant f(x)$ para todo x en $[a, b]$, el área de la región acotada por las gráficas de f y g entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

En la Figura 6.1 las gráficas de f y g estaban por encima del eje x. Pero esa circunstancia no es necesaria. El mismo integrando $[f(x) - g(x)]$ sirve cuando f y g son continuas y $g(x) \leqslant f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Este resultado se ilustra en la Figura 6.4.

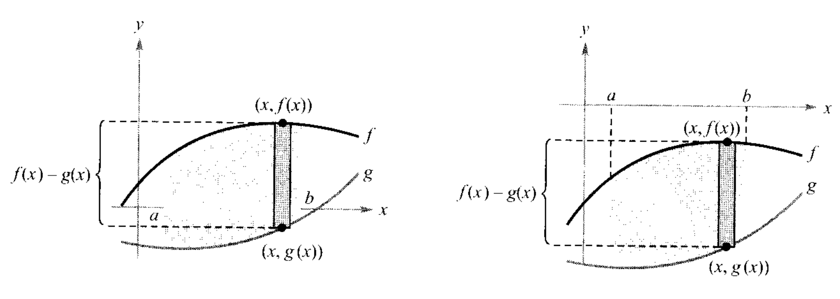


FIGURA 6.4

Nota. La altura de un rectángulo representativo es $f(x) - g(x)$, sea cual sea la posición relativa del eje x, como muestra la Figura 6.4.

Los rectángulos representativos se utilizan en varias aplicaciones a lo largo de este capítulo. Un rectángulo vertical (de anchura Δx) implica integración con respecto a x, mientras un rectángulo horizontal (de anchura Δy) implica integración con respecto a y.

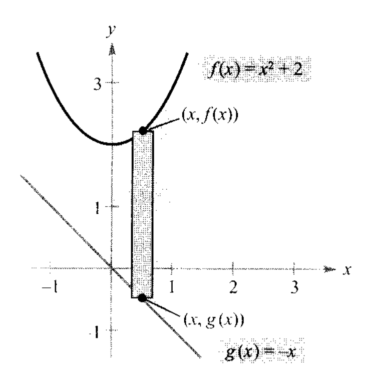


FIGURA 6.5
Región acotada por la gráfica de f, la gráfica de g, $x = 0$, y $x = 1$.

EJEMPLO 1 Cálculo del área de una región entre dos curvas

Calcular el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 2$, $y = -x$, $x = 0$, y $x = 1$.

Solución: Sean $g(x) = -x$ y $f(x) = x^2 + 2$. Entonces $g(x) \leqslant f(x)$ para todo x en $[0, 1]$ (véase Figura 6.5). Así pues, el área del rectángulo representativo es

$$\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x = [(x^2 + 2) - (-x)]\Delta x$$

y el área de la región

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 [(x^2 + 2) - (-x)]dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2$$
$$= \frac{17}{6}$$

□

Área de una región entre dos curvas que se cortan

Las gráficas de $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = -x$ en el Ejemplo 1 no se cortan y los valores a y b se han dado explícitamente. Un problema más común consiste en hallar el área de una región comprendida entre dos gráficas que *se cortan*, de manera que los valores de a y b han de ser calculados previamente.

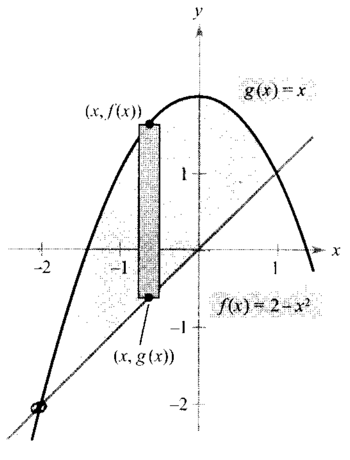


FIGURA 6.6
Región acotada por las gráficas de f y g.

EJEMPLO 2 Una región determinada por dos gráficas que se cortan

Calcular el área de la región comprendida entre las gráficas de $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = x$.

Solución: En la Figura 6.6 observamos que las gráficas de f y g tienen dos puntos de intersección. Para determinar estos puntos, hacemos $f(x) = g(x)$ y despejamos x.

$2 - x^2 = x$	Igualar $f(x)$ con $g(x)$
$-x^2 - x + 2 = 0$	Expresar en forma canónica
$-(x + 2)(x - 1) = 0$	Factorizar
$x = -2$ o 1	Despejar x

Así pues, $a = -2$ y $b = 1$. Como $g(x) \leqslant f(x)$ para todo x del intervalo $[-2, 1]$, el rectángulo representativo tiene área

$$\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x = [(2 - x^2) - x]\Delta x$$

y el área de la región resulta ser

$$A = \int_{-2}^{1} [(2 - x^2) - x]dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{1}$$

$$= \frac{9}{2}$$

□

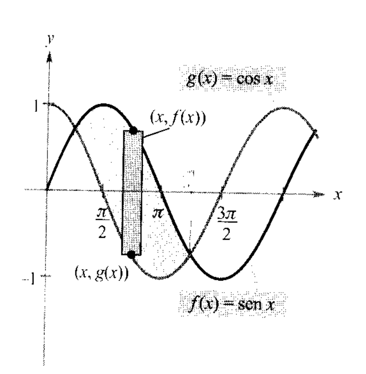
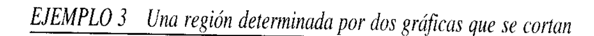


FIGURA 6.7
Una de las regiones acotadas por las gráficas de las funciones seno y coseno.



EJEMPLO 3 Una región determinada por dos gráficas que se cortan

Las gráficas del seno y del coseno se cortan infinitas veces, encerrando regiones de áreas iguales (véase Figura 6.7). Calcular el área de una de esas regiones.

Solución:

$\text{sen } x = \cos x$	Igualar $f(x)$ a $g(x)$
$\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = 1$	Dividir por $\cos x$
$\text{tg } x = 1$	Identidad trigonométrica
$x = \dfrac{\pi}{4}$ o $\dfrac{5\pi}{4}$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$	Despejar x

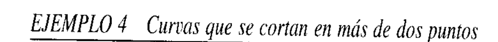
Por tanto, $a = \pi/4$ y $b = 5\pi/4$. Puesto que $\text{sen } x \geqslant \cos x$ en el intervalo $[\pi/4, 5\pi/4]$, el área de la región es

$$A = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} [\text{sen } x - \cos x]dx = \left[-\cos x - \text{sen } x \right]_{\pi/4}^{5\pi/4}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

□

Si dos curvas se cortan en más de dos puntos, hay que localizar los puntos de intersección y averiguar, en cada uno de los intervalos delimitados por esos puntos, cuál de las gráficas está por encima de la otra.



EJEMPLO 4 Curvas que se cortan en más de dos puntos

Calcular el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$.

Solución: Para empezar, igualamos $f(x)$ a $g(x)$ con el fin de obtener, al despejar x, las coordenadas x de los puntos de intersección.

$3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x$	Igualar $f(x)$ con $g(x)$
$3x^3 - 12x = 0$	Expresar en forma canónica
$3x(x^2 - 4) = 0$	Factorizar
$x = -2, 0, 2$	Despejar x

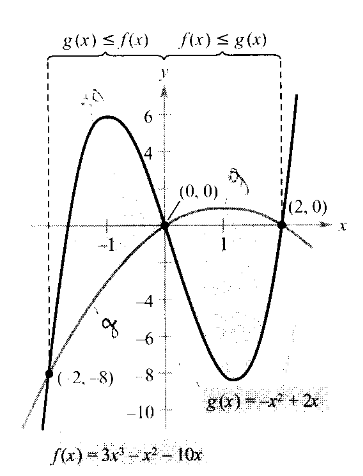


FIGURA 6.8
En $[-2, 0]$, $g(x) \leqslant f(x)$, y en $[0, 2]$, $f(x) \leqslant g(x)$

Así pues, las dos gráficas se cortan en $x = -2$, 0 y 2. En la Figura 6.8 vemos que $g(x) \leqslant f(x)$ en $[-2, 0]$, mientras que $f(x) \leqslant g(x)$ en $[0, 2]$. Por consiguiente, necesitamos dos integrales, una en $[-2, 0]$ y otra en $[0, 2]$.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]dx \\
&= \int_{-2}^{0} (3x^3 - 12x)dx + \int_{0}^{2} (-3x^3 + 12x)dx \\
&= \left[\frac{3x^4}{4} - 6x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{-3x^4}{4} + 6x^2\right]_{0}^{2} \\
&= -(12 - 24) + (-12 + 24) \\
&= 24
\end{aligned}
$$

□

Nota. En el Ejemplo 4 se obtendría una respuesta incorrecta si se integrase entre −2 y 2, ya que tal integración daría

$$\int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)]dx = \int_{-2}^{2} (3x^3 - 12x)dx = 0$$

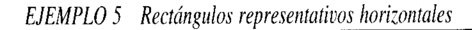
Si una frontera de la región es una función de y, suele ser conveniente usar rectángulos representativos *horizontales* y hallar el área integrando en la variable y. En general, para determinar el área entre dos curvas, se pueden usar

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{[(\text{curva de arriba}) - (\text{curva de abajo})]dx}_{\text{en la variable } x} \qquad \text{Rectángulos verticales}$$

$$A = \int_{y_1}^{y_2} \underbrace{[(\text{curva derecha}) - (\text{curva izquierda})]dy}_{\text{en la variable } y} \qquad \text{Rectángulos horizontales}$$

donde (x_1, y_1) y (x_1, y_2) son puntos adyacentes de intersección de las dos curvas o puntos de las líneas frontera especificadas.

EJEMPLO 5 Rectángulos representativos horizontales



Calcular el área de la región acotada por las gráficas de $x = 3 - y^2$ y $x = y + 1$.

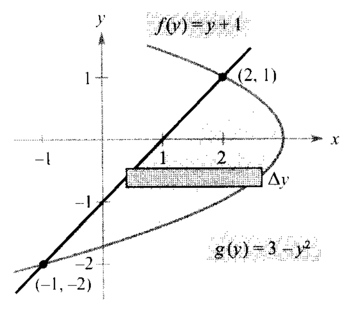
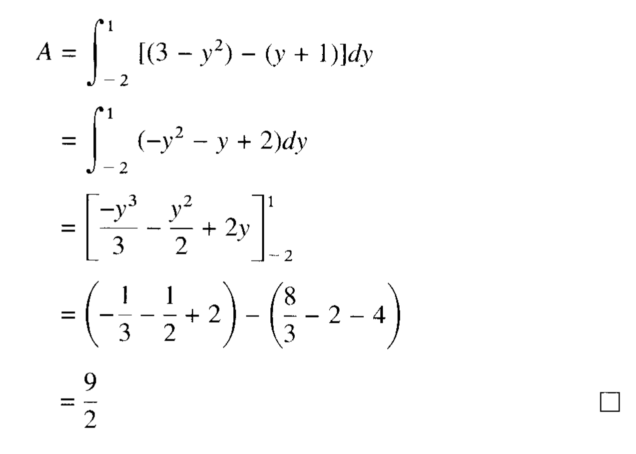


FIGURA 6.9
Rectángulos horizontales (integración con respecto a y).

Solución: Consideremos $g(y) = 3 - y^2$ y $f(y) = y + 1$. Estas dos curvas se cortan cuando $y = -2$ y cuando $y = 1$ (véase Figura 6.9). Como $f(y) \leqslant g(y)$ en ese intervalo, se tiene

$$\Delta A = [g(y) - f(y)]\Delta y = [(3 - y^2) - (y + 1)]\Delta y$$

Por tanto, el área es



$$A = \int_{-2}^{1} [(3 - y^2) - (y + 1)]dy$$
$$= \int_{-2}^{1} (-y^2 - y + 2)dy$$
$$= \left[\frac{-y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y\right]_{-2}^{1}$$
$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right)$$
$$= \frac{9}{2}$$

□

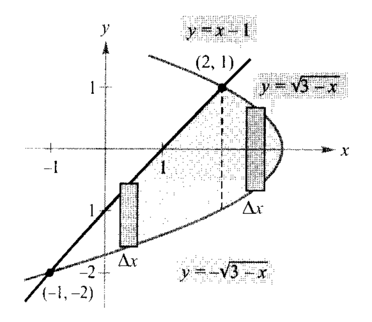


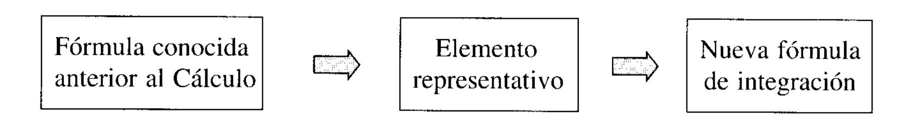
FIGURA 6.10
Rectángulos verticales (integración con respecto a x).

Nota. En el Ejemplo 5, al integrar en la variable y sólo es necesaria una integral. Si hubiéramos integrado en x, hubieran sido necesarias dos integrales, a saber

$$A = \int_{-1}^{2} [(x - 1) + \sqrt{3 - x}]dx + \int_{2}^{3} (\sqrt{3 - x} + \sqrt{3 - x})dx$$

porque la curva dominante cambia en $x = 2$, como muestra la Figura 6.10.

En esta sección hemos desarrollado una integral para el área basada en un rectángulo como *elemento representativo*. En cada nueva aplicación del resto del capítulo, construiremos un elemento representativo adecuado, utilizando fórmulas previas al Cálculo, de sobra conocidas. A partir de ahí se obtendrá cada nueva fórmula integral sumando esos elementos representativos.



Por ejemplo, en esta sección hemos desarrollado la fórmula para el área así:

A = (altura)(anchura)

↓

$\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x$

↓

$$A = \int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]dx$$

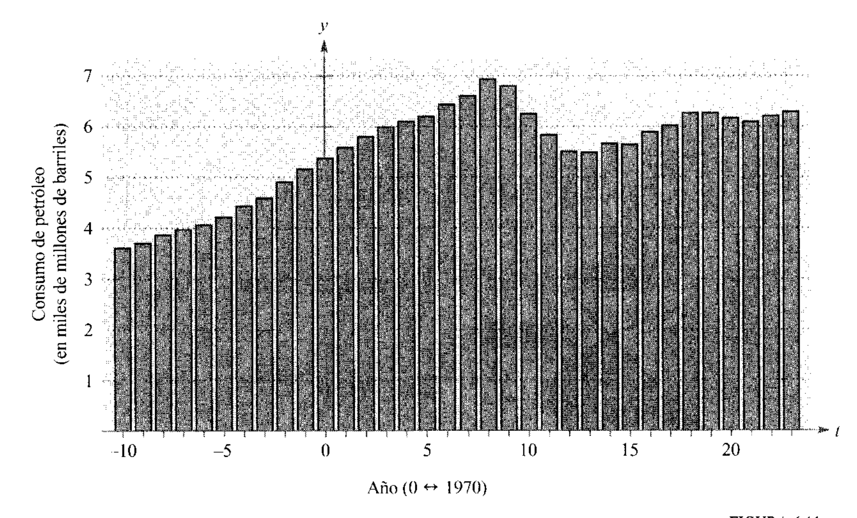


FIGURA 6.11
Entre 1960 y 1979, el consumo de petróleo en EE.UU. siguió aproximadamente una línea recta. Al final de los setenta, sin embargo, el precio del crudo subió drásticamente y el comportamiento del consumo cambió, como recoge el diagrama de barras.
(*Fuente: U.S. Energy Information Administration.*)

EJEMPLO 6 Consumo de petróleo

El comportamiento del consumo de petróleo se ha modificado en los últimos años (véase Figura 6.11). El ritmo de consumo (en miles de millones de barriles) de petróleo en EE.UU. entre 1960 y 1979 admite el modelo

$$f(t) = 0{,}18t + 5{,}38, \qquad -10 \leqslant t \leqslant 9$$

donde $t = 0$ corresponde a 1970. De 1979 a 1993, el consumo admite el modelo

$$g(t) = -0{,}0029t^3 + 0{,}149t^2 - 2{,}42t + 18{,}38, \qquad 9 \leqslant t \leqslant 23$$

como indica la Figura 6.12. Hallar el ahorro total entre 1979 y 1993 como consecuencia de ese nuevo esquema de consumo.

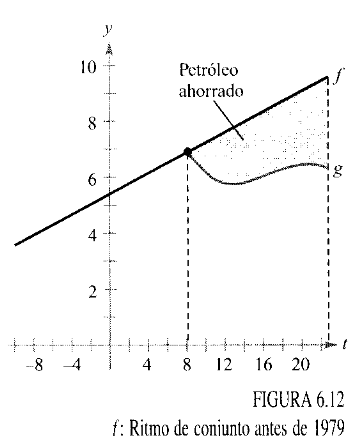


FIGURA 6.12
f: Ritmo de conjunto antes de 1979
g: Ritmo de conjunto después de 1979.

Solución: Puesto que la gráfica del modelo anterior a 1979 está por encima de la del modelo vigente a partir de 1979 en el intervalo [9, 23], la cantidad de petróleo ahorrada viene dada por

$$\text{Fuel ahorrado} = \int_9^{23} [f(t) - g(t)]dt$$

Usando para f y g los modelos citados, encontramos que

$$\text{Fuel ahorrado} = \int_9^{23} (0{,}0029t^3 - 0{,}149t^2 + 2{,}6t - 13)dt$$

$$= \left[0{,}000725t^4 - 0{,}049667t^3 + 1{,}3t^2 - 13t \right]_9^{23}$$

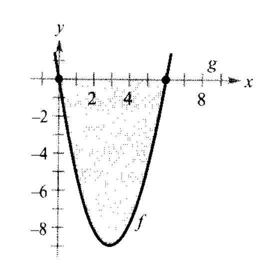
$$\approx 30{,}44 \text{ miles de millones de barriles}$$

Por tanto, se ahorraron unos 30,44 miles de millones de barriles de petróleo. □

Ejercicios de la Sección 6.1

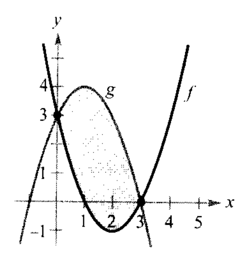
En los ejercicios 1-6, formular la integral definida que da el área de la región.

1. $f(x) = x^2 - 6x$
$g(x) = 0$



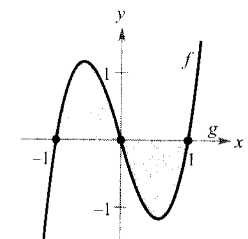
2. $f(x) = x^2 + 2x + 1$
$g(x) = 2x + 5$

3. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
$g(x) = -x^2 + 2x + 3$

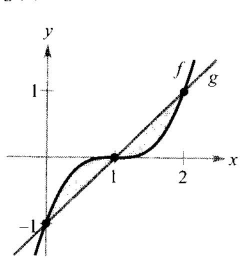


4. $f(x) = x^2$
$g(x) = x^3$

5. $f(x) = 3(x^3 - x)$
$g(x) = 0$



6. $f(x) = (x - 1)^3$
$g(x) = x - 1$



En los Ejercicios 7-10, el integrando es la diferencia entre dos funciones. Dibujar la gráfica de esas dos funciones y sombrear la región cuya área viene dada por la integral propuesta.

7. $\displaystyle\int_0^4 \left[(x+1) - \frac{x}{2}\right] dx$

8. $\displaystyle\int_{-1}^1 [(1 - x^2) - (x^2 - 1)]dx$

9. $\displaystyle\int_0^6 \left[4(2^{-x/3}) - \frac{x}{6}\right] dx$

10. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (2 - \sec x)\, dx$

Aproximaciones En los Ejercicios 11 y 12, determinar qué valor aproxima mejor el área de la región acotada por las gráficas de f y g. (Elegir a la vista de un esbozo de la región, no haciendo cálculos.)

11. $f(x) = x + 1, \quad g(x) = (x - 1)^2$
a) -2 *b*) 2 *c*) 10 *d*) 4 *e*) 8

12. $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x, \quad g(x) = 2 - \sqrt{x}$
a) 1 *b*) 6 *c*) -3 *d*) 3 *e*) 4

En los Ejercicios 13-26, dibujar la región acotada por las gráficas de las funciones algebraicas y calcular su área.

13. $f(x) = x^2 - 4x, \quad g(x) = 0$

14. $f(x) = 3 - 2x - x^2, \quad g(x) = 0$

15. $f(x) = x^2 + 2x + 1, \quad g(x) = 3x + 3$

16. $f(x) = -x^2 + 4x + 2, \quad g(x) = x + 2$

17. $y = x, \quad y = 2 - x, \quad y = 0$

18. $y = \dfrac{1}{x^2}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 5$

19. $f(x) = \sqrt{3x} + 1, \quad g(x) = x + 1$

20. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = x$

21. $f(y) = y^2, \quad g(y) = y + 2$

22. $f(y) = y(2 - y), \quad g(y) = -y$

23. $f(y) = y^2 + 1, \quad g(y) = 0, \quad y = -1, \quad y = 2$

24. $f(y) = \dfrac{y}{\sqrt{16 - y^2}}, \quad g(y) = 0, \quad y = 3$

25. $f(x) = \dfrac{4}{x}, \quad x = 0, \quad y = 1, \quad y = 4$

26. $g(x) = \dfrac{4}{2 - x}, \quad y = 4, \quad x = 0$

En los Ejercicios 27-36, representar en la calculadora la región acotada por las gráficas de las funciones y usar integración en la calculadora para hallar su área.

27. $f(x) = x(x^2 - 3x + 3), \quad g(x) = x^2$

28. $f(x) = x^3 - 2x + 1, \quad g(x) = -2x, \quad x = 1$

29. $y = x^2 - 4x + 3, \quad y = 3 + 4x - x^2$

30. $y = x^4 - 2x^2, \quad y = 2x^2$

31. $f(x) = x^4 - 4x^2, \quad g(x) = x^2 - 4$

32. $f(x) = x^4 - 4x^2, \quad g(x) = x^3 - 4x$

33. $f(x) = 1/(1 + x^2), \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2$

34. $f(x) = 6x/(x^2 + 1), \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3$

35. $y = \sqrt{1 + x^3}, \quad y = \frac{1}{2}x + 2, \quad x = 0$

36. $y = x\sqrt{\frac{4 - x}{4 + x}}, \quad y = 0, \quad x = 4$

En los Ejercicios 37-40, esbozar la región acotada por las gráficas de las funciones trascendentes y calcular su área.

37. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \operatorname{tg} x, \quad -\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$

38. $f(x) = \operatorname{sen} 2x \quad g(x) = \cos x, \quad \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6}$

39. $f(x) = xe^{-x^2}, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

40. $f(x) = 3^x, \quad g(x) = 2x + 1$

En los Ejercicios 41-44, representar la región acotada por las gráficas en la calculadora y usar integración en ella para calcular el área de la región.

41. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

42. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

43. $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{1/x}, \quad y = 0, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3$

44. $f(x) = \frac{4 \ln x}{x}, \quad y = 0, \quad x = 5$

En los Ejercicios 45 y 46, *a*) representar en la calculadora la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, *b*) formular la integral que da el área de esa región (¿puede calcular esa integral a mano?), y *c*) usar integración en la calculadora para estimar el área.

45. $y = \sqrt{\frac{x^3}{4 - x}}, \quad y = 0, \quad x = 3$

46. $y = \sqrt{x}\, e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

En los Ejercicios 47 y 48, calcular, por integración, el área del triángulo con los vértices que se especifican.

47. $(0, 0), (a, 0), (b, c)$ **48.** $(2, -3), (4, 6), (6, 1)$

En los Ejercicios 49 y 50, escribir y calcular la integral definida que da el área de la región acotada por las gráficas de la función y de la recta tangente a su gráfica en el punto indicado.

49. $f(x) = x^3, (1, 1)$ **50.** $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \left(1, \frac{1}{2}\right)$

51. ***Para pensar*** Las gráficas de $y = x^4 - 2x^2 + 1$ e $y = 1 - x^2$ se cortan en tres puntos. Sin embargo, el área entre las curvas *puede* hallarse con una sola integral. Explicar cómo y formular esa única integral.

52. ***Para pensar*** El área de la región limitada por las gráficas de $y = x^3$ e $y = x$ *no* viene dada por la integral

$$\int_{-1}^{1} (x^3 - x)dx$$

Explicar por qué. Usar la simetría para escribir una sola integral que represente ese área.

En los Ejercicios 53 y 54, hallar b de modo que la recta $y = b$ divida, en dos partes de igual área, la región acotada por las gráficas de las dos ecuaciones.

53. $y = 9 - x^2, \quad y = 0$ **54.** $y = 9 - |x|, \quad y = 0$

En los Ejercicios 55 y 56, calcular el límite y dibujar un esbozo de la región cuya área viene dada por ese límite.

55. $\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^2)\, \Delta x$

donde $x_i = i/n$ y $\Delta x = 1/n$

56. $\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=i}^{n} (4 - x_i^2)\, \Delta x$

donde $x_i = -2 + (4i/n)$ y $\Delta x = 4/n$

Ingresos En los Ejercicios 57 y 58, se dan dos modelos para los ingresos (en miles de millones de dólares) de una gran empresa. El modelo R_1 da los ingresos previstos entre los años 2000 ($t = 0$) y 2005, y R_2 da los previstos si hubiese una disminución en el ritmo de crecimiento de las ventas en ese período. Estimar la reducción total de los ingresos en caso de que se acabe cumpliendo el modelo R_2.

57. $R_1 = 7{,}21 + 0{,}58t$

$R_2 = 7{,}21 + 0{,}45t$

58. $R_1 = 7{,}21 + 0{,}26t + 0{,}02t^2$

$R_2 = 7{,}21 + 0{,}1t + 0{,}01t^2$

59. ***Consumo de vacuno*** Entre 1985 y 1994, el ritmo de consumo de carne de vacuno (en miles de millones de libras) en EE.UU. siguió el modelo

$$f(t) = \begin{cases} 27{,}77 - 0{,}36t, & 5 \leqslant t \leqslant 10 \\ 21{,}00 + 0{,}27t, & 10 \leqslant t \leqslant 14 \end{cases}$$

siendo t el tiempo en años, con $t = 5$ correspondiendo a 1985. *(Fuente: U.S. Department of Agriculture.)*

a) Representar el modelo en la calculadora.

b) Supuesto que el consumo entre 1990 y 1994 siguiera el modelo de los años 1985-1990, ¿cuánta carne de vacuno menos se hubiera consumido en esos años?

60. ***Coste del combustible*** El coste de combustible C (en millones de dólares) proyectado por una empresa entre los años 2000 y 2010 es

$$C_1 = 568{,}50 + 7{,}15t$$

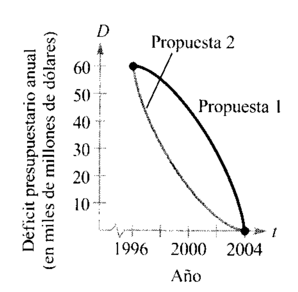
donde t es el tiempo en años, con $t = 0$ correspondiendo al año 2000. Debido a la instalación de un equipamiento de ahorro energético, el coste sigue este otro modelo

$$C_2 = 525{,}60 + 6{,}43t$$

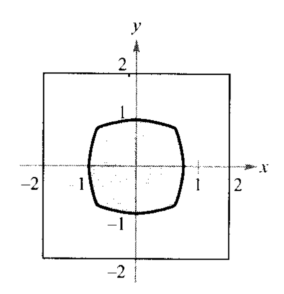
Estimar el ahorro producido en esos 10 años.

61. ***Beneficios*** El departamento de contabilidad de una empresa informa que los beneficios en el último ejercicio fiscal fueron \$893.000 y predice para los próximos 5 años un crecimiento anual entre el $3\frac{1}{2}$ por 100 y 5 por 100. Estimar la diferencia acumulada en los beneficios totales durante esos 5 años entre los dos extremos de la predicción.

62. ***Para pensar*** El Congreso está debatiendo dos propuestas para eliminar el déficit público en el año 2004. La figura muestra el ritmo de descenso en cada propuesta. Tomando como objetivo lograr hacer mínimo el déficit acumulado, ¿qué propuesta es la mejor? Explique la respuesta.



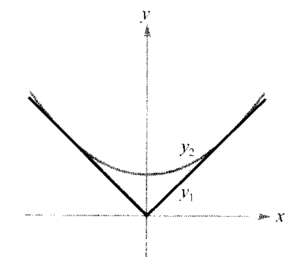
63. ***Área*** La región sombreada en la figura consta de todos los puntos que distan menos del centro del cuadrado que de los lados. Calcular su área.



64. ***Diseño mecánico*** La superficie de una pieza de una máquina es la región entre las gráficas de $y_1 = |x|$ e $y_2 = 0{,}08x^2 + k$.

a) Hallar k si la parábola es tangente a la gráfica de y_1.

b) Calcular el área superficial de la pieza.

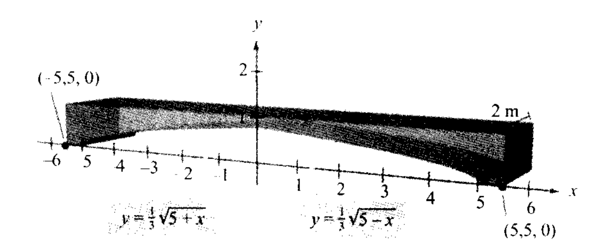


65. ***Diseño de edificios*** Unas vigas de cemento empleadas en un nuevo edificio tienen la forma y dimensiones, en metros, indicadas en la figura.

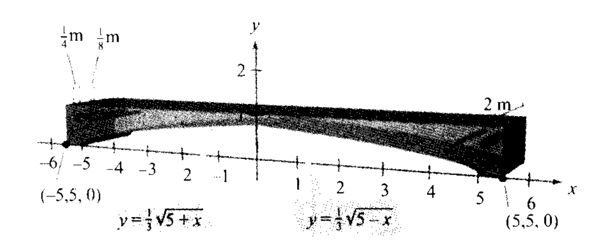
a) Hallar el área de la cara adosada al sistema de coordenadas rectangular.

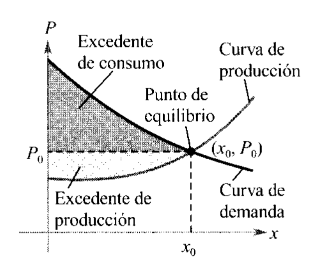
b) Calcular el volumen de cemento de la viga, multiplicando por 2 el área obtenida en *a)*.

c) Un metro cúbico de cemento pesa 5.000 libras. ¿Cuánto pesa la viga?



66. ***Diseño de edificios*** Para disminuir el peso y mejorar el proceso de endurecimiento, la viga del Ejercicio 65 no se fabrica sólida. Rehacer el Ejercicio 65 si en ella se hacen unos orificios cilíndricos como los indicados en la figura de la página siguiente.





Excesos de consumo y producción En los Ejercicios 67 y 68, hallar el exceso de consumo y el de producción para las curvas de producción y demanda especificadas. Esos excesos vienen dados por las áreas dadas en la figura.

	Función de demanda	*Función de producción*
67.	$p_1(x) = 50 - 0{,}5x$	$p_2(x) = 0{,}125x$
68.	$p_1(x) = 1.000 - 0{,}4x^2$	$p_2(x) = 42x$

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 69 y 70, discutir si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar por qué o exhibir un ejemplo que ponga de manifiesto su falsedad.

69. Si el área de la región acotada por las gráficas de f y g es 1, el área de la región acotada por las de $h(x) = f(x) + C$ y $k(x) = g(x) + C$ también es 1.

70. Si $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = A$, entonces $\int_a^b [g(x) - f(x)]dx = -A$



6.2 Volumen: el método de los discos

CONTENIDO ▪
El método de los discos ▪
El método de las arandelas ▪
Sólidos con secciones de área conocida ▪

El método de los discos

En el Capítulo 4 advertimos que el cálculo de áreas es sólo una de tantas aplicaciones de la integral definida. Otra muy importante es el cálculo de volúmenes de sólidos tridimensionales. En esta sección analizaremos el caso de sólidos especiales, con todas sus secciones similares. Empezaremos con los sólidos de revolución, comunes en ingeniería y en todo tipo de objetos de uso cotidiano, como ruedas, embudos, píldoras, botellas y pistones (Figura 6.13).

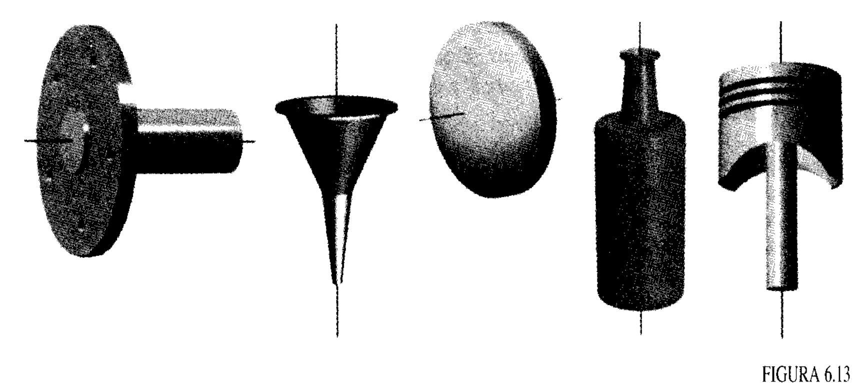
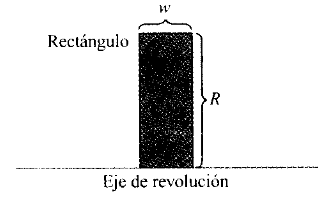


FIGURA 6.13
Sólidos de revolución.



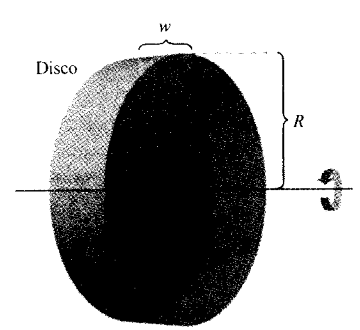


FIGURA 6.14
Volumen de un disco: $\pi R^2 w$.

Si una región plana se hace girar en torno a una recta, el sólido resultante es un **sólido de revolución** y esa recta se llama **eje de revolución** (o eje de giro). El más simple es un cilindro circular recto o **disco**, generado al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados (Figura 6.14). El volumen del disco es

$$\text{Volumen del disco} = (\text{área del disco})\,(\text{anchura del disco}) = \pi R^2 w$$

donde R es el radio del disco y w su anchura.

El volumen del disco servirá para hallar el de un sólido general de revolución. Consideremos el sólido de revolución de la Figura 6.15 y un rectángulo representativo de la región plana que lo genera. Cuando ese rectángulo gira alrededor del eje de revolución, engendra un disco representativo de volumen

$$\Delta V = \pi R^2 \Delta x$$

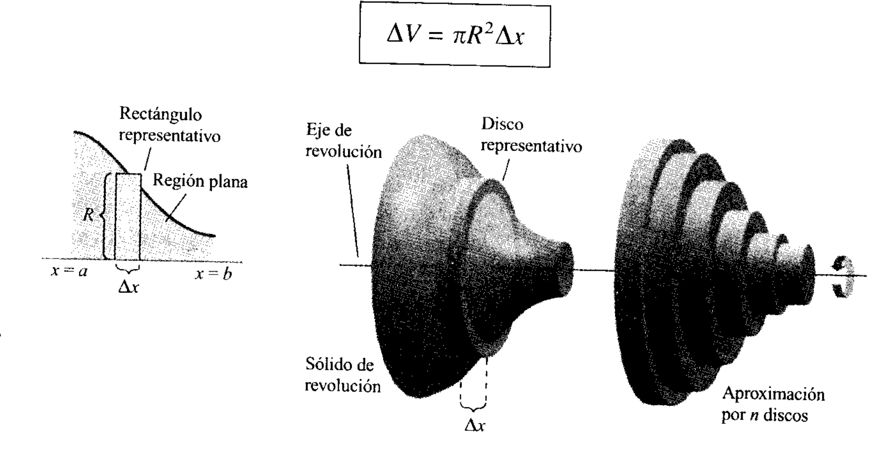


FIGURA 6.15
Método de los discos.

Aproximando el volumen del sólido por el de los n discos de ese tipo, de anchura Δx y radio $R(x_i)$, se obtiene

$$\text{Volumen del sólido} \approx \sum_{i=1}^{n} \pi[R(x_i)]^2\, \Delta x$$
$$= \pi \sum_{i=1}^{n} [R(x_i)]^2\, \Delta x$$

esta aproximación va mejorando al hacer $\|\Delta\| \to 0$ ($n \to \infty$). Por tanto, definimos el volumen del sólido como

$$\text{Volumen del sólido} = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} [R(x_i)]^2\, \Delta x$$
$$= \pi \int_a^b [R(x)]^2\, dx$$

En esquema, el método de los discos es como sigue:

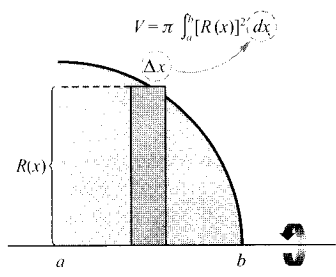
Fórmula conocida		*Elemento representativo*		*Nueva fórmula de integración*
Volumen del disco $V = \pi R^2 w$	→	$\Delta V = \pi[R(x_i)]^2\, \Delta x$	→	Sólido de revolución $V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\, dx$

Si el eje de giro es vertical se deduce una fórmula análoga.

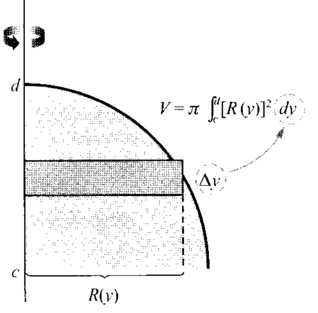
MÉTODO DE LOS DISCOS

Para calcular el volumen de un sólido de revolución por el método de los discos, utilizar una de las fórmulas siguientes, como se indica en la Figura 6.16.

Eje de revolución horizontal	*Eje de revolución vertical*
Volumen $= V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\, dx$	Volumen $= V = \pi \int_c^d [R(y)]^2\, dy$



Eje horizontal de revolución



Eje vertical de revolución

FIGURA 6.16

Nota. En la Figura 6.16 queda claro que se puede determinar la variable de integración colocando un rectángulo representativo en la región *plana* «perpendicular» al eje de giro. Si la anchura del rectángulo es Δx, integrar en x, y si la anchura es Δy, integrar en y.

El método de los discos encuentra su aplicación más sencilla en el caso de una región plana acotada por la gráfica de f y el eje x. Si el eje de giro es el eje x, el radio $R(x)$ es simplemente $f(x)$.

EJEMPLO 1 Aplicación del método de los discos

Calcular el volumen del sólido de revolución formado al hacer girar la región acotada por la gráfica de

$$f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$$

y el eje x $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ en torno al eje x.

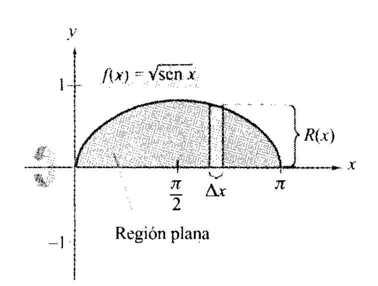
Solución: Del rectángulo representativo de la Figura 6.17 superior vemos que el radio de este sólido es

$$R(x) = f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$$

Así pues, su volumen viene dado por

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b [R(x)]^2\, dx = \pi \int_0^\pi (\sqrt{\operatorname{sen} x})^2\, dx \\ &= \pi \int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \pi \Big[-\cos x \Big]_0^\pi \\ &= \pi(1 + 1) = 2\pi \end{aligned}$$

□



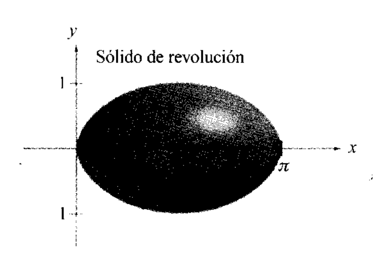


FIGURA 6.17

EJEMPLO 2 Eje de revolución distinto de los ejes coordenados

Calcular el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por las gráficas de $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = 1$ en torno a la recta $y = 1$ (Figura 6.18).

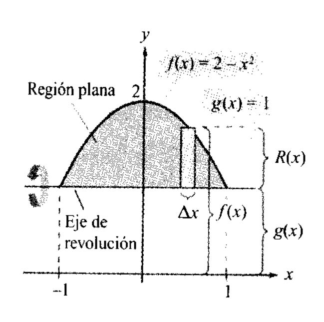
Solución: Igualando $f(x)$ y $g(x)$ se ve que las dos gráficas se cortan en $x = \pm 1$. Para hallar el radio, restamos $g(x)$ de $f(x)$.

$$\begin{aligned} R(x) &= f(x) - g(x) \\ &= (2 - x^2) - 1 \\ &= 1 - x^2 \end{aligned}$$

Finalmente, integrando entre -1 y 1 obtenemos el volumen:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b [R(x)]^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2 \, dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4) \, dx \\ &= \pi \left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{1} = \frac{16\pi}{15} \end{aligned}$$

□



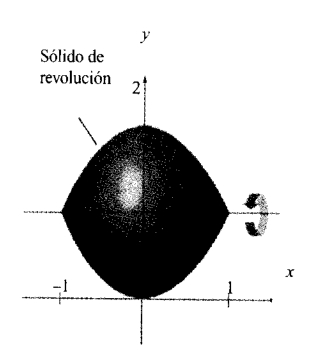


FIGURA 6.18

El método de las arandelas

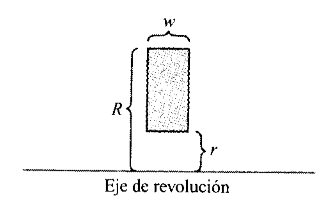
Sustituyendo el disco representativo por una **arandela** representativa, el método de los discos se extiende a sólidos huecos. La arandela se genera haciendo girar un rectángulo en torno al eje x, como indica la Figura 6.19. Si r y R denotan los radios interno y externo de la arandela y w su anchura, el volumen viene dado por

$$\text{Volumen de la arandela} = \pi(R^2 - r^2)w$$

Para ver cómo usar esta técnica, consideremos una región acotada por un radio externo $R(x)$ y un radio interno $r(x)$, como en la Figura 6.20. Si se hace girar esa región alrededor del eje de revolución, el volumen del sólido engendrado viene dado por

$$V = \pi \int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2) \, dx \qquad \text{Método de las arandelas}$$

La integral que contiene al radio interno representa el volumen del hueco y se resta de la integral que contiene al radio externo.



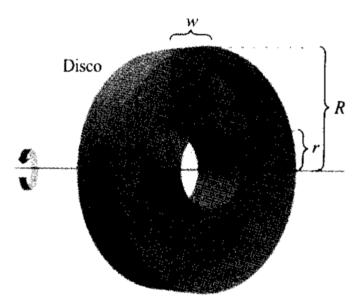


FIGURA 6.19

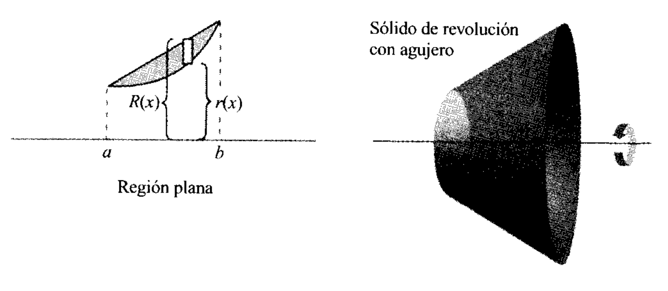


FIGURA 6.20

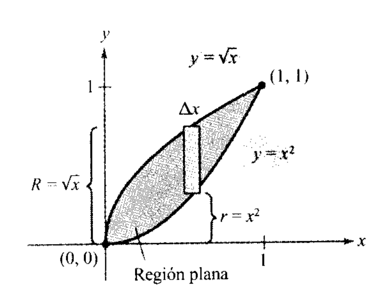
EJEMPLO 3 Aplicación del método de las arandelas

Calcular el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ en torno al eje x (Figura 6.21).

Solución: En la Figura 6.21 vemos que los radios interno y externo son

$$R(x) = \sqrt{x} \qquad \text{Radio exterior}$$

$$r(x) = x^2 \qquad \text{Radio interior}$$



Integrando entre 0 y 1 obtenemos

$$V = \pi \int_a^b \{[R(x)]^2 - [r(x)]^2\}\, dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x - x^4)\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3\pi}{10} \qquad \square$$

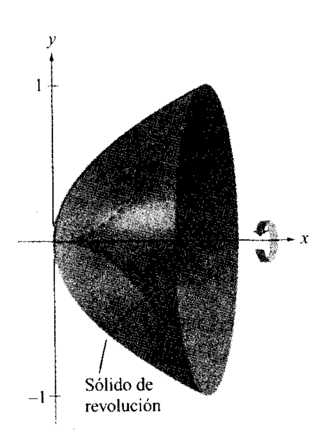
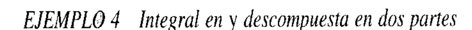


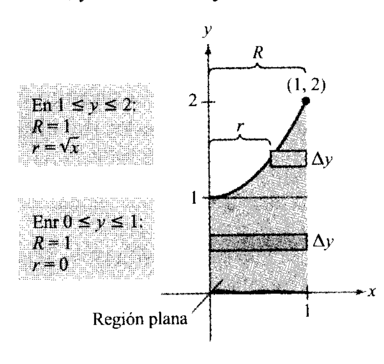
FIGURA 6.21
Sólido de revolución.

En cada uno de los ejemplos anteriores, el eje de revolución era *horizontal* y hemos integrado en x. En el próximo ejemplo, el eje de giro es *vertical* y hay que integrar en y. En este ejemplo es necesario, además, separar la integral que da el volumen del sólido en dos partes.



EJEMPLO 4 Integral en y descompuesta en dos partes

Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, y $x = 1$ en torno al eje y, como indica la Figura 6.22.



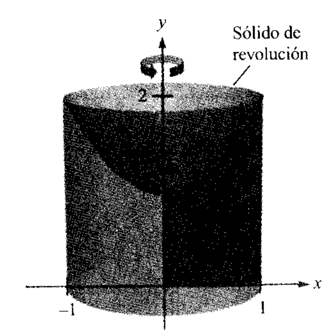


FIGURA 6.22

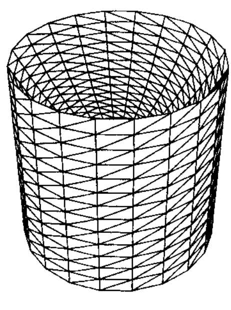
Solución: Para la región de la Figura 6.22, el radio externo es simplemente $R = 1$. Por el contrario, no hay una fórmula sencilla que describa el radio interno. Cuando $0 \leqslant y \leqslant 1$ es $r = 0$, mientras que cuando $1 \leqslant y \leqslant 2$, r queda fijado por la ecuación $y = x^2 + 1$, lo cual implica $r = \sqrt{y - 1}$

$$r(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ \sqrt{y - 1}, & 1 \leqslant y \leqslant 2 \end{cases}$$

Usando esta expresión del radio interno, podemos hallar el volumen efectuando dos integrales.

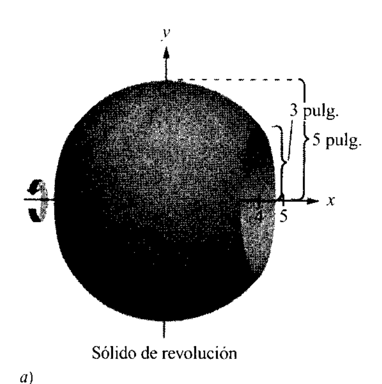
$$\mathbf{V} = \pi \int_0^1 (1^2 - 0^2)\, dy + \pi \int_1^2 [1^2 - (\sqrt{y - 1})^2]\, dy$$

$$= \pi \int_0^1 1\, dy + \pi \int_1^2 (2 - y)\, dy$$



Dibujado con Mathematica

FIGURA 6.23



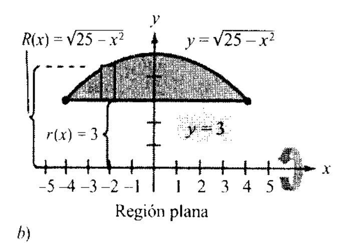


FIGURA 6.24

$$= \pi\Big[y\Big]_0^1 + \pi\Big[2y - \frac{y^2}{2}\Big]_1^2$$

$$= \pi + \pi\left(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

Hagamos constar que la primera integral $\pi\int_0^1 1\, dy$ representa el volumen de un cilindro circular recto de radio 1 y altura 1, de modo que esta parte del volumen podría haber sido calculada sin recurrir a la integración. □

Algunas calculadoras permiten visualizar sólidos de revolución. Si dispone de los programas apropiados, intente representar algunos de los sólidos de revolución aparecidos en esta sección. Así, el del Ejemplo 4 tendrá en la pantalla el aspecto que muestra la Figura 6.23.

EJEMPLO 5 Diseño de fabricación

Un fabricante diseña un objeto metálico, en forma de esfera con un radio de 5 pulgadas, y con un orificio cilíndrico en su interior, como muestra la Figura 6.24*a*. El hueco tiene un radio de 3 pulgadas. ¿Cuál es el volumen del objeto metálico resultante?

Solución: Podemos imaginar el objeto generado por un segmento del círculo de ecuación $x^2 + y^2 = 25$ que se ve en la Figura 6.24*b*. Como el radio del orificio es 3, hacemos $y = 3$ y resolvemos la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ para determinar que los límites de integración son $x = \pm 4$. Así pues, los radios interno y externo son

$$r(x) = 3 \qquad \text{y} \qquad R(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

y a su vez el volumen resulta ser

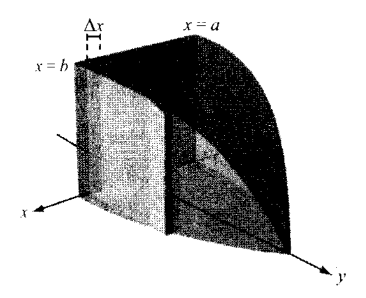
$$V = \pi\int_a^b \{[R(x)]^2 - [r(x)]^2\}\, dx$$

$$= \pi\int_{-4}^4 \left[(\sqrt{25 - x^2})^2 - (3)^2\right] dx$$

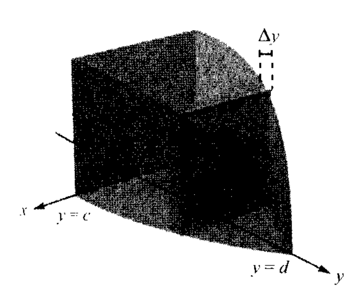
$$= \pi\int_{-4}^4 (16 - x^2)\, dx$$

$$= \pi\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^4$$

$$= \frac{256\pi}{3} \text{ pulgadas cúbicas}$$ □



a) Sección perpendicular al eje *x*



b) Sección perpendicular al eje *y*

FIGURA 6.25

Sólidos con secciones de área conocidas

Con el método de los discos se puede hallar el volumen de un sólido de sección circular, ya que sabemos que el área del círculo es

$$A = \pi R^2$$

También es posible calcular el volumen de sólidos cuyas secciones sean de área conocida, sea cual sea su forma concreta. Secciones comunes suelen ser cuadrados, triángulos, semicírculos o trapecios.

VOLUMEN DE SÓLIDOS CON SECCIONES DE ÁREA CONOCIDA

1. **Para secciones de área $A(x)$, perpendiculares al eje x,**

$$\text{Volumen} = \int_a^b A(x)\, dx$$

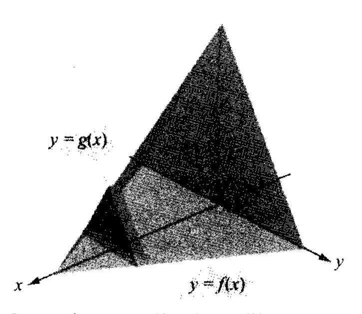
como muestra la Figura 6.25*b*.

2. **Para secciones de área $A(y)$, perpendiculares al eje y,**

$$\text{Volumen} = \int_c^d A(y)\, dy$$

como muestra la Figura 6.25*b*.

EJEMPLO 6 Secciones triangulares



Las secciones son triángulos equiláteros

y, x, 1, -1, 2, $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$, $g(x) = -1 + \frac{x}{2}$, Δx

Base triangular en el plano xy

FIGURA 6.26

Calcular el volumen del sólido de la Figura 6.26, cuya base es la región acotada por las rectas

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2}, \qquad g(x) = -1 + \frac{x}{2}, \qquad \text{y} \qquad x = 0$$

Las secciones perpendiculares al eje x son triángulos equiláteros.

Solución: La base y el área de cada sección triangular son

$$\text{Base} = \left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(-1 + \frac{x}{2}\right) = 2 - x \qquad \text{Longitud de la base}$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\text{base})^2 \qquad \text{Área del triángulo equilátero}$$

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2 - x)^2 \qquad \text{Área de la sección}$$

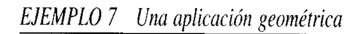
Como x varía entre 0 y 2, el volumen de ese sólido es

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{4}(2 - x)^2\, dx$$

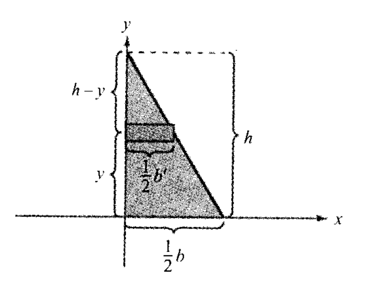
$$= -\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{(2 - x)^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

□



EJEMPLO 7 Una aplicación geométrica



Demostrar que el volumen de una pirámide con base cuadrada es $V = \frac{1}{3}hB$, donde h denota la altura de la pirámide y B el área de su base.

Solución: Si cortamos la pirámide con un plano de altura y paralelo a su base, como en la Figura 6.27, resulta una sección cuadrada con lados de longitud b'. Por semejanza de triángulos,

$$\frac{b'}{b} = \frac{h-y}{h} \qquad \text{o sea} \qquad b' = \frac{b}{h}(h-y)$$

donde b es la longitud de los lados de la base de la pirámide. Por tanto,

$$A(y) = (b')^2 = \frac{b^2}{h^2}(h-y)^2$$

Integrando de 0 a h obtenemos

$$V = \int_0^h \frac{b^2}{h^2}(h-y)^2\,dy = \frac{b^2}{h^2}\int_0^h (h-y)^2\,dy$$

$$= -\left(\frac{b^2}{h^2}\right)\left[\frac{(h-y)^3}{3}\right]_0^h$$

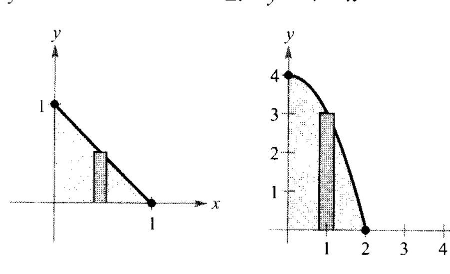
$$= \frac{b^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3}\right) = \frac{1}{3}hB \qquad B = b^2$$

FIGURA 6.27

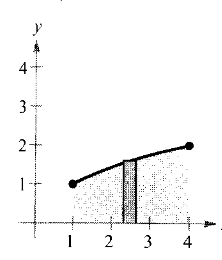
Ejercicios de la Sección 6.2

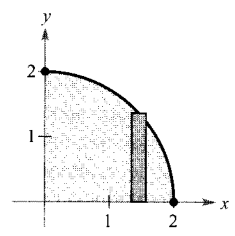
En los Ejercicios 1-6, escribir y calcular la integral que representa el volumen del sólido generado al hacer girar la región en torno al eje x.

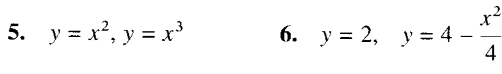
1. $y = -x + 1$ **2.** $y = 4 - x^2$



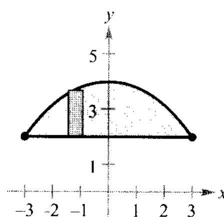
3. $y = \sqrt{x}$ **4.** $y = \sqrt{4 - x^2}$





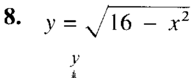


5. $y = x^2$, $y = x^3$ **6.** $y = 2$, $y = 4 - \frac{x^2}{4}$

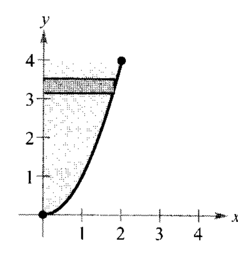


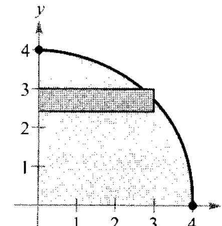
En los Ejercicios 7-10, formular y calcular la integral que representa el volumen del sólido generado al hacer girar la región en torno al eje x.

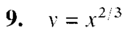
7. $y = x^2$



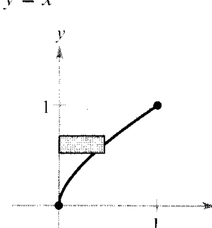
8. $y = \sqrt{16 - x^2}$



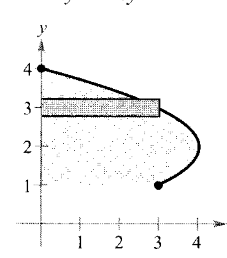




9. $y = x^{2/3}$



10. $x = -y^2 + 4y$



En los Ejercicios 11-14, hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones en torno a las rectas que se especifican.

11. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 4$
a) el eje x *b*) el eje y
c) la recta $x = 4$ *d*) la recta $x = 6$

12. $y = 2x^2, \quad y = 0, \quad x = 2$
a) el eje y *b*) el eje x
c) la recta $y = 8$ *d*) la recta $x = 2$

13. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$
a) el eje y *b*) la recta $x = 6$

14. $y = 6 - 2x - x^2, \quad y = x + 6$
a) el eje x *b*) la recta $y = 3$

En los Ejercicios 15-18, escribir el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones en torno a la recta $y = 4$.

15. $y = x, \quad y = 3, \quad x = 0$

16. $y = x^2, \quad y = 4$

17. $y = \dfrac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$

18. $y = \sec x, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3}$

En los Ejercicios 19-22, hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones en torno a la recta $x = 6$.

19. $y = x, \quad y = 0, \quad y = 4, \quad x = 6$

20. $y = 6 - x, \quad y = 0, \quad y = 4, \quad x = 0$

21. $x = y^2, \quad x = 4$

22. $xy = 6, \quad y = 2, \quad y = 6, \quad x = 6$

En los Ejercicios 23-28, hallar el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones en torno al eje x.

23. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3$

24. $y = x\sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0$

25. $y = \dfrac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$

26. $y = \dfrac{3}{x + 1}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 8$

27. $y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

28. $y = e^{x/2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 4$

En los Ejercicios 29 y 30, hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones en torno al eje y.

29. $y = 3(2 - x), \quad y = 0, \quad x = 0$

30. $y = 9 - x^2, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 3$

En los Ejercicios 31-36, usar integración en la calculadora para aproximar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones en torno al eje x.

31. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \pi$

32. $y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{2}$

33. $y = e^{-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2$

34. $y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 3$

35. $y = e^{x/2} + e^{-x/2}, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad x = 2$

36. $y = 2 \operatorname{arctg} (0{,} 2x), \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 5$

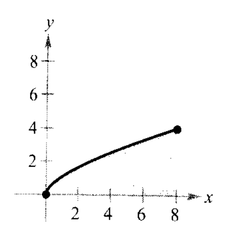
Aproximación En los Ejercicios 37 y 38, averiguar qué valor aproxima mejor el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones en torno al eje x. (Basar la decisión en un dibujo del sólido, no en cálculos.)

37. $y = e^{-x^2/2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2$
a) 3 *b*) −5 *c*) 10 *d*) 7 *e*) 20

38. $y = \operatorname{arctg} x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$
a) 10 *b*) $\dfrac{3}{4}$ *c*) 5 *d*) −6 *e*) 15

39. ***Para pensar***
a) La región acotada por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje x gira en torno al eje x. Calcular el volumen del sólido resultante.
b) Si se cambiase la ecuación de la parábola en el apartado *a*) por $y = 4 - x^2$, ¿sería distinto el volumen del sólido generado? Explicar la respuesta.

40. ***Para pensar*** Se hace girar la región de la figura alrededor de los ejes o recta indicados. Ordenar los volúmenes de los sólidos generados de menor a mayor. Explicar cómo se ha decidido el orden.
a) eje x *b)* eje y *c)* $x = 8$



41. Si la porción de la recta $y = \frac{1}{2}x$ que está en el primer cuadrante gira en torno al eje x, se genera un cono. Hallar el volumen del cono entre $x = 0$ y $x = 6$.

42. Verificar con el método de los discos que el volumen de un cono circular recto es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde r es el radio de la base y h la altura.

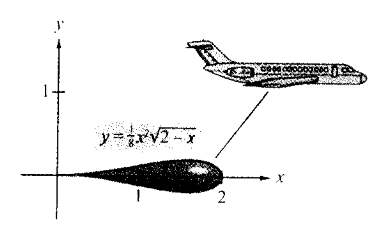
43. Verificar con el método de los discos que el volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$

44. Una esfera de radio r se corta por un plano situado h ($h < r$) unidades sobre el nivel de su ecuador. Determinar el volumen del sólido (casquete esférico) que queda por encima de ese plano.

45. Un cono con base de radio r y altura H se corta por un plano paralelo a la base y situado h unidades sobre ella. Hallar el volumen del sólido (tronco de cono) que queda por debajo del plano.

46. La región limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 0$, y $x = 4$, gira en torno al eje x.
a) Hallar el valor de x en el intervalo [0, 4] que divide al sólido en dos partes de igual volumen.
b) Hallar los valores de x en el intervalo [0, 4] que dividen al sólido en tres partes de igual volumen.

47. ***Volumen de un depósito de combustible*** El depósito en el ala de un avión tiene la forma de un sólido de revolución generado al hacer girar la región acotada por la gráfica de $y = \frac{1}{8}x^2\sqrt{2 - x}$ y el eje x, en torno a éste (véase figura), donde x e y se miden en metros. Hallar el volumen del depósito.



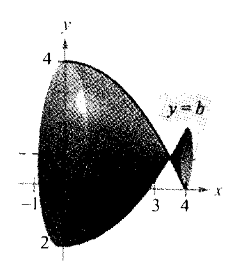
48. ***Volumen de una vasija*** Una vasija de vidrio admite el modelo obtenido al hacer girar la gráfica de

$$y = \begin{cases} \sqrt{0{,}1x^3 - 2{,}2x^2 + 10{,}9x + 22{,}2}, & 0 \leqslant x \leqslant 11{,}5 \\ 2{,}95, & 11{,}5 < x \leqslant 15 \end{cases}$$

en torno al eje x, donde x e y se miden en centímetros. Representar la función en la calculadora y determinar el volumen de esa vasija.

49. Calcular el volumen del sólido generado al girar la mitad superior de la elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ en torno a
a) El eje x, para formar un esferoide prolato (parecido a un balón de rugby).
b) El eje y, para formar un esferoide oblato (parecido a una lenteja).

50. ***Volumen mínimo*** El arco de $y = 4 - (x^2/4)$ en el intervalo [0, 4] gira en torno a la recta $y = b$ (véase figura).
a) Expresar el volumen del sólido resultante como función de b.
b) Representar esa función en la calculadora y, con ayuda de la gráfica, estimar el valor de b que hace mínimo el volumen del sólido.
c) Determinar, mediante el Cálculo, el valor de b que hace mínimo el volumen y compararlo con la estimación anterior.

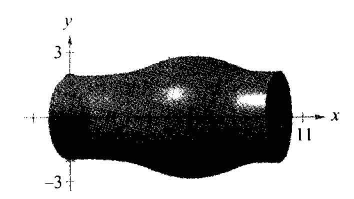


51. ***Profundidad del agua en un depósito*** Un depósito de agua es esférico, de radio 50 pies. Averiguar la profundidad del agua cuando está a un cuarto y a tres cuartos de su capacidad total. (*Nota:* Hallar las raíces con la calculadora después de calcular la integral definida.)

52. ***Un modelo matemático*** Un delineante tiene que determinar la cantidad de material requerida para fabricar una pieza de una máquina (véase figura en la página siguiente). La tabla recoge, en centímetros, los diámetros de la pieza en puntos uniformemente espaciados entre sí.

x	0	1	2	3	4	5
d	4,2	3,8	4,2	4,7	5,2	5,7

x	6	7	8	9	10
d	5,8	5,4	4,9	4,4	4,6



a) Con esos datos y con la regla de Simpson, estimar el volumen de la pieza.
b) Usar regresión en la calculadora para obtener un polinomio de grado cuatro que pase por los puntos representativos de esos datos. Representar los datos y el modelo.
c) Aproximar con una calculadora la integral definida que da el volumen de la pieza y comparar con el resultado del apartado *a*).

53. ***Para pensar*** Emparejar cada integral con el sólido cuyo volumen representa y dar las dimensiones de cada sólido.
a) Cilindro circular recto *b*) Elipsoide
c) Esfera *d*) Cono circular recto *e*) Toro

i) $\pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx$

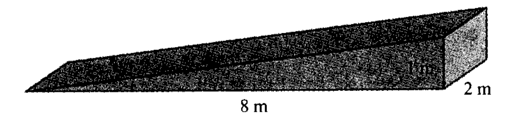
ii) $\pi \int_0^h r^2\, dx$

iii) $\pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx$

iv) $\pi \int_{-b}^{b} \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}\right)^2 dx$

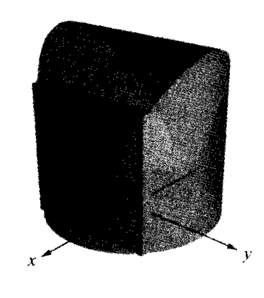
v) $\pi \int_{-r}^{r} [(R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - x^2})^2]\, dx$

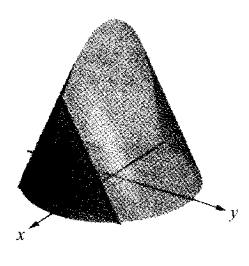
54. Calcular el volumen de cemento en la rampa de la figura, cuyas secciones son triángulos rectángulos.



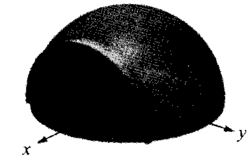
55. Hallar el volumen del sólido cuya base está acotada por el círculo $x^2 + y^2 = 4$, con las secciones, perpendiculares al eje x, que se especifican.

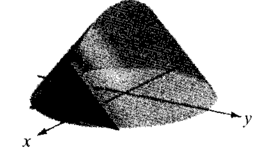
a) Cuadrados *b*) Triángulos equiláteros



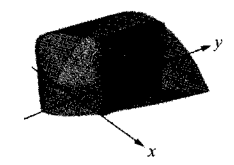


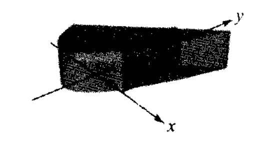
c) Semicírculos *d*) Triángulos rectángulos isósceles





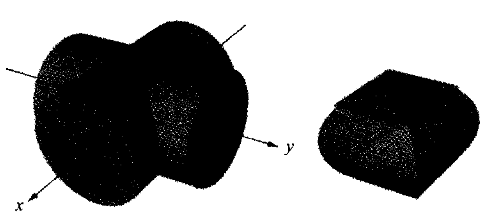
56. Hallar el volumen del sólido cuya base está acotada por las gráficas de $y = x + 1$ e $y = x^2 - 1$, con las secciones perpendiculares al eje x que se indican.
a) Cuadrados *b*) Rectángulos de altura 1





57. La base de un sólido está acotada por $y = x^3$, $y = 0$, y $x = 1$. Calcular su volumen para cada una de estas secciones (perpendiculares al eje y): *a*) cuadrados, *b*) semicírculos, *c*) triángulos equiláteros, y *d*) semielipses cuya altura es doble que su base.

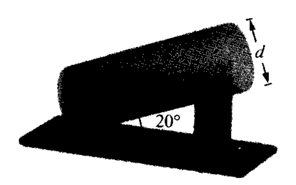
58. Calcular el volumen del sólido intersección (común a ambos) de dos cilindros circulares rectos de radio r, cuyos ejes se cortan en ángulo recto (véase figura).



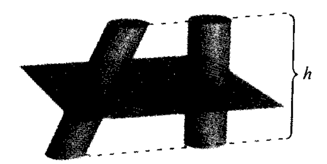
Dos cilindros que se cortan Sólido de intersección

PARA MÁS INFORMACIÓN Sobre este problema, véase el artículo «Estimating the Volumes of Solid Figures with Curved Surfaces», de Donald Cohen, en *Mathematics Teacher*, mayo 1991.

59. ***Volumen de aceite*** Un barril de diámetro d está apoyado (véase figura) de manera tal que su eje forma un ángulo de 20° con la horizontal. El aceite contenido llega justo hasta el borde de la base superior. Estimar el volumen de aceite que hay en el barril.



60. ***El teorema de Cavalieri*** Demostrar que si dos sólidos tienen la misma altura y si, además, las secciones paralelas a sus bases de altura arbitraria tienen igual área, entonces sus volúmenes son iguales (véase figura).

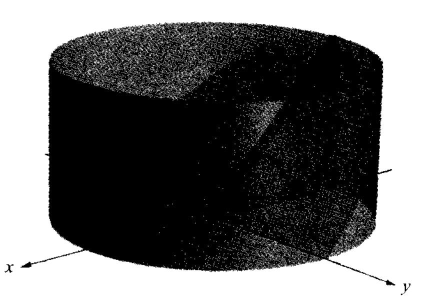


Área de R_1 = área de R_2

61. Dos planos cortan a un cilindro circular recto formando una cuña de ángulo θ (véase figura).

a) Calcular el volumen de la cuña si $\theta = 45°$.

b) Hallar su volumen para un θ arbitrario. Suponiendo el cilindro suficientemente largo, ¿cómo cambia el volumen de la cuña cuando θ crece de 0° a 90°?



62. Un operario hace un orificio por el centro de una esfera de radio R. El orificio tiene radio r. Calcular el volumen de la «pulsera» resultante.

63. Si $R = 5$ en el ejercicio precedente, ¿qué valor de r produce una pulsera de volumen igual a la mitad del de la esfera?

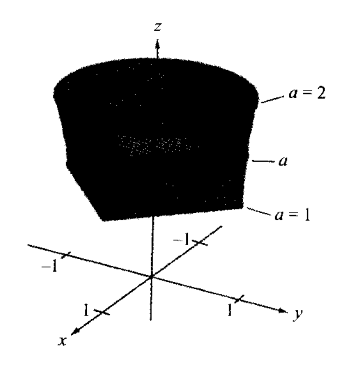
64. El sólido de la figura tiene secciones acotadas por la gráfica de

$$|x|^a + |y|^a = 1$$

donde $1 \leqslant a \leqslant 2$

a) Describir las secciones para $a = 1$ y $a = 2$.

b) Describir un procedimiento para estimar el volumen del sólido.



CONTENIDO ▪
El método de las capas ▪
Comparación del método de los discos y el método de las capas ▪

6.3 Volumen: el método de las capas

El método de las capas

Vamos a presentar un método alternativo para calcular el volumen de sólidos de revolución, conocido como **método de las capas** porque utiliza capas cilíndricas. Más adelante lo compararemos con el método de los discos.

Para empezar, consideremos el rectángulo representativo de la Figura 6.28, de anchura w y altura h, y donde p denota la distancia del centro del rectángulo al eje de revolución. Al girar este rectángulo en torno a su eje de revolución, forma una capa cilíndrica (un tubo) de espesor w. Para calcular el volumen de esa capa, consideremos dos cilindros. El radio del mayor corresponde al radio

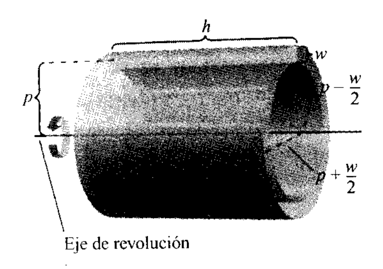


FIGURA 6.28

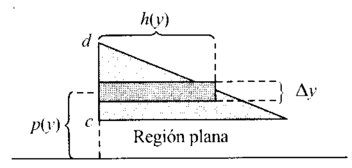
externo de la capa y el del menor al radio interno. Como p es el radio medio de la capa, sabemos que el radio exterior es $p + (w/2)$ y el interior $p - (w/2)$.

$$p + \frac{w}{2} \qquad \text{Radio exterior}$$

$$p - \frac{w}{2} \qquad \text{Radio interior}$$

Así pues, el volumen de la capa es

$$\begin{aligned}\text{Volumen de la capa} &= (\text{volumen del cilindro}) - (\text{volumen del hueco})\\ &= \pi\left(p + \frac{w}{2}\right)^2 h - \pi\left(p - \frac{w}{2}\right)^2 h\\ &= 2\pi phw\\ &= 2\pi\ (\text{radio medio})(\text{altura})(\text{espesor})\end{aligned}$$



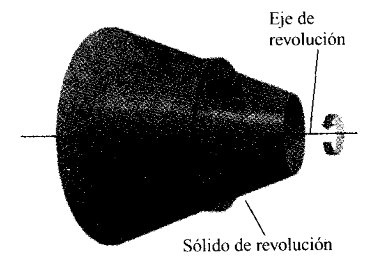


FIGURA 6.29

Podemos usar esta fórmula para hallar el volumen de un sólido de revolución. Supongamos que la región plana de la Figura 6.29 gira en torno a una recta y genera el sólido indicado. Si consideramos un rectángulo horizontal de anchura Δy, cuando la región plana gira alrededor de una recta paralela al eje x, el rectángulo genera una capa representativa de volumen

$$\boxed{\Delta V = 2\pi[p(y)h(y)]\Delta y}$$

Podemos aproximar el volumen del sólido por n de tales capas de espesor Δy, altura $h(y_i)$ y radio medio $p(y_i)$.

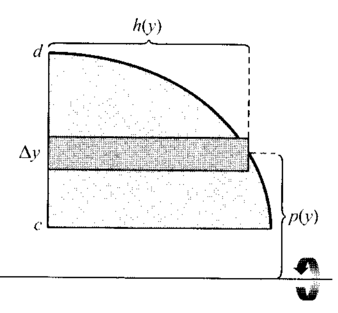
$$\text{Volumen del sólido} \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi[p(y_i)h(y_i)]\ \Delta y = 2\pi \sum_{i=1}^{n} [p(y_i)h(y_i)]\ \Delta y$$

Esta aproximación parece ir mejorando al hacer $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Por tanto, definimos el volumen del sólido como

$$\begin{aligned}\text{Volumen del sólido} &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} [p(y_i)h(y_i)]\ \Delta y\\ &= 2\pi \int_c^d [p(y)h(y)]\ dy\end{aligned}$$

EL MÉTODO DE LAS CAPAS **Para hallar el volumen V de un sólido de revolución por el método de las capas, debe usarse una de las fórmulas siguientes, como ilustra la Figura 6.30.**

Eje de giro horizontal	***Eje de giro vertical***
$V = 2\pi \int_c^d p(y)h(y)\ dy$	$V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\ dx$



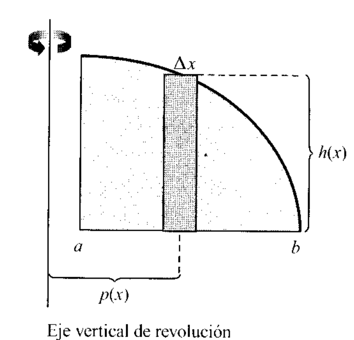


FIGURA 6.30

EJEMPLO 1 Cálculo de un volumen por el método de las capas

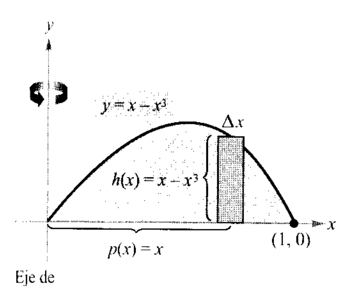


FIGURA 6.31

Calcular el volumen del sólido de revolución generado al girar, en torno al eje y, la región acotada por $y = x - x^3$ y el eje x ($0 \leqslant x \leqslant 1$).

Solución: Puesto que el eje de revolución es vertical, tomamos un rectángulo representativo vertical (véase Figura 6.31). La anchura Δx indica que la variable de integración es x. La distancia del centro del rectángulo al eje de giro es $p(x) = x$, y la altura del rectángulo es $h(x) = x - x^3$. Como x varía entre 0 y 1, el volumen del sólido es

$$
\begin{aligned}
V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\,dx &= 2\pi \int_0^1 x(x - x^3)\,dx \\
&= 2\pi \int_0^1 (-x^4 + x^2)\,dx \\
&= 2\pi \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\
&= 2\pi \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 0 - 0 \right) \\
&= \frac{4\pi}{15}
\end{aligned}
$$

□

EJEMPLO 2 Cálculo de un volumen por el método de las capas

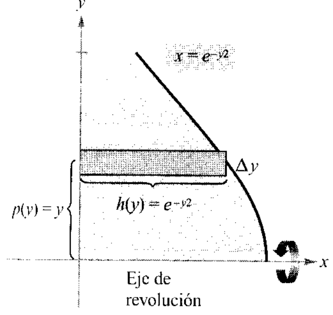


FIGURA 6.32

Calcular el volumen del sólido de revolución generado al girar, en torno al eje x, la región acotada por la gráfica de $x = e^{-y^2}$ y el eje y ($0 \leqslant y \leqslant 1$).

Solución: Puesto que el eje de revolución es horizontal, tomamos un rectángulo representativo horizontal (véase Figura 6.32). La anchura Δy indica que la variable de integración es y. La distancia del centro del rectángulo al eje de giro es $p(y) = y$, y la altura del rectángulo es $h(y) = e^{-y^2}$. Como y varía entre 0 y 1, el volumen del sólido es

$$V = 2\pi\int_c^d p(y)h(y)\,dy = 2\pi\int_0^1 ye^{-y^2}\,dy$$

$$= -\pi\left[e^{-y^2}\right]_0^1$$

$$= \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$\approx 1{,}986$$ □

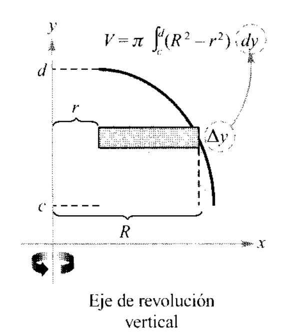
Nota. Para apreciar la ventaja del método de las capas en el Ejemplo 2, despejamos y en la ecuación $x = e^{-y^2}$.

$$y = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1/e \\ \sqrt{-\ln x} & 1/e < x \leqslant 1 \end{cases}$$

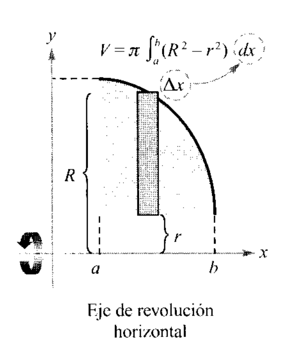
Use esta expresión para calcular el volumen del sólido por el método de los discos.

Comparación del método de los discos y el método de las capas

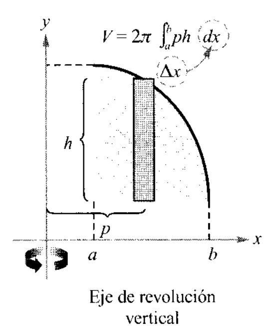
Los dos métodos se distinguen entre sí porque en el de los discos el rectángulo representativo es siempre *perpendicular* al eje de giro, mientras que en el de las capas es siempre *paralelo* al eje de giro, como muestra la Figura 6.33.



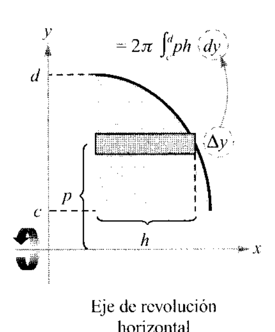
Eje de revolución vertical



Eje de revolución horizontal



Eje de revolución vertical



Eje de revolución horizontal

Método de los discos: el rectángulo representativo es perpendicular al eje de giro

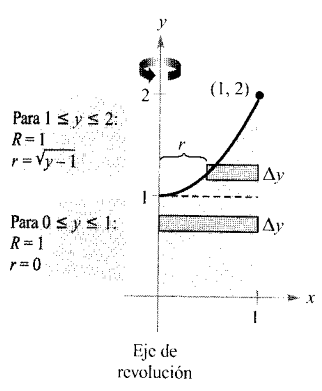
Método de las capas: el rectángulo representativo es paralelo al eje de giro

FIGURA 6.33

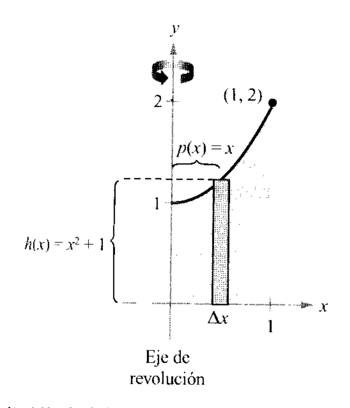
Según el caso, un método es más conveniente que el otro. El próximo ejemplo ilustra una situación en la que es preferible el método de las capas.

EJEMPLO 3 Preferible el método de las capas

Calcular el volumen del sólido generado al girar, en torno del eje y, la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, y $x = 1$.



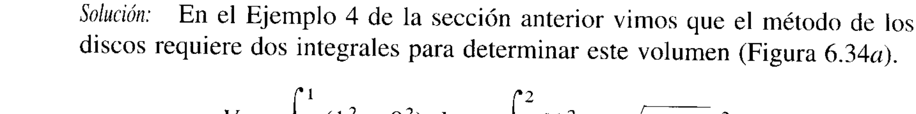
a) Método de los discos



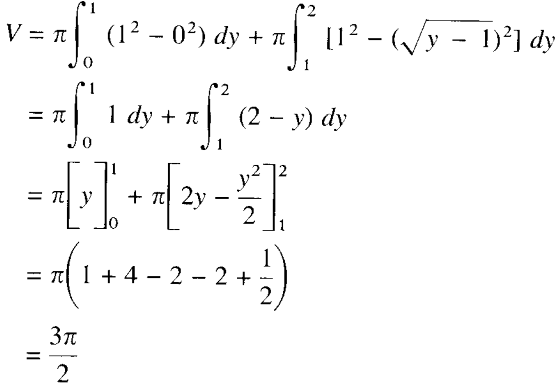
b) Método de las capas

FIGURA 6.34

PARA MÁS INFORMACIÓN
Acerca de los métodos de discos y de capas, véase el artículo «The Disc and Shell Method» de Charles A. Cable en *The American Mathematical Monthly*, febrero 1984.



Solución: En el Ejemplo 4 de la sección anterior vimos que el método de los discos requiere dos integrales para determinar este volumen (Figura 6.34*a*).



$$V = \pi\int_0^1 (1^2 - 0^2)\,dy + \pi\int_1^2 [1^2 - (\sqrt{y-1})^2]\,dy$$
$$= \pi\int_0^1 1\,dy + \pi\int_1^2 (2-y)\,dy$$
$$= \pi\Big[y\Big]_0^1 + \pi\Big[2y - \frac{y^2}{2}\Big]_1^2$$
$$= \pi\left(1 + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{3\pi}{2}$$

En la Figura 6.34*b* observamos que el de las capas sólo requiere una integral.

$$V = 2\pi\int_a^b p(x)h(x)\,dx$$
$$= 2\pi\int_0^1 x(x^2+1)\,dx$$
$$= 2\pi\Big[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\Big]_0^1$$
$$= 2\pi\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$= \frac{3\pi}{2}$$ □

Si la región del Ejemplo 3 se hiciese girar en torno de la recta vertical $x = 1$, el sólido resultante ¿tendría volumen mayor o menor que el sólido del Ejemplo 3? Sin integrar, parece lógico conjeturar que sería menor, ya que una porción más grande de la región que gira queda más cerca del nuevo eje de revolución. Con el fin de confirmar esta sospecha, intente calcular la siguiente integral, que da el volumen del sólido en esta nueva situación.

$$V = 2\pi\int_0^1 (1-x)(x^2+1)\,dx \qquad p(x) = 1 - x$$

EJEMPLO 4 Volumen de un pontón

El pontón de la Figura 6.35 ha sido diseñado haciendo girar, en torno del eje x, la gráfica de

$$y = 1 - \frac{x^2}{16}, \qquad -4 \leqslant x \leqslant 4$$

donde x e y se miden en pies. Calcular el volumen del pontón.

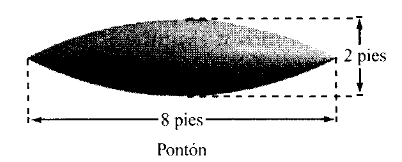
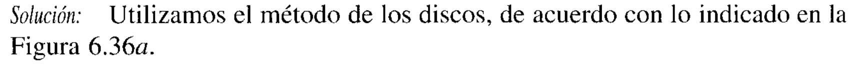


FIGURA 6.35



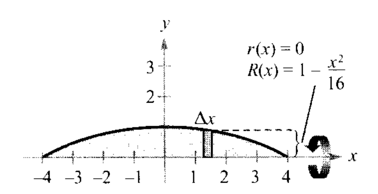
Solución: Utilizamos el método de los discos, de acuerdo con lo indicado en la Figura 6.36*a*.

$$V = \pi \int_{-4}^{4} \left(1 - \frac{x^2}{16}\right)^2 dx$$

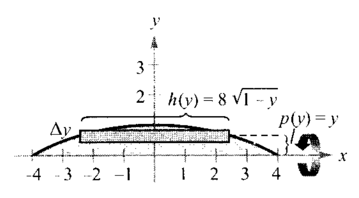
$$= \pi \int_{-4}^{4} \left(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{256}\right) dx$$

$$= \pi \left[x - \frac{x^3}{24} + \frac{x^5}{1.280} \right]_{-4}^{4}$$

$$= \frac{64\pi}{15} \approx 13{,}4 \text{ pies cúbicos}$$



a) Método de los discos



b) Método de las capas

FIGURA 6.36

Escriba la integral del volumen según el método de las capas, usando la Figura 6.36*b*. La integral ¿parece más complicada? □

Al aplicar el método de los discos en el Ejemplo 4 hemos tenido que despejar x en términos de y en la ecuación $y = 1 - (x^2/16)$. A veces, despejar x es muy difícil, por no decir imposible. En tales casos debe usarse un rectángulo vertical, de anchura Δx, haciendo que sea x la variable de integración. La posición, horizontal o vertical, del eje de giro determina entonces el método a emplear, como ilustra el próximo ejemplo.

EJEMPLO 5 Necesario el método de las capas

Calcular el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^3 + x + 1$, $y = 1$, y $x = 1$ en torno a la recta $x = 2$ (véase Figura 6.37).

Solución: En la ecuación no es fácil despejar x en términos de y (véase la discusión al final de la Sección 3.8). Por tanto, nos interesa x como variable de integración, así que tomamos un rectángulo representativo vertical. Como el rectángulo es paralelo al eje de revolución, usamos el método de las capas.

$$V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\, dx = 2\pi \int_0^1 (2 - x)(x^3 + x + 1 - 1)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (-x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x)\, dx$$

$$= 2\pi \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 \right)$$

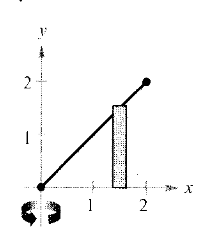
$$= \frac{29\pi}{15}$$ □

FIGURA 6.37

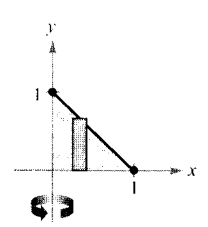
Ejercicios de la Sección 6.3

En los Ejercicios 1-12, usar el método de capas para formular y calcular la integral que da el volumen del sólido generado al hacer girar la región en torno al eje y.

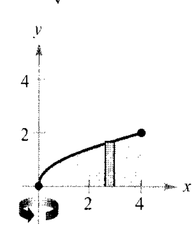
1. $y = x$



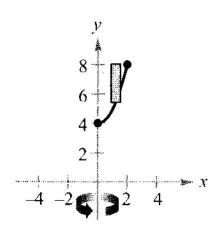
2. $y = 1 - x$



3. $y = \sqrt{x}$



4. $y = x^2 + 4$



5. $y = x^2,\ y = 0,\ x = 2$

6. $y = x^2,\ y = 0,\ x = 4$

7. $y = x^2,\ y = 4x - x^2$

8. $y = 4 - x^2,\ y = 0$

9. $y = 4x - x^2,\ x = 0,\ y = 4$

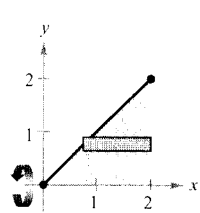
10. $y = 2x,\ y = 4,\ x = 0$

11. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$

12. $y = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},\ y = 0,\ x = 0,\ x = \pi$

En los Ejercicios 13-16, usar el método de capas para escribir y calcular la integral que da el volumen del sólido generado al hacer girar la región en torno al eje x.

13. $y = x$



14. $y = 2 - x$

15. $y = \dfrac{1}{x},\ x = 1,\ x = 2,\ y = 0$

16. $x + y^2 = 9,\ x = 0$

En los Ejercicios 17-20, calcular, por el método de las capas, el volumen del sólido generado al girar la región plana dada alrededor de la recta que se especifica.

17. $y = x^2,\ y = 4x - x^2$, en torno a la recta $x = 4$

18. $y = x^2,\ y = 4x - x^2$, en torno a la recta $x = 2$

19. $y = 4x - x^2,\ y = 0$, en torno a la recta $x = 5$

20. $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 4$, en torno a la recta $x = 6$

En los Ejercicios 21-24, usar el método de los discos o el de las capas para hallar el volumen del sólido generado, al girar en torno a la recta dada, la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

21. $y = x^3,\ y = 0,\ x = 2$
a) el eje x *b)* el eje y *c)* la recta $x = 4$

22. $y = \dfrac{1}{x^2},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4$
a) el eje x *b)* el eje y *c)* la recta $y = 1$

23. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2},\ x = 0,\ y = 0$
a) el eje x *b)* el eje y *c)* la recta $x = a$

24. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},\ a > 0$ (hipocicloide)
a) el eje x *b)* el eje y

En los Ejercicios 25-28, usar la calculadora para *a)* representar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, y *b)* aproximar el volumen del sólido que generan por revolución en torno al eje y.

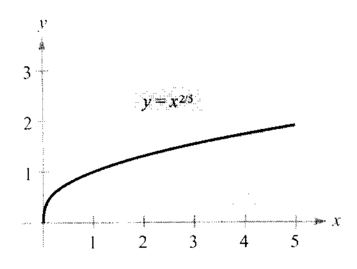
25. $x^{4/3} + y^{4/3} = 1,\ x = 0,\ y = 0$, primer cuadrante

26. $y = \sqrt{1 - x^3},\ y = 0,\ x = 0$

27. $y = \sqrt[3]{(x - 2)^2(x - 6)^2},\ y = 0,\ x = 2,\ x = 6$

28. $y = \dfrac{2}{1 + e^{1/x}},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 3$

29. ***Para pensar*** Ordenar de menor a mayor los volúmenes de los sólidos generados al hacer girar la región de la figura en torno a *a)* el eje x, *b)* el eje y, *c)* la recta $x = 5$. Explicar la respuesta.



30. Confirmar los resultados del Ejercicio 29 mediante integración, siendo la región la comprendida entre las gráficas de $y = x^{2/5}$, $y = 0$, y $x = 5$.

Para pensar En los Ejercicios 31 y 32, averiguar qué valor aproxima mejor el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar en torno al eje y. (Elegir atendiendo a un croquis de la región, no a la realización de cálculos.)

31. $y = 2e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$

a) $\frac{3}{2}$ *b*) -2 *c*) 4 *d*) 7,5 *e*) 15

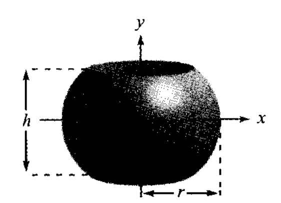
32. $y = \operatorname{tg} x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$

a) 3,5 *b*) $-\frac{9}{4}$ *c*) 8 *d*) 10 *e*) 1

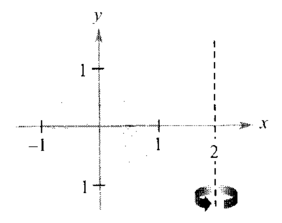
33. ***Diseño industrial*** Un sólido se genera haciendo girar la región acotada por $y = \frac{1}{2}x^2$ e $y = 2$ alrededor del eje y. Se perfora un orificio circular, centrado en el eje de giro, de modo que el sólido pierde un cuarto de su volumen. ¿Qué diámetro tiene el orificio?

34. ***Diseño industrial*** Un sólido se genera haciendo girar la región acotada por $y = \sqrt{9 - x^2}$ e $y = 0$ alrededor del eje y. Se perfora un orificio circular, centrado en el eje de revolución, de manera tal que el sólido pierde un tercio de su volumen. ¿Qué diámetro tiene el orificio?

35. Se perfora una esfera de radio r (véase figura) de modo que la altura del anillo esférico que queda tiene altura h. Probar que el volumen del anillo es $V = \pi h^3/6$.



36. ***Volumen de un toro*** Un toro se forma haciendo girar la región acotada por el círculo $x^2 + y^2 = 1$ en torno a la recta $x = 2$ (véase figura). Calcular el volumen de la «rosquilla» resultante. (*Ayuda:* La integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$ da el área de un semicírculo.)



37. ***Volumen de un toro*** Rehacer el Ejercicio 36 para el toro generado por la región acotada por el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ al girar en torno a la recta $x = R$, donde $r < R$.

38. **Volumen de un casquete esférico** Se corta una esfera de radio r por un plano para formar un casquete esférico de altura h. Probar que su volumen es $\frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$

Para pensar En los Ejercicios 39 y 40, dar un argumento geométrico que explique por qué las integrales tienen el mismo valor.

39. $\pi \int_1^5 (x - 1)\, dx$, $\quad 2\pi \int_0^2 y[5 - (y^2 + 1)]\, dy$

40. $\pi \int_1^2 [16 - (2y)^2]\, dy$, $\quad 2\pi \int_0^4 x\left(\frac{x}{2}\right) dx$

41. ***Para pensar*** Emparejar cada integral con el sólido cuyo volumen representa y especificar las dimensiones de cada sólido.

a) Cono circular recto *b*) Toro *c*) Esfera
d) Cilindro circular recto *e*) Elipsoide

i) $2\pi \int_0^r hx\, dx$

ii) $2\pi \int_0^r hx\left(1 - \frac{x}{r}\right) dx$

iii) $2\pi \int_0^r 2x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$

iv) $2\pi \int_0^b 2ax \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}\, dx$

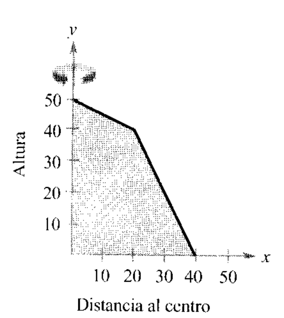
v) $2\pi \int_{-r}^{r} (R - x)(2\sqrt{r^2 - x^2})\, dx$

42. ***Volumen de un cobertizo*** Un cobertizo tiene base circular de 80 pies de diámetro (véase figura en la página siguiente). Partiendo de su centro, se ha medido la altura interior cada 10 pies, con el resultado recogido en la tabla.

x	0	10	20	30	40
Altura	50	45	40	20	0

a) Estimar el volumen del cobertizo mediante la regla de Simpson.

b) El techo consta de dos segmentos rectos. Hallar sus ecuaciones y calcular el volumen por integración.



43. ***Un modelo matemático*** El estanque de la figura es aproximadamente circular, con un diámetro de 400 pies. Partiendo de su centro se ha medido su profundidad cada 25 pies. La tabla da cuenta de los resultados.

x	0	25	50	75	100
Profundidad	20	19	19	17	15

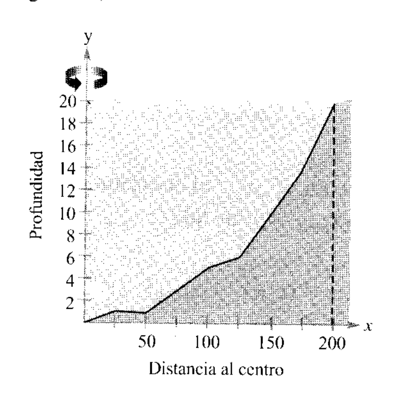
x	125	150	175	200
Profundidad	14	10	6	0

a) Estimar su volumen mediante la regla de Simpson.

b) Usar la calculadora para hallar un modelo cuadrático para esos datos. Representar en ella los datos y el modelo.

c) Usar integración en la calculadora y el modelo precedente para estimar el volumen del estanque.

d) Con el resultado de *c*), aproximar cuántos galones de agua contiene el estanque (1 pie cúbico = 7,48 galones).

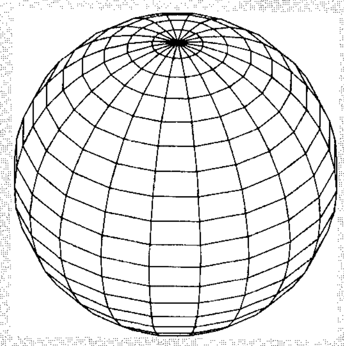


PROYECTO PARA LA SECCIÓN

La no esfericidad de Saturno Saturno es el menos esférico de los nueve planetas de nuestro sistema solar. Su radio ecuatorial mide 60.268 km y su radio polar 54.364 km.

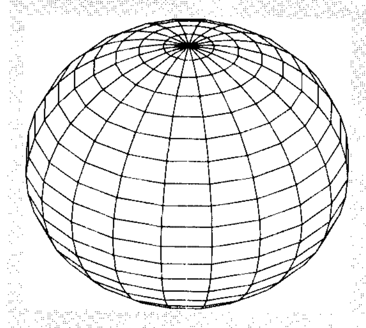
a) Hallar la razón entre los volúmenes de la esfera y del elipsoide achatado de la figura de más abajo.

b) Si un planeta fuese esférico y tuviese el mismo volumen que Saturno, ¿cuál sería su radio?



Modelo de un «Saturno esférico» generado por un ordenador, cuyos radios ecuatorial y polar son iguales. La ecuación de la sección que pasa por el polo es

$$x^2 + y^2 = 60.268^2$$



Modelo de un «Saturno achatado», cuyo radio ecuatorial es mayor que el radio polar. La ecuación de la sección que pasa por el polo es

$$\frac{x^2}{60.268^2} + \frac{y^2}{54.364^2} = 1$$

6.4 Longitud de arco y superficies de revolución



CHRISTIAN HUYGENS (1629-1695)

El matemático holandés Christian Huygens, inventor del reloj de péndulo, y el matemático escocés James Gregory (1638-1675), contribuyeron decisivamente al problema de hallar la longitud de arco de una curva rectificable.

Longitud de arco

En esta sección vamos a utilizar la integración para calcular longitudes de arco de curvas planas y áreas de superficies de revolución. En ambos casos, aproximaremos un arco (una porción de curva) por segmentos de recta cuya longitud viene dada por la conocida fórmula de la distancia, a saber,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Una curva se llama **rectificable** si tiene longitud finita. Veremos que una condición suficiente para que la gráfica de una función f, entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, sea rectificable es que f' sea continua en $[a, b]$. De una tal función se dice que es **continuamente derivable** en $[a, b]$ y que su gráfica en el intervalo $[a, b]$ es una **curva suave**.

Sea $y = f(x)$ una función continuamente derivable en $[a, b]$. Podemos aproximar su gráfica por medio de n segmentos rectos con puntos terminales determinados por la partición

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

como muestra la Figura 6.38. Haciendo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, se puede aproximar la longitud de la gráfica por

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,(\Delta x_i)$$

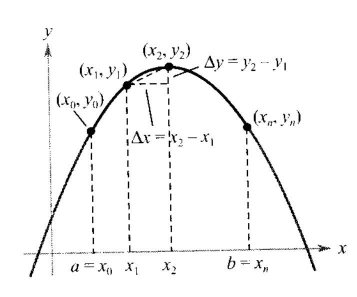
Esta aproximación mejora más y más al hacer $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Por consiguiente, definimos la longitud de la gráfica como

$$s = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,(\Delta x_i)$$

Puesto que $f'(x)$ existe en todo x de (x_{i-1}, x_i), el teorema del valor medio asegura la existencia de algún c_i en (x_{i-1}, x_i) tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(c_i)$$



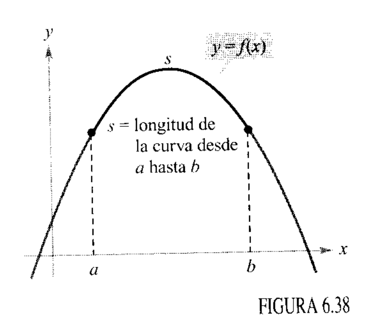


FIGURA 6.38

Como f' es continua en $[a, b]$, se sigue que $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ también es continua, y por tanto integrable, en $[a, b]$. En consecuencia,

$$s = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,(\Delta x_i)$$
$$= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Diremos que s es la **longitud de arco** de (la gráfica de) f entre a y b.

DEFINICIÓN DE LA LONGITUD DE ARCO

Si la gráfica de $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es una curva suave, la longitud de arco de f entre a y b es

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Análogamente, para una curva suave dada por $x = g(y)$, la longitud de arco entre c y d es

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$$

Aplicando la definición a un segmento de recta se recupera el resultado usual, como muestra el próximo ejemplo.

EJEMPLO 1 Longitud de arco de un segmento de recta

Calcular la longitud de arco entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de la gráfica de $f(x) = mx + b$ (Figura 6.39).

Solución: Puesto que

$$m = f'(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

se sigue que

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2}\, dx$$
$$= \left[\sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}}\,(x)\right]_{x_1}^{x_2}$$
$$= \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}}\,(x_2 - x_1)$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

que es la fórmula conocida de la distancia entre dos puntos en el plano. □

FIGURA 6.39
La longitud de arco de la gráfica de f entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es la fórmula usual de la distancia entre dos puntos.

Las integrales que dan las longitudes de arco son, por lo general, muy difíciles de calcular exactamente. En esta sección presentamos varios ejemplos. En el próximo capítulo, con técnicas de integración más avanzadas, seremos capaces de enfrentarnos a problemas de longitud de arco más difíciles. Entretanto, recuerde que siempre cabe el recurso de un programa numérico en la calculadora para estimar una longitud de arco. Por ejemplo, intente aproximar así las longitudes de arco de los Ejemplos 2 y 3.

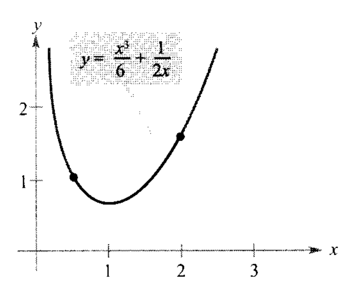


FIGURA 6.40
La longitud de arco de la gráfica de y en $[\frac{1}{2}, 2]$ es $\frac{33}{16}$.

EJEMPLO 2 Cálculo de la longitud de arco

Calcular la longitud de arco de la gráfica de $y = x^3/6 + 1/(2x)$ en el intervalo $[\frac{1}{2}, 2]$.

Solución: Al ser

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{6} - \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$$

se tiene para la longitud de arco

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{1/2}^2 \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\right]^2}\, dx \\ &= \int_{1/2}^2 \sqrt{\frac{1}{4}\left(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}\right)}\, dx \\ &= \int_{1/2}^2 \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}\right]_{1/2}^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{13}{6} + \frac{47}{24}\right) = \frac{33}{16} \end{aligned}$$

□

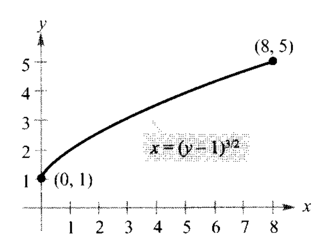


FIGURA 6.41
La longitud de arco de la gráfica de y en [0, 8] es aproximadamente 9,0734.

EJEMPLO 3 Cálculo de la longitud de arco

Calcular la longitud de arco de la gráfica de $(y - 1)^3 = x^2$ en el intervalo [0, 8] (Figura 6.41).

Solución: Empezamos despejando x en términos de y: $x = \pm(y - 1)^{3/2}$. Escogiendo el valor positivo de x vemos que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}(y - 1)^{1/2}$$

El intervalo [0, 8] de la variable x corresponde al intervalo [1, 5] de la variable y, luego, la longitud de arco viene dada por

$$
\begin{aligned}
s &= \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_1^5 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2}(y-1)^{3/2}\right]^2}\, dy \\
&= \int_1^5 \sqrt{\frac{9}{4}y - \frac{5}{4}}\, dy \\
&= \frac{1}{2}\int_1^5 \sqrt{9y - 5}\, dy \\
&= \frac{1}{18}\left[\frac{(9y-5)^{3/2}}{3/2}\right]_1^5 \\
&= \frac{1}{27}(40^{3/2} - 4^{3/2}) \\
&\approx 9{,}0734
\end{aligned}
$$

□

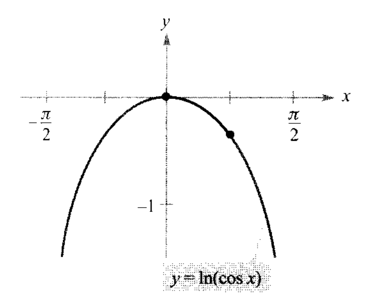


FIGURA 6.42
La longitud de arco de la gráfica de y en $[0, \frac{\pi}{4}]$ es aproximadamente 0,8814.

EJEMPLO 4 Cálculo de la longitud de arco

Calcular la longitud de arco de la gráfica de $y = \ln(\cos x)$, entre $x = 0$ y $x = \pi/4$ (véase Figura 6.42).

Solución: Al ser

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$$

se tiene para la longitud de arco

$$
\begin{aligned}
s &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}\, dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x}\, dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \sec x\, dx \\
&= \Big[\ln|\sec x + \operatorname{tg} x|\Big]_0^{\pi/4} \\
&= \ln(\sqrt{2} + 1) - \ln 1 \\
&\approx 0{,}8814
\end{aligned}
$$

□

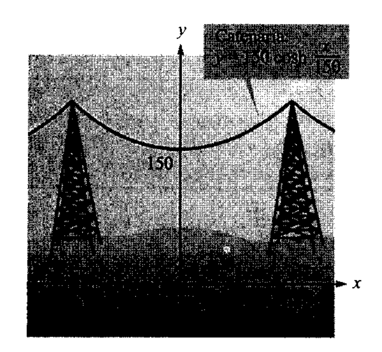


FIGURA 6.43
La longitud de arco del cable es aproximadamente 215 pies.

EJEMPLO 5 Longitud de un cable

Un cable eléctrico que cuelga de dos torres distantes 200 pies (Figura 6.43) adopta la forma de una catenaria de ecuación

$$y = 75(e^{x/150} + e^{-x/150}) = 150 \cosh \frac{x}{150}$$

Calcular la longitud del cable entre esas dos torres.

Solución: Como $y' = \frac{1}{2}(e^{x/150} - e^{-x/150})$, resulta

$$(y')^2 = \frac{1}{4}(e^{x/75} - 2 + e^{-x/75})$$

y

$$1 + (y')^2 = \frac{1}{4}(e^{x/75} + 2 + e^{-x/75}) = \left[\frac{1}{2}(e^{x/150} + e^{-x/150})\right]^2$$

Por tanto, la longitud de arco del cable es

$$\begin{aligned} s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx &= \frac{1}{2}\int_{-100}^{100} (e^{x/150} + e^{-x/150})\, dx \\ &= 75\left[e^{x/150} - e^{-x/150}\right]_{-100}^{100} \\ &= 150(e^{2/3} - e^{-2/3}) \\ &\approx 215 \text{ pies} \end{aligned}$$

□

Área de una superficie de revolución

En las Secciones 6.2 y 6.3 hemos utilizado la integración para calcular el volumen de sólidos de revolución. Ahora la aplicaremos al cálculo del área de superficies de revolución.

DEFINICIÓN DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN Si se hace girar la gráfica de una función continua en torno a una recta, la superficie resultante es una **superficie de revolución**.

La fórmula para el área de una superficie de revolución se va a deducir de la fórmula para el área lateral de un tronco de cono. Consideremos el segmento recto de la Figura 6.44, donde L es la longitud del segmento, r_1 el radio de giro de su extremo izquierdo y r_2 el de su extremo derecho. Al girar alrededor de su eje de revolución, el segmento genera un tronco de cono circular recto, con

$$S = 2\pi rL \qquad \text{Área lateral del tronco de cono}$$

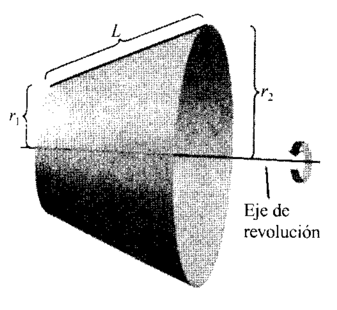


FIGURA 6.44

donde

$$r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \qquad \text{Radio medio del tronco de cono}$$

(En el Ejercicio 49 se pide verificar la fórmula para S.)

Supongamos que la gráfica de una función f, con derivada continua en $[a, b]$, gira en torno al eje x, generando una superficie de revolución (véase Figura 6.45). Sea Δ una partición de $[a, b]$ en subintervalos de anchura Δx_i. Entonces, el segmento de longitud

$$\Delta L_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

genera un tronco de cono. Sea r_i su radio medio. Por el teorema del valor intermedio, existe un punto d_i (en el i-ésimo subintervalo) tal que $r_i = f(d_i)$. El área lateral ΔS_i del tronco de cono es

$$\begin{aligned}\Delta S_i &= 2\pi r_i \, \Delta L_i \\ &= 2\pi f(d_i)\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \\ &= 2\pi f(d_i)\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i\end{aligned}$$

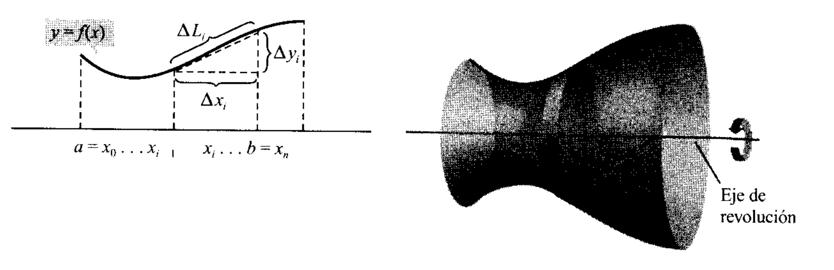
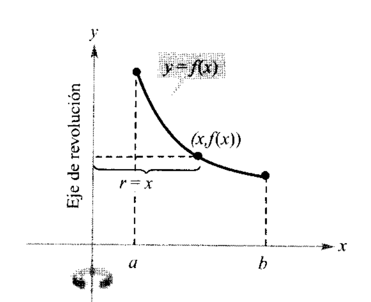


FIGURA 6.45



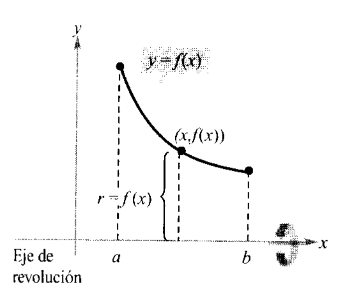


FIGURA 6.46

De acuerdo con el teorema del valor medio, existe un punto c_i en (x_{i-1}, x_i) tal que

$$f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$$

Por tanto, $\Delta S_i = 2\pi f(d_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i$, y el área total de la superficie puede ser aproximada por

$$S \approx 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i$$

Se puede demostrar que el límite del miembro de la derecha cuando $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$ es

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

De manera análoga, si la gráfica de f gira en torno al eje y se obtiene

$$S = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

En ambas fórmulas podemos interpretar los productos $2\pi f(x)$ y $2\pi x$ como la circunferencia del círculo trazado por el punto (x, y) de la gráfica de f al girar en torno al eje x o al eje y (Figura 6.46). En un caso el radio de giro es $r = f(x)$ y en el otro es $r = x$. Además, adaptando adecuadamente r se puede generalizar la fórmula para el área a cualquier eje de revolución horizontal o vertical, como recoge la próxima definición.

DEFINICIÓN DEL ÁREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Sea $y = f(x)$ una función con derivada continua en $[a, b]$. El área S de la superficie de revolución generada al girar la gráfica de f en torno a un eje horizontal o vertical es

$$S = 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \qquad y \text{ es función de } x$$

donde $r(x)$ denota la distancia entre la gráfica de f y el eje de revolución. Si $x = g(y)$ en el intervalo $[c, d]$, entonces el área de la superficie generada es

$$S = 2\pi \int_c^d r(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy \qquad x \text{ es función de } y$$

donde $r(y)$ denota la distancia entre la gráfica de g y el eje de revolución.

Las fórmulas que aparecen en esta definición se escriben con frecuencia de esta otra manera:

$$S = 2\pi \int_a^b r(x)\, ds \qquad y \text{ es función de } x$$

y

$$S = 2\pi \int_c^d r(y)\, ds \qquad x \text{ es función de } y$$

donde $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$ y $ds = \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$, respectivamente.

EJEMPLO 6 Área de una superficie de revolución

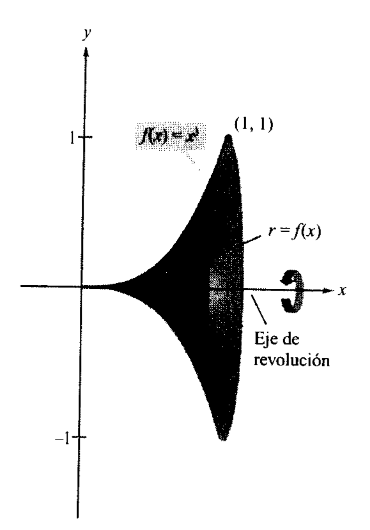


FIGURA 6.47

Calcular el área de la superficie de revolución formada al hacer girar la gráfica de $f(x) = x^3$ en el intervalo [0, 1], en torno al eje x (véase Figura 6.47).

Solución: La distancia entre la gráfica de f y el eje x es $r(x) = f(x)$. Como además $f'(x) = 3x^2$, el área pedida es

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx \\
&= 2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1 + (3x^2)^2}\,dx \\
&= \frac{2\pi}{36}\int_0^1 (36x^3)(1 + 9x^4)^{1/2}\,dx \\
&= \frac{\pi}{18}\left[\frac{(1 + 9x^4)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{27}(10^{3/2} - 1) \\
&\approx 3{,}563
\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 7 Área de una superficie de revolución

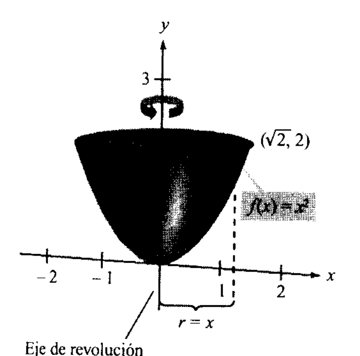
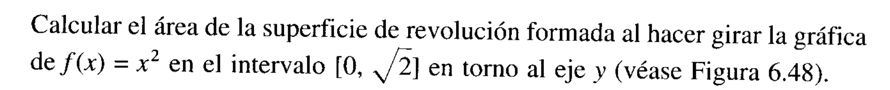


FIGURA 6.48



Calcular el área de la superficie de revolución formada al hacer girar la gráfica de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, \sqrt{2}]$ en torno al eje y (véase Figura 6.48).

Solución: La distancia entre la gráfica de f y el eje y es $r(x) = x$. Y como $f'(x) = 2x$, el área de la superficie de revolución dada es

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1 + (2x)^2}\,dx \\
&= \frac{2\pi}{8}\int_0^{\sqrt{2}} (1 + 4x^2)^{1/2}(8x)\,dx \\
&= \frac{\pi}{4}\left[\frac{(1 + 4x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\pi}{6}[(1 + 8)^{3/2} - 1] \\
&\approx \frac{13\pi}{3}
\end{aligned}$$

□

Ejercicios de la Sección 6.4

En los Ejercicios 1 y 2, hallar la distancia entre los puntos usando *a*) la fórmula de la distancia y *b*) integración.

1. $(0, 0), (5, 12)$ **2.** $(1, 2), (7, 10)$

En los Ejercicios 3-8, calcular la longitud de arco de la gráfica en el intervalo que se indica.

3. $y = \frac{3}{2}x^{3/2} + 1$, $[0, 1]$ **4.** $y = x^{3/2} - 1$, $[0, 4]$

5. $y = \frac{3}{2}x^{3/2}$, $[1, 8]$ **6.** $y = \frac{x^5}{10} + \frac{1}{6x^3}$, $[1, 2]$

7. $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}$, $[1, 2]$ **8.** $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $[0, 2]$

En los Ejercicios 9-18, *a*) representar la función en el intervalo dado, *b*) escribir una integral para la longitud de arco de la curva en ese intervalo y observar que la integral no se puede calcular mediante las técnicas estudiadas hasta ahora, y *c*) usar integración en la calculadora para aproximar el valor de la longitud de arco.

	Función	*Intervalo*
9.	$y = 4 - x^2$	$0 \leqslant x \leqslant 2$
10.	$y = x^2 + x - 2$	$-2 \leqslant x \leqslant 1$
11.	$y = \frac{1}{x}$	$1 \leqslant x \leqslant 3$
12.	$y = \frac{1}{x + 1}$	$0 \leqslant x \leqslant 1$
13.	$y = \operatorname{sen} x$	$0 \leqslant x \leqslant \pi$
14.	$y = \cos x$	$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$
15.	$x = e^{-y}$	$0 \leqslant y \leqslant 2$
16.	$y = \ln x$	$1 \leqslant x \leqslant 5$
17.	$y = 2 \operatorname{arctg} x$	$0 \leqslant x \leqslant 1$
18.	$x = \sqrt{36 - y^2}$	$0 \leqslant y \leqslant 3$

Aproximación En los Ejercicios 19 y 20, averiguar qué valor aproxima mejor la longitud de arco representada por la integral. (Basar la decisión en un dibujo del arco, no en la realización de cálculos.)

19. $$\int_0^2 \sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{x^2 + 1}\right)\right]^2}\, dx$$

a) 25 *b*) 5 *c*) 2 *d*) −4 *e*) 3

20. $$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x)\right]^2}\, dx$$

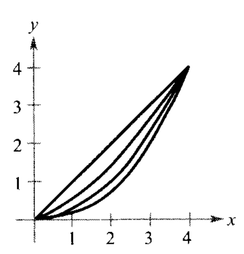
a) 3 *b*) −2 *c*) 4 *d*) $\frac{4\pi}{3}$ *e*) 1

Aproximación En los Ejercicios 21 y 22, estimar la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo $[0, 4]$ de cuatro maneras.

a) Usando la fórmula de la distancia para calcular la distancia entre los puntos terminales del segmento.
b) Usando la fórmula de la distancia para calcular las longitudes de los cuatro segmentos que conectan los puntos del arco con $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ y $x = 4$. Hallar la suma de esas cuatro longitudes.
c) Aplicar la regla de Simpson con $n = 10$.
d) Usar integración en la calculadora.

21. $f(x) = x^3$ **22.** $f(x) = (x^2 - 4)^2$

23. ***Para pensar*** La figura muestra las gráficas de $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{2}x^{3/2}$, $y_3 = \frac{1}{4}x^2$, e $y_4 = \frac{1}{8}x^{5/2}$ en el intervalo $[0, 4]$.
a) Identificar las funciones.
b) Ordenarlas por longitudes de arco crecientes.
c) Verificar la respuesta a *b*) aproximando cada longitud con tres decimales.



24. ***Para pensar*** Explicar por qué son iguales las dos integrales

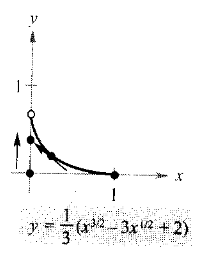
$$\int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

Verificarlo usando integración en la calculadora.

25. ***Longitud de persecución*** Un objeto parte del origen y se mueve hacia arriba por el eje y (véase figura en la página siguiente). Al mismo tiempo, un perseguidor parte del punto $(1, 0)$ y se mueve siempre en dirección al objeto. Si la velocidad del perseguidor es doble que la del objeto, la ecuación de la trayectoria es

$$y = \frac{1}{3}(x^{3/2} - 3x^{1/2} + 2)$$

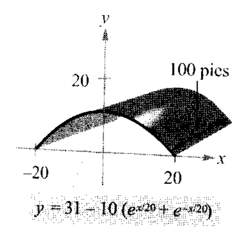
¿Qué distancia ha recorrido el objeto en el momento de ser capturado? Probar que el perseguidor recorre el doble.



26. ***Área de un techo*** El techo de la figura tiene 100 pies de largo, 40 de ancho y sus secciones son catenarias invertidas de ecuación

$$y = 31 - 10(e^{x/20} + e^{-x/20})$$

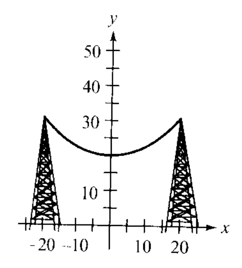
Hallar el área, en pies cuadrados, de ese techo.



27. ***Longitud de la catenaria*** Los hilos de un tendido eléctrico, suspendidos entre dos torres, adoptan forma de catenaria (véase figura), de ecuación

$$y = 20 \cosh \frac{x}{20}, \quad -20 \leqslant x \leqslant 20$$

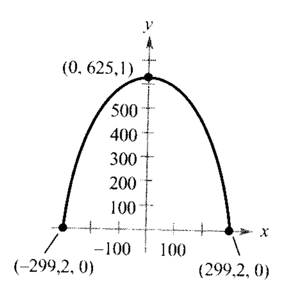
donde x e y se miden en metros. Calcular la longitud del cable suspendido entre dos torres que distan entre sí 40 metros.



28. ***Longitud del arco Gateway*** El arco Gateway de St. Louis, Missouri, está diseñado con el modelo

$$y = 693{,}8597 - 68{,}7672 \cosh 0{,}0100333x,$$
$$-299{,}2239 \leqslant x \leqslant 299{,}2239$$

(véase el proyecto para la Sección 5.10). Calcular la longitud de esta curva (véase figura).



29. Hallar la longitud de arco desde $(0, 3)$ hasta $[2, \sqrt{5}]$, en sentido de las agujas de un reloj, a lo largo del círculo $x^2 + y^2 = 9$.

30. Hallar la longitud de arco desde $(-3, 4)$ hasta $(4, 3)$, en sentido de las agujas de un reloj, a lo largo del círculo $x^2 + y^2 = 25$. Probar que el resultado es la cuarta parte de la longitud de la circunferencia de ese círculo.

En los Ejercicios 31-34, formular y calcular la integral que da el área de la superficie de revolución generada al girar la curva en torno del eje x.

31. $y = \frac{1}{3}x^3$, $[0, 3]$

32. $y = \sqrt{x}$, $[1, 4]$

33. $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, $[1, 2]$

34. $y = \frac{x}{2}$, $[0, 6]$

En los Ejercicios 35 y 36, formular y calcular la integral que da el área de la superficie de revolución generada al girar la curva en torno del eje y.

	Función	*Intervalo*
35.	$y = \sqrt[3]{x} + 2$	$[1, 8]$
37.	$y = 4 - x^2$	$[0, 2]$

En los Ejercicios 37 y 38, usar integración en la calculadora para estimar el área del sólido de revolución.

	Función	*Intervalo*
37.	$y = \operatorname{sen} x$ en torno al eje x	$[0, \pi]$
38.	$y = \ln x$ en torno al eje y	$[1, e]$

39. Un cono circular recto es generado haciendo girar la región acotada por $y = hx/r$, $y = h$ y $x = 0$ en torno al eje y. Comprobar que el área lateral del cono es

$$S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$

40. Se genera una esfera de radio r haciendo girar la gráfica de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ en torno al eje x. Verificar que el área de la esfera es $4\pi r^2$.

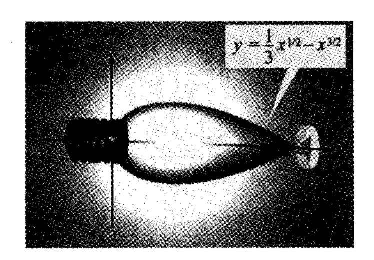
41. Hallar el área de la porción de esfera generada al girar en torno al eje y la gráfica de $y = \sqrt{9 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

42. Hallar el área de la porción de esfera generada al girar en torno al eje y la gráfica de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant a$, suponiendo que $a < r$.

43. ***Diseño de bombillas*** Una bombilla ornamental (véase figura) ha sido diseñada con la forma de la superficie de revolución obtenida al girar la gráfica de

$$y = \frac{1}{3}x^{1/2} - x^{3/2},\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$$

alrededor del eje x, donde x e y se miden en metros. Calcular su área y usar el resultado para estimar la cantidad de vidrio necesaria para construir la bombilla, si el espesor del vidrio es 0,015 pulgadas.



44. ***Un modelo matemático*** La circunferencia C, en pulgadas, de un florero se mide a intervalos de 3 pulgadas, partiendo de su base. Los resultados de las medidas se recogen en la tabla, donde y es la distancia vertical a la base, en pulgadas.

y	0	3	6	9	12	15	18
C	50	65,5	70	66	58	51	48

a) Estimar, con esos datos, el volumen del florero sumando los volúmenes de discos aproximantes.
b) Aproximar, con esos datos, el área lateral del florero sumando áreas de troncos de cono aproximantes.
c) Hallar, con ayuda de la calculadora, un modelo cúbico para los puntos (y, r), donde $r = C/(2\pi)$. Representar en ella los puntos y el modelo.
d) Usando ese modelo e integración en la calculadora, estimar el volumen y el área lateral del florero. Comparar los resultados con los de *a*) y *b*).

45. ***Proyecto individual*** Elegir un sólido de revolución de uso cotidiano. Medir sus radios en al menos siete puntos a lo largo de su eje. Estimar, con esos datos, el volumen y el área lateral del sólido.

46. Sea R la región acotada por $y = 1/x$, el eje x, $x = 1$ y $x = b$, con $b > 1$. Sea D el sólido generado cuando R gira en torno al eje x.
a) Calcular el volumen V de D.
b) Expresar el área lateral de D como una integral.
c) Probar que V tiende a un límite finito cuando $b \to \infty$.
d) Demostrar que ($S \to \infty$ cuando $b \to \infty$).

47. Sea f rectificable en el intervalo $[a, b]$ y denotemos

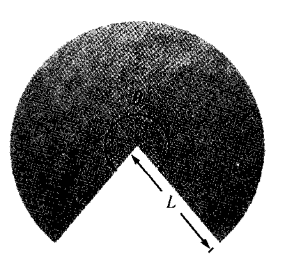
$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

a) Hallar $\frac{ds}{dx}$.
b) Hallar ds y $(ds)^2$.
c) Si $f(t) = t^{3/2}$, encontrar $s(x)$ en $[1, 3]$. ¿Qué es $s(2)$?

48. ***Para pensar*** Consideremos la ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
a) Representar en la calculadora la gráfica de esta ecuación.
b) Escribir la integral definida que da la longitud de arco de esa gráfica en el primer cuadrante.
c) Comparar el intervalo de integración en *b*) con el dominio del integrando. ¿Es posible calcular la integral definida? ¿Es posible calcularla aplicando la regla de Simpson? Explicar las respuestas. (Volveremos a este problema en la Sección 7.8.)

49. *a*) Dado un sector circular de radio L y ángulo central θ (véase figura), probar que su área viene dada por

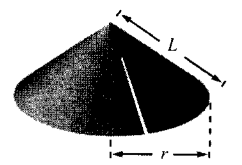
$$S = \frac{1}{2}L^2\theta$$



b) Al pegar los bordes rectos de ese sector circular se forma un cono circular recto (véase figura en la página siguiente) que tiene igual área que el sector. Probar que el área es

$$S = \pi r L$$

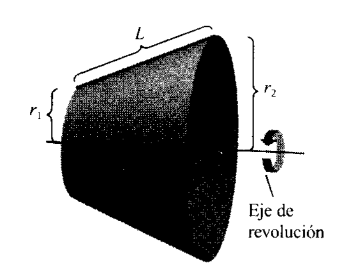
donde r denota el radio de la base del cono. (*Ayuda:* La longitud de arco del sector es igual a la circunferencia de la base del cono.)



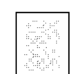
c) Usando el resultado de *b*) verificar que la fórmula para el área lateral de un tronco de cono de arista L y radios r_1, r_2 (véase figura) es

$$S = \pi(r_1 + r_2)L$$

(*Nota:* Hemos usado esta fórmula al desarrollar la integral que representa el área de una superficie de revolución.)



50. ***Redacción*** Lea el artículo «Arc Length, Area and the Arcsine Function» de Andrew M. Rockett en *Mathematics Magazine*, marzo 1983 y explique por escrito cómo se puede definir la función arcsen en términos de una longitud de arco.



6.5 Trabajo

CONTENIDO ▪
Trabajo realizado por una fuerza constante ▪
Trabajo realizado por una fuerza variable ▪

Trabajo realizado por una fuerza constante

El concepto de trabajo sirve a los científicos e ingenieros para conocer cuánta energía es necesaria en la ejecución de una cierta tarea. Por ejemplo, es útil saber el trabajo realizado cuando una grúa eleva una viga de hierro, al comprimir un muelle, al lanzar un cohete o cuando un camión transporta una carga.

En general, decimos que se realiza trabajo cuando una fuerza desplaza un objeto. Si la fuerza aplicada al objeto es *constante*, tenemos la siguiente definición de trabajo.

DEFINICIÓN DEL TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

Si un objeto es desplazado por una fuerza constante F una distancia D en la dirección de la fuerza, el trabajo W realizado por esa fuerza se define como $W = FD$.

Hay muchas clases de fuerzas, centrífuga, electromagnética o gravitatoria, por citar sólo algunos ejemplos. Se puede pensar en las fuerzas como algo que *empuja* o *atrae*, cambiando con ello el estado de reposo o de movimiento de un cuerpo. Para las fuerzas gravitatorias en la superficie terrestre es usual utilizar las unidades de medida correspondientes al peso de los objetos.

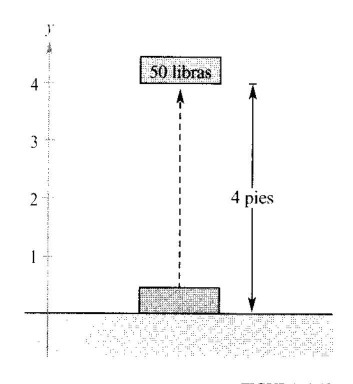


FIGURA 6.49
El trabajo realizado al elevar 4 pies un objeto de 50 libras es 200 libras-pies.

EJEMPLO 1 Levantamiento de objetos

Calcular el trabajo realizado al levantar un objeto de 50 libras una altura de 4 pies.

Solución: La magnitud de la fuerza F requerida es el peso del objeto (Figura 6.49). Así pues, el trabajo necesario para levantarlo 4 pies es

$$W = FD \quad \text{Trabajo = (fuerza)(distancia)}$$
$$= 50(4) \quad \text{Fuerza = 50 libras, distancia = 4 pies}$$
$$= 200 \text{ libras-pies}$$

□

En el sistema de medidas de EE.UU. el trabajo se expresa en libras-pies, libras-pulgadas o toneladas-pies. En el sistema cegesimal (C-G-S) la unidad básica de fuerza es la **dina** (= fuerza necesaria para producir una aceleración de 1 cm/s^2 a una masa de 1 gramo). En este sistema, el trabajo se expresa en dinas-cms (ergios) o en newtons-metros (julios), donde 1 julio = 10^7 ergios.

EXPLORACIÓN

¿Cuánto trabajo? En el Ejemplo 1 hacían falta 200 libras-pies para elevar verticalmente 4 pies un objeto de 50 libras. Supongamos que, una vez izado, caminamos sosteniéndolo 4 pies horizontalmente. ¿Exigiría esta operación otras 200 libras-pies? Razonar la respuesta.

Trabajo realizado por una fuerza variable

En el Ejemplo 1, la fuerza aplicada se mantenía *constante*. Si se aplica una fuerza *variable* a un objeto, es preciso recurrir al Cálculo si se quiere determinar el trabajo realizado, ya que la magnitud de la fuerza cambia al ir variando la posición del objeto. Así, la fuerza requerida por la compresión de un muelle crece conforme el muelle se va comprimiendo.

Supongamos que un objeto se mueve en línea recta desde $x = a$ hasta $x = b$ bajo la ación de una fuerza $F(x)$ que varía de manera continua. Sea Δ una partición de $[a, b]$ en n subintervalos determinados por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

y sea $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Para cada i escojamos un c_i tal que $x_{i-1} \leqslant c_i \leqslant x_i$. En c_i la fuerza aplicada es $F(c_i)$. Como F es continua, podemos aproximar el trabajo realizado en el desplazamiento del objeto a lo largo del i-ésimo subintervalo por el incremento

$$\Delta W_i = F(c_i)\,\Delta x_i$$

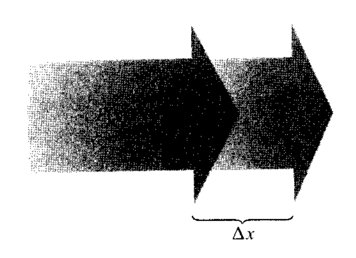


FIGURA 6.50
La magnitud de la fuerza varía conforme el objeto cambia de posición (Δx).

como muestra la Figura 6.50. Así pues, el trabajo total realizado para desplazar el objeto desde a hasta b puede aproximarse por

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\,\Delta x_i$$

Esta aproximación es cada vez mejor al hacer $\|\Delta\| \to 0$ ($n \to \infty$). Por tanto, definimos el trabajo como

$$W = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\,\Delta x_i = \int_a^b F(x)\,dx$$

DEFINICIÓN DEL TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE

Si un objeto es desplazado en línea recta desde $x = a$ hasta $x = b$ por la acción de una fuerza $F(x)$ que varía de forma continua, el **trabajo** W realizado se define como

$$W = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \int_a^b F(x)\, dx$$



EMILIE DE BRETEUIL (1706-1749)

Otra labor relevante de Emilie de Breteuil fue la traducción de los *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* de Newton al francés. Su traducción y sus comentarios contribuyeron en gran medida a la aceptación de las ideas científicas de Newton en Europa.

Los restantes ejemplos de esta sección utilizan algunas leyes de Física bien conocidas, descubiertas en la misma época en que se estaba gestando el Cálculo. De hecho, en los siglos XVII y XVIII había poca diferencia entre físicos y matemáticos. Una física-matemática fue Emilie de Breteuil, quien realizó una importante síntesis de las contribuciones de otros científicos, como Newton, Leibniz, Huygens, Kepler y Descartes. Su libro de Física *Instituciones* fue utilizado durante muchos años.

Las tres leyes físicas que citamos a continuación fueron descubiertas por Robert Hooke (1635-1703), Isaac Newton (1642-1727) y Charles Coulomb (1736-1806).

1. **Ley de Hooke**: La fuerza F requerida para comprimir o estirar un muelle (dentro de sus límites de elasticidad) es proporcional al desplazamiento producido respecto de su posición de equilibrio (longitud natural). Es decir,

$$\boxed{F = kd}$$

donde la constante de proporcionalidad k (constante del muelle) depende de la naturaleza del muelle.

2. **Ley de la gravitación universal**: La fuerza F de atracción entre dos masas m_1 y m_2, es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d entre ellas. Esto es,

$$\boxed{F = k\frac{m_1 m_2}{d^2}}$$

Si m_1 y m_2 se miden en gramos y d en centímetros, F se medirá en dinas para un valor de $k = 6{,}670 \times 10^{-8}$ cm^3/(g · s^2).

3. **Ley de Coulomb**: La fuerza entre dos cargas q_1 y q_2 en el vacío es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d entre ellas. Esto es,

$$\boxed{F = k\frac{q_1 q_2}{d^2}}$$

Si q_1 y q_2 se dan en unidades electrostáticas y d en centímetros, F se medirá en dinas para un valor de $k = 1$.

EXPLORACIÓN

El trabajo realizado al comprimir el muelle del Ejemplo 2 de $x = 3$ a $x = 6$ pulgadas es 3.375 libras-pulgadas. El realizado para comprimirlo de $x = 0$ a $x = 3$ ¿hubiera sido mayor, igual o menor que ese? Explicar la respuesta.

EJEMPLO 2 Compresión de un muelle

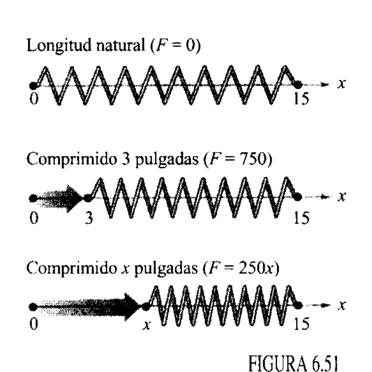


FIGURA 6.51

Una fuerza de 750 libras comprime 3 pulgadas un muelle de longitud natural 15 pulgadas. Calcular el trabajo realizado al comprimirlo otras 3 pulgadas más.

Solución: Por la ley de Hooke, la fuerza $F(x)$ requerida para comprimir el muelle x pulgadas desde de su longitud natural es $F(x) = kx$. De los datos del enunciado se sigue que $F(3) = 750 = (k)(3)$, luego $k = 250$ y $F(x) = 250x$, como indica la Figura 6.51. Para hallar el incremento de trabajo, suponemos que la fuerza exigida para comprimir el muelle un incremento Δx muy pequeño es aproximadamente constante. Con ello, el incremento de trabajo resulta ser

$$\Delta W = (\text{fuerza})(\text{distancia}) = (250x)\ \Delta x.$$

Como el muelle se comprime de $x = 3$ a $x = 6$ pulgadas por debajo de su longitud natural, el trabajo realizado es

$$W = \int_0^6 250x\, dx$$

$$= 125x^2\Big]_3^6 = 4.500 - 1.125 = 3.375 \text{ libras-pulgada}$$

Nótese que no integramos desde 0 hasta 6, ya que se nos preguntaba el trabajo realizado al comprimir 3 pulgadas *adicionales* (sin incluir las 3 primeras). □

EJEMPLO 3 Puesta en órbita

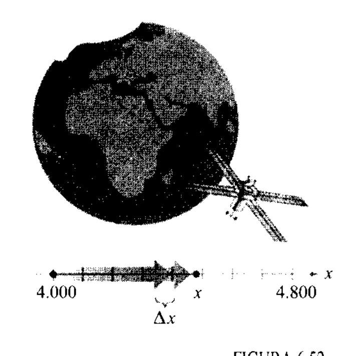


FIGURA 6.52
El trabajo requerido para elevar un módulo espacial hasta una altitud de 800 millas sobre la superficie de la Tierra es aproximadamente 1.056×10^{11} libras-pies.

Un módulo espacial pesa 15 toneladas sobre la superficie de la Tierra. ¿Cuánto trabajo hay que hacer para propulsarlo a una altura de 800 millas sobre la superficie terrestre (véase Figura 6.52). (Tomar 4.000 millas como radio de la Tierra. No considerar el efecto de la resistencia del aire ni el peso del combustible.)

Solución: Dado que el peso de un cuerpo varía inversamente con el cuadrado de su distancia al centro de la Tierra, la fuerza $F(x)$ ejercida por la gravedad es

$$F(x) = \frac{C}{x^2} \qquad C \text{ es la constante de proporcionalidad}$$

Como el módulo pesa 15 toneladas en la superficie terrestre y el radio de la Tierra es de unas 4.000 millas, deducimos que

$$15 = \frac{C}{(4.000)^2}$$

$$240.000.000 = C$$

Así pues, el incremento de trabajo es

$$\Delta W = (\text{fuerza})(\text{incremento de distancia})$$

$$= \frac{240.000.000}{x^2}\ \Delta x$$

Finalmente, al ser propulsado desde $x = 4.000$ hasta $x = 4.800$ millas, el trabajo realizado viene dado por

$$\begin{aligned} W &= \int_{4.000}^{4.800} \frac{240.000.000}{x^2}\, dx \\ &= \frac{-240.000.000}{x}\Bigg]_{4.000}^{4.800} \\ &= -50.000 + 60.000 \\ &= 10.000 \text{ miles-toneladas} \\ &\approx 1{,}056 \times 10^{11} \text{ libras-pulgada} \end{aligned}$$

En el sistema C-G-S, usando el factor de conversión 1 libra-pie = 1,35582 julios, el trabajo resulta ser

$$W = 1{,}432 \times 10^{11} \text{ julios}$$ □

Las soluciones de los Ejemplos 2 y 3 se adaptan a nuestra presentación del trabajo como una suma de incrementos de la forma

$$\boxed{\Delta W = (\text{fueza})\ (\text{incremento de distancia}) = (F)(\Delta x)}$$

Otra manera de formular el incremento de trabajo es

$$\boxed{\Delta W = (\text{incremento de fuerza})(\text{distancia}) = (\Delta F)(x)}$$

Esta segunda interpretación de ΔW es útil en problemas relativos a movimientos de sustancias no rígidas, como fluidos o cadenas.

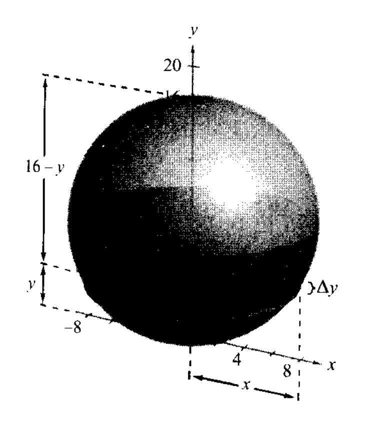


FIGURA 6.53
El trabajo requerido para vaciar el depósito por un orificio practicado en su parte más alta es de 589.782 libras-pies.

EJEMPLO 4 Vaciado de un depósito

Un depósito esférico de 8 pies de radio está lleno hasta la mitad con un aceite que pesa 50 libras/pie^3. Calcular el trabajo requerido para extraer el aceite bombeando a través de un orificio situado en lo más alto del depósito.

Solución: Consideramos el aceite dividido en discos de espesor Δy y radio x, como muestra la Figura 6.53. El incremento de fuerza para cada disco viene dado por su peso, de modo que

$$\begin{aligned} \Delta F &= \text{peso} \\ &= \left(\frac{50 \text{ libras}}{\text{pie cúbico}}\right)(\text{volumen}) \\ &= 50(\pi x^2 \Delta y) \text{ libras} \end{aligned}$$

Para un círculo de radio 8 y centro en (0, 8) se tiene

$$x^2 + (y - 8)^2 = 8^2$$
$$x^2 = 16y - y^2$$

así que podemos expresar el incremento de trabajo como

$$\begin{aligned}\Delta F &= 50(\pi x^2\ \Delta y)\\ &= 50\pi(16y - y^2)\ \Delta y\end{aligned}$$

En la Figura 6.53 se aprecia que un disco que dista y pies del fondo debe ser elevado una distancia de $(16 - y)$ pies. Por tanto, el incremento de trabajo es

$$\begin{aligned}\Delta W &= \Delta F(16 - y)\\ &= 50\pi(16y - y^2)\ \Delta y(16 - y)\\ &= 50\pi(256y - 32y^2 + y^3)\ \Delta y\end{aligned}$$

Puesto que el depósito está medio lleno, la variable y recorre de 0 a 8, luego el trabajo requerido para vaciar el depósito es

$$\begin{aligned}W &= \int_0^8 50\pi(256y - 32y^2 + y^3)\ dy\\ &= 50\pi\left[128y^2 - \frac{32}{3}y^3 + \frac{y^4}{4}\right]_0^8\\ &= 50\pi\left(\frac{11.264}{3}\right)\\ &\approx 589.782 \text{ libras-pie}\end{aligned}$$

□

Con el fin de constatar que el resultado del Ejemplo 4 es razonable, consideremos que el peso del aceite en el depósito es

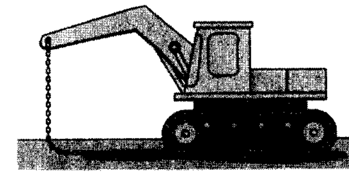
$$\left(\frac{1}{2}\right)(\text{volumen})(\text{densidad}) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi 8^3\right)(50)$$
$$= 53.616{,}5 \text{ libras}$$

Elevar esa cantidad de aceite 8 pies implicaría $8(53.616{,}5) \approx 428.932$ libras-pies de trabajo. Dado que el aceite es elevado realmente entre 8 y 16 pies, parece razonable que el trabajo realizado sea 589.782 libras-pies.

EJEMPLO 5 Izado de una cadena



Una cadena de 20 pies de longitud y que pesa 5 libras/pie está extendida en el suelo. ¿Cuánto trabajo es necesario para levantar uno de sus extremos hasta una altura de 20 pies, es decir hasta que esté totalmente extendida en vertical, como muestra la Figura 6.54?



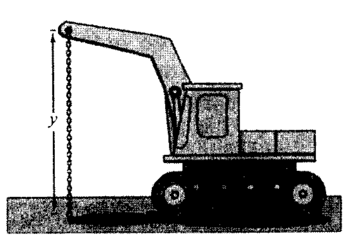


FIGURA 6.54
El trabajo realizado al izar un extremo de la cadena a 20 pies de altura es de 1.000 libras-pies.

Solución: Imaginemos la cadena dividida en pequeños fragmentos, cada uno de longitud Δy. El peso de cada uno de ellos es el incremento de fuerza

$$\Delta F = \text{peso} = \left(\frac{5 \text{ libras}}{\text{pie}}\right)(\text{longitud}) = 5\Delta y$$

Como un fragmento típico (inicialmente en el suelo) ha de ser izado a una altura y, el incremento de trabajo es

$$\Delta W = (\text{incremento de fuerza})(\text{distancia}) = (5\ \Delta y)y = 5y\ \Delta y$$

Además, y varía entre 0 y 20, de modo que el trabajo total resulta ser

$$W = \int_0^{20} 5y\, dy = \left.\frac{5y^2}{2}\right]_0^{20} = \frac{5(400)}{2} = 1.000 \text{ libras-pie} \qquad \square$$

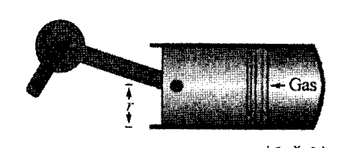


FIGURA 6.55
Trabajo realizado por la expansión de un gas.

En el ejemplo siguiente consideramos un pistón de radio r en un cilindro (Figura 6.55). Al expandirse el gas en el cilindro, el pistón se desplaza y se realiza trabajo. Si p denota la presión del gas (en libras/pie^2) contra el pistón y V el volumen de gas (en pies^3), el incremento de trabajo requerido para mover el pistón Δx pies es

$$\Delta W = (\text{fuerza})(\text{incremento de distancia}) = F(\Delta x) = p(\pi r^2)\ \Delta x = p\ \Delta V$$

Por tanto, al expandirse el gas de V_0 a V_1, el trabajo realizado para desplazar el pistón es

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p\, dV$$

Supuesto que la presión del gas sea inversamente proporcional a su volumen, es decir $p = k/V$, la integral que da el trabajo pasa a ser

$$W = \int_{V_0}^{V_1} \frac{k}{V}\, dV$$

EJEMPLO 6 Trabajo realizado por la expansión de un gas

Un volumen inicial de gas de 1 pie^3, que estaba a una presión de 500 libras/pie^2, se expande a un volumen de 2 pies^3. Hallar el trabajo realizado por el gas, suponiendo que la presión es inversamente proporcional al volumen.

Solución: De $p = k/V$ y de que $p = 500$ cuando $V = 1$, deducimos que $k = 500$. Así pues, el trabajo es

$$W = \int_{V_0}^{V_1} \frac{k}{V}\, dv = \int_1^2 \frac{500}{V}\, dv = 500 \ln |V| \Big]_1^2 \approx 346{,}6 \text{ libras-pie} \qquad \square$$

Ejercicios de la Sección 6.5

Fuerza constante En los Ejercicios 1-4, calcular el trabajo realizado por la fuerza constante.

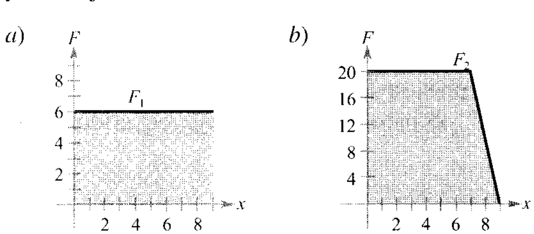
1. Se levanta un saco de 100 libras una altura de 10 pies.

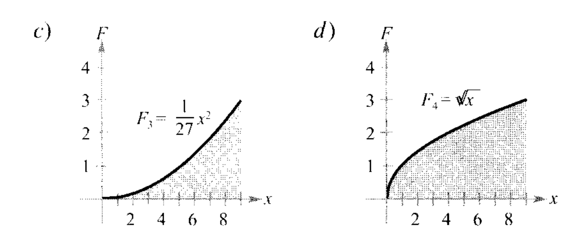
2. Una grúa levanta un automóvil de 2.400 libras hasta una altura de 6 pies.

3. En un proyecto de construcción, deslizar un bloque de cemento 4 metros requiere una fuerza de 112 newtons.

4. Una locomotora arrastra vagones media milla con una fuerza de 9 toneladas.

5. ***Para pensar*** Las gráficas muestran la fuerza, en libras, requerida para mover un objeto 9 pies a lo largo del eje x. Ordenar las funciones fuerza de menor a mayor trabajo, sin efectuar cálculos.





6. Verificar la respuesta del Ejercicio 5 calculando el trabajo para cada función de fuerza.

Ley de Hooke En los Ejercicios 7-14, hallar la fuerza variable utilizando la ley de Hooke.

7. Una fuerza de 7 libras comprime 4 pulgadas un muelle de 15 pulgadas. ¿Cuánto trabajo se necesita para comprimirlo 7 pulgadas?

8. ¿Cuánto trabajo se realiza al comprimir el muelle del Ejercicio 7 desde una longitud de 10 pulgadas hasta conseguir que tenga sólo 6 pulgadas?

9. Una fuerza de 250 newtons estira un muelle 30 cm. ¿Cuánto trabajo se realiza al estirarlo desde 20 hasta 50 cm?

10. Una fuerza de 800 newtons estira un muelle 70 cm en un instrumento para tensar postes de un vallado. Hallar el trabajo realizado al estirar el muelle los 70 cm requeridos.

11. Una fuerza de 15 libras estira 6 pulgadas un muelle de un gimnasio. Calcular el trabajo realizado al estirar ese muelle 1 pie a partir de su longitud natural.

12. Se requieren 18 libras-pies de trabajo para estirar un muelle 4 pulgadas de su posición de equilibrio. Calcular el trabajo realizado al estirarlo otras 3 pulgadas adicionales.

13. Comprimir un muelle 2 pulgadas a partir de su longitud natural exige 7,5 libras-pies. ¿Cuánto trabajo es necesario para comprimirlo media pulgada adicional?

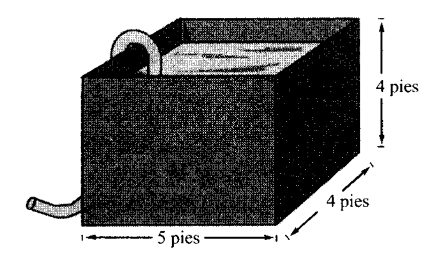
14. ***Propulsión*** Despreciando el peso del combustible y la resistencia del aire, hallar el trabajo necesario para propulsar un satélite de 4 toneladas hasta una altura de
a) 200 millas sobre la superficie terrestre,
b) 400 millas sobre la superficie terrestre.

15. ***Propulsión*** Con la información del Ejercicio 15, expresar el trabajo W del sistema de propulsión como función de la altura h del satélite sobre la superficie terrestre. Calcular, si existe, el límite de W cuando h tiende a infinito.

16. ***Propulsión*** Despreciando el peso del combustible y la resistencia del aire, hallar el trabajo realizado al propulsar un satélite de 10 toneladas a una altura de
a) 11.000 millas sobre la superficie terrestre,
b) 22.000 millas sobre la superficie terrestre.

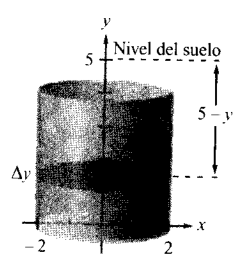
18. ***Propulsión*** Un módulo lunar pesa 12 toneladas en la superficie de la Tierra. ¿Cuánto trabajo es necesario para elevarlo desde la superficie de la Luna hasta una altura de 50 millas? El radio de la Luna es 1.100 millas y su fuerza de gravedad es un sexto de la de la Tierra.

18. ***Bombeo de agua*** El depósito rectangular de la figura está lleno de agua, que pesa 62,4 libras/pie^3. ¿Cuánto trabajo ha de realizarse para bombear por arriba, como indica la figura, *a*) la mitad del agua?, *b*) toda el agua?

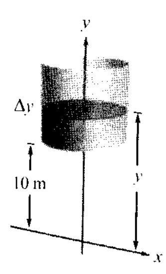


19. ***Para pensar*** Explicar por qué la respuesta al apartado *b*) en el ejercicio anterior no es igual al doble de la respuesta al *a*).

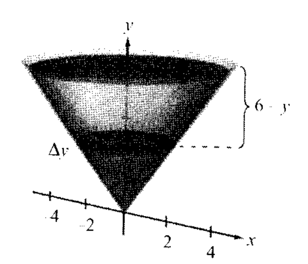
20. ***Bombeo de agua*** Un depósito cilíndrico lleno de agua, de 4 metros de altura y 2 metros de radio, está colocado de manera que su techo está 1 metro por debajo del nivel del suelo (véase figura). ¿Cuánto trabajo es necesario para bombear toda el agua que contiene hasta el nivel del suelo?



21. ***Bombeo de agua*** Supongamos que el depósito del Ejercicio 20 estuviera colocado sobre una torre, con su base 10 metros por encima del nivel de un río (véase figura). Determinar cuánto trabajo hay que realizar para llenar la mitad del depósito con agua del río.



22. Un depósito abierto tiene forma de cono circular recto (véase figura) de 8 pies de diámetro en su parte superior y 6 pies de altura. ¿Cuánto trabajo se necesita para vaciarlo por arriba?

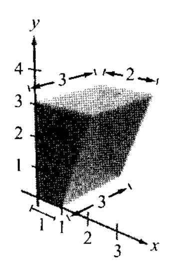


23. ***Bombeo de agua*** Si se bombea agua en el depósito del Ejercicio 22 por su vértice, hallar cuánto trabajo se realiza para llenarlo

a) hasta de 2 pies de profundidad,
b) desde 4 pies hasta 6 pies de profundidad.

24. ***Bombeo de agua*** Un depósito tiene la forma de la mitad superior de una esfera de radio 6 pies. Se desea llenarlo con agua a través de un orificio situado en su base circular. ¿Cuánto trabajo es necesario para ello?

25. ***Bombeo de combustible Diesel*** La figura muestra el depósito de combustible de un camión Diesel, con las dimensiones en pies. El motor está 2 pies por encima de la parte superior del depósito y el combustible pesa 55,6 libras/pie^3. Calcular el trabajo requerido para bombear todo el combustible hasta el nivel del motor.



Bombeo de gasolina En los Ejercicios 26 y 27, calcular el trabajo realizado al bombear gasolina que pesa 42 libras/pie^3. (*Ayuda:* Evaluar una integral mediante una fórmula geométrica y la otra observando que el integrando es una función impar.)

26. Un depósito cilíndrico, de 3 pies de diámetro y 4 pies de largo, colocado en la caja de un camión, se utiliza para abastecer de combustible a los tractores. El eje del depósito es horizontal. ¿Cuánto trabajo es necesario para bombear todo su contenido en un tractor si la abertura del depósito de éste se encuentra 5 pies por encima del punto más alto del depósito cilíndrico?

27. La parte superior de un contenedor cilíndrico de gasolina en una estación de servicio está 4 pies por debajo del nivel del suelo, con su eje horizontal. Mide 12 pies de largo y 5 de diámetro. Hallar el trabajo realizado al bombear todo su contenido hasta una altura de 3 pies sobre el nivel del suelo.

Izando una cadena En los Ejercicios 28-31, consideremos una cadena colgada de un torno situado 15 pies sobre el nivel del suelo. Calcular el trabajo realizado por el torno al elevar la cadena, que pesa 3 libras/pie, hasta la posición indicada.

28. Subir toda la cadena.

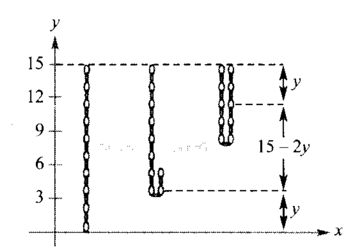
29. Subir un tercio de la cadena.

30. Recoger el torno hasta que el punto más bajo de la cadena diste del suelo 10 pies.

31. Izar toda la cadena con un peso de 100 libras atado a ella.

Izando una cadena En los Ejercicios 32 y 33, consideremos una cadena de 15 pies, que pesa 3 libras/pie, colgada a 15 pies sobre el nivel del suelo. Calcular el trabajo realizado al izar la cadena verticalmente hasta la posición indicada.

32. Coger el extremo inferior de la cadena y elevarlo a una altura de 15 pies, dejando la cadena doblada colgando todavía (véase figura).



33. Repetir el Ejercicio 32 elevando el extremo inferior de la cadena hasta 12 pies sobre el nivel del suelo.

Grúa de demolición En los Ejercicios 34 y 35, consideremos una grúa de demolición con una bola de 500 libras suspendida de un cable de 40 pies que pesa 1 libra/pie.

34. Hallar el trabajo necesario para levantarla 15 pies.

35. Hallar el trabajo necesario para levantarla 40 pies.

Ley de Boyle En los Ejercicios 36 y 37, calcule el trabajo realizado por el gas para el volumen y la presión dados. Supóngase que la presión es inversamente proporcional al volumen (véase Ejemplo 6).

36. Una cantidad de gas con volumen inicial de 2 pies^3 y presión de 1.000 libras/pie^2 se expande a un volumen de 3 pies^3.

37. Una cantidad de gas con volumen inicial de 1 pie^3 y presión de 2.000 libras/pie^2 se expande a un volumen de 4 pies^3.

38. ***Fuerza eléctrica*** Dos electrones se repelen con una fuerza que varía inversamente como el cuadrado de la distancia entre ellos. Si un electrón está en reposo en el punto (2, 4), hallar el trabajo realizado para mover el otro electrón desde (−2, 4) hasta (1, 4).

39. ***Un modelo matemático*** El cilindro hidráulico de una aserradora de madera tiene 4 pulgadas de diámetro y 2 de largo. La bomba hidráulica produce una presión máxima de 2.000 libras/pulg^2. Por tanto, la máxima fuerza producida por el cilindro es de $2.000(\pi 2^2) = 8.000\,\pi$ libras.

a) Hallar el trabajo realizado en una extensión del cilindro, sabiendo que exige la máxima fuerza.

b) La fuerza ejercida para serrar una pieza de madera es variable. La tabla recoge varias medidas, donde la variable x denota la extensión del cilindro en pies y F la fuerza en libras. Aproximar, usando la regla de Simpson, el trabajo requerido para serrar la pieza.

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$F(x)$	0	20.000	22.000	15.000

x	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
$F(x)$	10.000	5.000	0

c) Usar regresión en la calculadora para hallar un modelo polinómico de grado 4 para esos datos. Representar los datos y el modelo.

d) Con ese modelo, estime la extensión del cilindro cuando la fuerza es máxima.

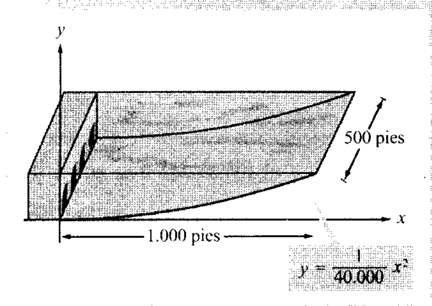
e) Usar el modelo del apartado *c*) para aproximar el trabajo realizado al serrar la pieza de madera.

Prensa hidráulica En los Ejercicios 40-43, usar integración en la calculadora con el fin de hallar el trabajo aproximado realizado por una prensa hidráulica, dado un modelo para la fuerza variable F (en libras) y el desplazamiento x (en pies) de la prensa.

	Fuerza	*Intervalo*
40.	$F(x) = 1.000[1{,}8 - \ln(x+1)]$	$0 \leq x \leq 5$
41.	$F(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{100}$	$0 \leq x \leq 4$
42.	$F(x) = 100x\sqrt{125 - x^3}$	$0 \leq x \leq 5$
43.	$F(x) = 1.000 \operatorname{senh} x$	$0 \leq x \leq 2$

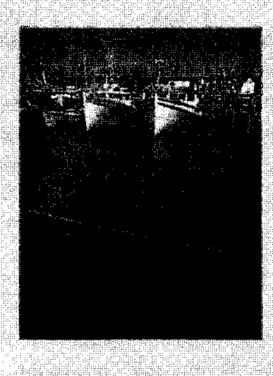
PROYECTO PARA LA SECCIÓN

Energía de marea Las plantas de producción de energía eléctrica a partir de la «energía de marea» tienen una presa que separa una bahía del mar. La energía eléctrica se produce por el flujo y reflujo del agua entre la bahía y el mar. La cantidad de energía producida depende del volumen de la bahía y del rango de la marea, es decir, la distancia vertical entre la marea alta y la marea baja. (En diversas partes de la Tierra hay bahías naturales con rangos de marea superiores a 15 pies. La bahía de Fundy, en Nueva Escocia, tiene un rango de marea de 47,5 pies.)



a) Consideremos una bahía de base rectangular (véase figura) con un rango de marea de 25 pies, correspondiendo la marea baja a $y = 0$. ¿Cuánta agua contiene la bahía en marea alta?

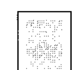
b) La cantidad de energía producida durante el llenado (o el vaciado) de la bahía es proporcional a la cantidad de trabajo requerido para llenar (o vaciar) la bahía. ¿Cuánto trabajo es necesario para llenarla con agua del mar, que pesa una 64 libras/pie^3?





La bahía de Fundy, en Nueva Escocia, tiene un rango de marea muy grande, como pone de manifiesto el contraste entre las dos fotografías.

PARA MÁS INFORMACIÓN Véase el artículo «LaRance: Six Years of Operating a Tidal Power Plant in France», de J. Cotillon en *Water Power Magazine*, octubre 1984.



6.6 Momentos, centros de masa y centroides

Masa

En esta sección estudiaremos varias aplicaciones importantes de la integración relacionadas con la **masa**. La masa es una medida de la resistencia de un cuerpo a cambiar su estado de movimiento y es independiente del sistema gravitatorio particular donde se halle el cuerpo. No obstante, hay tantas aplicaciones que involucran la masa de un cuerpo que está en la superficie terrestre que tendemos a identificar la masa de un cuerpo con su *peso*. Esto no es correcto. El peso es un tipo de fuerza y, como tal, depende de la gravedad. Fuerza y masa están relacionadas por la ecuación

$$\boxed{\text{Fuerza} = (\text{masa})(\text{aceleración})}$$

La tabla de la página siguiente recoge algunas medidas de masa y de fuerza utilizadas con frecuencia, junto con sus factores de conversión.

Sistema de medida	Medida de masa	Medida de fuerza
U.S.	Slug	Libra = (slug)(pie/s^2)
Internacional	Kilogramo	Newton = (kilogramo)(m/s^2)
C-G-S	Gramo	Dina = (gramo)(cm/s^2)
Conversión 1 libra = 4,448 newtons 1 newton = 0,2248 libras 1 dina = 0,000002247 libras 1 dina = 0,00001 newton		1 slug = 14,59 kilogramos 1 kilogramo = 0,06854 slug 1 gramo = 0,00006854 slug 1 metro = 0,3048 pies

EJEMPLO 1 Masa sobre la superficie de la Tierra

Hallar la masa (en slugs) de un objeto cuyo peso al nivel del mar sea 1 libra.

Solución: Tomando 32 pies/s^2 como aceleración de la gravedad, se obtiene

$$\text{Masa} = \frac{\text{Fuerza}}{\text{aceleración}} \qquad \text{Fuerza} = (\text{masa})(\text{aceleración})$$

$$= \frac{1 \text{ libra}}{32 \text{ pies por segundo por segundo}}$$

$$= 0{,}03125 \frac{\text{libra}}{\text{pie por segundo por segundo}}$$

$$= 0{,}03125 \text{ slug}$$

Debido a que muchas situaciones prácticas se producen en la superficie terrestre, esta cantidad de masa se llama una **libra de masa**. □

Centro de masa de un sistema unidimensional

Consideramos dos tipos de momentos de una masa: el **momento respecto a un punto** y el **momento respecto a una recta**. Para definirlos, consideremos la situación ideal de una masa m concentrada en un punto (una masa «puntual»). Si x es la distancia de ese punto a otro punto P, el momento de m respecto al punto P es

$$\boxed{\text{Momento} = mx}$$

y x es la longitud del brazo del momento.

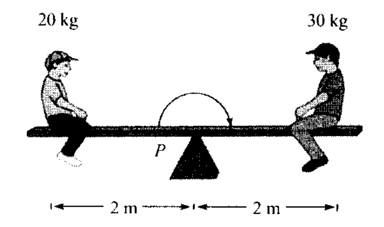


FIGURA 6.56
El columpio se equilibra cuando los momentos a la derecha y a la izquierda son iguales.

El concepto de momento queda ilustrado con nitidez por un columpio (Figura 6.56). Si un niño de 20 kg de masa se sienta a 2 m del punto de apoyo y otro de 30 kg de masa de sienta a 2 m en el lado opuesto, sabemos, por experiencia, que el columpio girará de forma que el niño mayor baje al suelo. Esta rotación ocurre porque el momento producido por el niño de la izquierda es menor que el producido por el de la derecha.

$$\text{Momento del niño de la izquierda} = (20)(2) = 40 \text{ kg-m}$$

$$\text{Momento del niño de la derecha} = (30)(2) = 60 \text{ kg-m}$$

Para que el columpio se balancee, los dos momentos han de ser iguales. Por ejemplo, si el niño más pesado se sentara a 4/3 m del punto de apoyo, el columpio se balancearía, ya que cada uno de los niños produciría un momento de 40 kg-m.

Con el fin de generalizar estas consideraciones, introducimos una recta coordenada con el origen en el punto de apoyo (véase Figura 6.57). Supongamos varias masas colocadas en este eje x. La medida de la tendencia del sistema a girar en torno del origen es el **momento respecto al origen**, y se define como la suma de n productos $m_i x_i$.

$$M_0 = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n$$

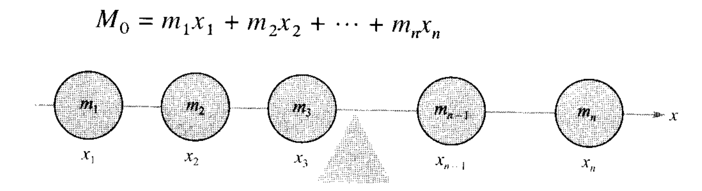


FIGURA 6.57
Si $m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n = 0$, el sistema está en equilibrio.

Si M_0 es 0, se dice que el sistema está en **equilibrio**.

Para un sistema que no está en equilibrio, el **centro de masa** se define como el punto $\bar{x}$ en el que habría que colocar el punto de apoyo para que el sistema alcanzase el equilibrio. Si el sistema se traslada $\bar{x}$ unidades, cada coordenada x_i pasaría a ser $(x_i - x)$, y como el momento del sistema trasladado sería 0, tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x) = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i - \sum_{i=1}^{n} m_ix = 0$$

Despejando $\bar{x}$ se obtiene

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\text{momento del sistema respecto del origen}}{\text{masa total del sistema}}$$

Si $m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n = 0$, el sistema está en equilibrio.

MOMENTOS Y CENTROS DE MASA: SISTEMA UNIDIMENSIONAL

Sea un sistema de masas puntuales $m_1, m_2, \cdots, m_n$ localizadas en $x_1, x_2, \cdots, x_n$

1. El **momento respecto al origen** es $M_0 = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n$.
2. El **centro de masa** es $\bar{x} = \dfrac{M_0}{m}$, donde $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ es la masa total del sistema.

EJEMPLO 2 Centro de masa de un sistema lineal

Hallar el centro de masa del sistema lineal de la Figura 6.58.

| Nota. En el Ejemplo 2 ¿dónde colocaría el punto de apoyo de modo que las masas puntuales estuvieran en equilibrio?

m_1 (10) en -5, m_2 (15) en 0, m_3 (5) en 4, m_4 (10) en 7; eje x: -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

FIGURA 6.58

Solución: El momento respecto al origen es

$$\begin{aligned} M_0 &= m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 \\ &= 10(-5) + 15(0) + 5(4) + 10(7) \\ &= -50 + 0 + 20 + 70 \\ &= 40 \end{aligned}$$

Puesto que la masa total del sistema es $m = 10 + 15 + 5 + 10 = 40$, el centro de masa resulta ser

$$\bar{x} = \frac{M_0}{m} = \frac{40}{40} = 1$$ □

En lugar de hablar del momento de una *masa*, podemos hablar del momento de una *fuerza*. En este contexto, el centro de masa se llama **centro de gravedad**. Supongamos un sistema de masas puntuales $m_1, m_2, \cdots, m_n$ situadas en $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Entonces, como fuerza = (masa)(aceleración), la fuerza total del sistema es

$$\begin{aligned} F &= m_1a + m_2a + \cdots + m_na \\ &= ma \end{aligned}$$

El momento respecto al origen es

$$\begin{aligned} T_0 &= (m_1a)x_1 + (m_2a)x_2 + \cdots + (m_na)x_n \\ &= M_0a \end{aligned}$$

y el centro de gravedad es

$$\frac{T_0}{F} = \frac{M_0a}{ma} = \frac{M_0}{m} = \bar{x}$$

Por tanto, el centro de gravedad y el centro de masa tienen la misma localización.

Centro de masa de un sistema bidimensional

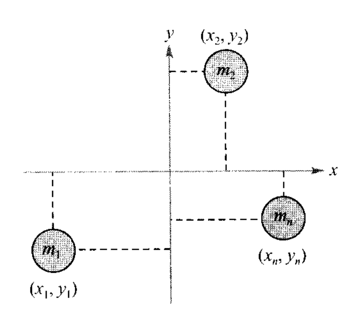


FIGURA 6.59
En un sistema bidimensional se consideran un momento respecto al eje y, M_y, y un momento respecto al eje x, M_x.

Para extender el concepto de momento a dos dimensiones, consideremos un sistema de masas en el plano xy, localizadas en los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ como muestra la Figura 6.59. En lugar de definir un único momento (con respecto al origen), vamos a definir dos momentos: uno con respecto al eje x y otro con respecto al eje y.

MOMENTOS Y CENTRO DE MASA: SISTEMA BIDIMENSIONAL

Consideremos un sistema de masas puntuales $m_1, m_2, \cdots, m_n$ localizadas en $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$

1. El **momento respecto al eje y** es $M_y = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n$
2. El **momento respecto al eje x** es $M_x = m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n$
3. El **centro de masa** es $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

donde $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ es la **masa total** del sistema.

El momento de un sistema de masas en el plano se puede considerar respecto de cualquier recta. En general, el momento respecto a una recta es la suma de los productos de las masas por las *distancias dirigidas* de los puntos a la recta.

$$\text{Momento} = m_1(y_1 - b) + m_2(y_2 - b) + \cdots + m_n(y_n - b) \qquad \text{Recta horizontal } y = b$$

$$\text{Momento} = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - a) + \cdots + m_n(x_n - a) \qquad \text{Recta vertical } x = a$$

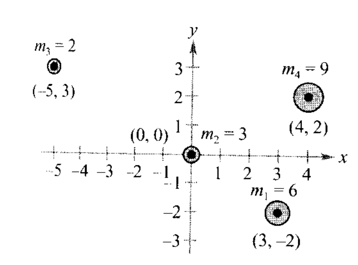


FIGURA 6.60
El centro de masas del sistema es $\left(\frac{11}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

EJEMPLO 3 Centro de masa de un sistema bidimensional

Hallar el centro de masas de un sistema de masas puntuales $m_1 = 6$, $m_2 = 3$, $m_3 = 2$, y $m_4 = 9$, situadas en

$$(3, -2), (0, 0), (-5, 3), \text{ y } (4, 2)$$

como ilustra la Figura 6.60.

Solución:

$$m = 6 \quad + 3 \quad + 2 \quad + 9 \quad = 20 \qquad \text{Masa}$$

$$M_y = 6(3) + 3(0) + 2(-5) + 9(4) = 44 \qquad \text{Momento respecto del eje } y$$

$$M_x = 6(-2) + 3(0) + 2(3) + 9(2) = 12 \qquad \text{Momento respecto del eje } x$$

Por tanto,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{n} = \frac{44}{20} = \frac{11}{5}$$

e

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

y, en consecuencia, el centro de masa es $\left(\frac{11}{5}, \frac{3}{5}\right)$. □

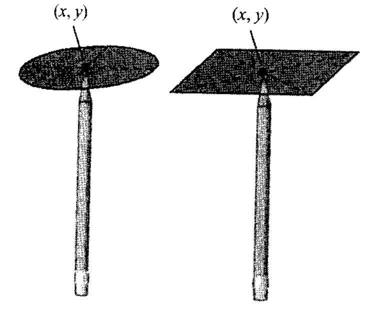


FIGURA 6.61
El centro de masa de una lámina plana puede visualizarse como su punto de equilibrio. Para una lámina circular, coincide con el centro del círculo. En una lámina rectangular, el centro de masa es el centro del rectángulo.

Centro de masa de una lámina plana

Hasta ahora hemos supuesto que la masa total del sistema estaba dispersa por unos cuantos puntos del plano o de la recta. Ahora pasamos a considerar lo que llamaremos una **lámina plana**, es decir, una fina lámina plana de un material de densidad constante (véase Figura 6.61). La **densidad** es usualmente una

medida de masa por unidad de volumen, tal como g/cm^3. Para láminas planas, sin embargo, la densidad se considera como una medida de masa por unidad de área. Suele denotarse la densidad por la letra griega ρ.

Consideremos una lámina plana de densidad uniforme ρ, acotada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = g(x)$, y $a \leqslant x \leqslant b$ (véase Figura 6.62). La masa de esta región viene dada por

$$\begin{aligned} m &= (\text{densidad})(\text{área}) \\ &= \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \\ &= \rho A \end{aligned}$$

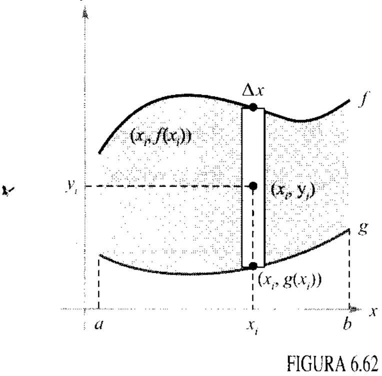


FIGURA 6.62
Lámina plana de densidad uniforme ρ.

donde A denota el área de la región. Para hallar el centro de masa de esta lámina, partimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de anchura Δx. Sea x_i el centro del i-ésimo subintervalo. Podemos aproximar la porción de la lámina que está sobre ese i-ésimo subintervalo por un rectángulo de altura $h = f(x_i) - g(x_i)$. Como la densidad del rectángulo es ρ, su masa es

$$\begin{aligned} m_i &= (\text{densidad})(\text{área}) \\ &= \underbrace{\rho}_{\text{Densidad}}\underbrace{[f(x_i) - g(x_i)]}_{\text{Altura}}\ \underbrace{\Delta x}_{\text{Anchura}} \end{aligned}$$

Tomando esta masa como si estuviera localizada en el centro (x_i, y_i) del rectángulo, la distancia dirigida del eje x a (x_i, y_i) es $y_i = [f(x_i) + g(x_i)]/2$. Por tanto, el momento de m_i respecto al eje x es

$$\begin{aligned} \text{Momentos} &= (\text{masa})(\text{distancia}) \\ &= m_i y_i = \rho[f(x_i) - g(x_i)]\,\Delta x \left[\frac{f(x_i) + g(x_i)}{2}\right] \end{aligned}$$

Sumando los momentos y tomando el límite cuando $n \to \infty$ se obtiene la sugerencia necesaria para formular la siguiente definición.

MOMENTOS Y CENTRO DE MASA DE UNA LÁMINA PLANA

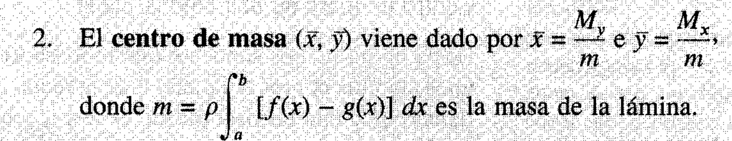
Sean f y g continuas, con $f(x) \geqslant g(x)$ en $[a, b]$ y consideremos la lámina plana de densidad uniforme ρ acotada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = g(x)$, y $a \leqslant x \leqslant b$.

1. Los **momentos respecto al eje** x y al eje y son

$$M_x = \rho \int_a^b \left[\frac{f(x) + g(x)}{2}\right] [f(x) - g(x)]\, dx$$

$$M_y = \rho \int_a^b x[f(x) - g(x)]\, dx$$

2. El **centro de masa** $(\bar{x}, \bar{y})$ viene dado por $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m}$ e $\bar{y} = \dfrac{M_x}{m}$, donde $m = \rho \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$ es la masa de la lámina.



EJEMPLO 4 Centro de masa de una lámina plana

Hallar el centro de masa de la lámina de densidad uniforme ρ acotada por la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ y el eje x.

Solución: Como el centro de masa ha de estar en el eje de simetría, sabemos que $\bar{x} = 0$. Además, la masa de la lámina es

$$m = \rho \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx$$

$$= \rho \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{32\rho}{3}$$

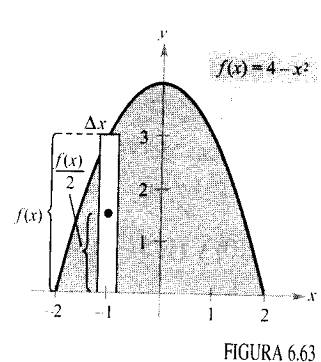


FIGURA 6.63

Para calcular el momento respecto al eje x, tomamos un rectángulo representativo, como ilustra la Figura 6.63. La distancia del centro del rectángulo al eje x es

$$y_i = \frac{f(x)}{2} = \frac{4 - x^2}{2}$$

Y puesto que la masa del rectángulo representativo es

$$\rho f(x)\, \Delta x = \rho(4 - x^2)\, \Delta x$$

vemos que

$$M_x = \rho \int_{-2}^{2} \frac{4 - x^2}{2} (4 - x^2)\, dx$$

$$= \frac{\rho}{2} \int_{-2}^{2} (16 - 8x^2 + x^4)\, dx$$

$$= \frac{\rho}{2} \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{256\rho}{15}$$

de modo que $\bar{y}$ viene dado por

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{256\rho/15}{32\rho/3} = \frac{8}{5}$$

FIGURA 6.64
El centro de masa es el punto de equilibrio.

Así pues, el centro de masa (o punto de equilibrio) de la lámina es $(0, \frac{8}{5})$, como muestra la Figura 6.64. □

Al ser la densidad ρ factor común a los momentos y a la masa en el Ejemplo 4, se cancela y no aparece en las coordenadas del centro de masa. Eso significa que el centro de masa de una lámina plana de densidad *uniforme* depende sólo de la forma de la lámina, no de su densidad. Por esa razón se llama a veces al punto

$$(\bar{x}, \bar{y}) \qquad \text{Centro de masa o centroide}$$

centro de masa de la *región* o **centroide** de la región. En otras palabras, para hallar el centroide de una región en el plano, basta suponer que es una lámina de densidad constante $\rho = 1$ y calcular el correspondiente centro de masa.

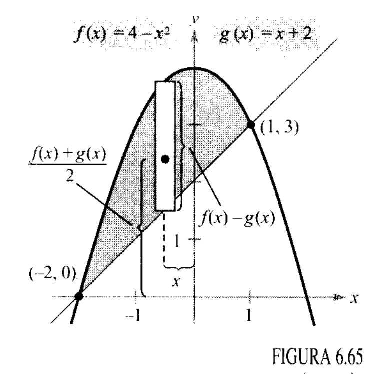


FIGURA 6.65
El centroide de la región es $\left(-\frac{1}{2}, \frac{12}{5}\right)$.

EJEMPLO 5 Centroide de una región plana

Hallar el centroide de la región acotada por las gráficas de $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = x + 2$.

Solución: Las dos gráficas se cortan en los puntos $(-2, 0)$ y $(1, 3)$, como vemos en la Figura 6.65. Por tanto, el área de la región es

$$A = \int_{-2}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\, dx = \frac{9}{2}$$

El centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de la región tiene coordenadas

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_{-2}^{1} x[(4 - x^2) - (x + 2)]\, dx = \frac{2}{9}\int_{-2}^{1} (-x^3 - x^2 + 2x)\, dx$$

$$= \frac{2}{9}\left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-2}^{1} = -\frac{1}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_{-2}^{1} \left[\frac{(4 - x^2) + (x + 2)}{2}\right][(4 - x^2) - (x + 2)]\, dx$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\right)\int_{-2}^{1} (-x^2 + x + 6)(-x^2 - x + 2)\, dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_{-2}^{1} (x^4 - 9x^2 - 4x + 12)\, dx$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{x^5}{5} - 3x^3 - 2x^2 + 12x\right]_{-2}^{1} = \frac{12}{5}$$

Así pues, el centroide es $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{12}{5}\right)$ □

Para algunas regiones planas simples es posible encontrar el centroide sin tener que recurrir a la integración.

EJEMPLO 6 Centroide de una región plana simple

Hallar el centroide de la región mostrada en la Figura 6.66*a*.

Solución: Colocando un sistema de coordenadas como sugiere la Figura 6.66*b*, los centroides de los tres rectángulos son

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right), \text{ y } (5, 1)$$

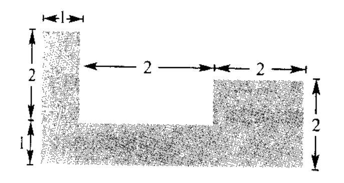
Usando estos puntos, podemos hallar el centroide de la región dada.

$$A = \text{Área de la región} = 3 + 3 + 4 = 10$$

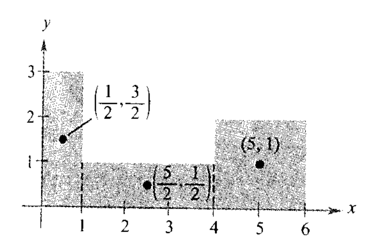
$$\bar{x} = \frac{(1/2)(3) + (5/2)(3) + (5)(4)}{10} = \frac{29}{10} = 2{,}9$$

$$\bar{x} = \frac{(3/2)(3) + (1/2)(3) + (1)(4)}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

Por consiguiente, el centroide de la región es (2,9, 1). □



a) Región original



b) El centroide de la región es (2,9, 1)

FIGURA 6.66

Nota. En el ejemplo 6 conviene hacer notar que (2,9, 1) no es el «promedio» de $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$, y (5, 1).

El teorema de Pappus

Cerramos esta sección con un teorema útil atribuido a Pappus de Alejandría (hacia el 300 d.C.), un matemático griego cuya *Colección Matemática*, en ocho volúmenes, es un compendio de gran parte de la matemática griega clásica. Relegamos la demostración de este teorema hasta la Sección 13.4 (Ejercicio 47).

TEOREMA 6.1 EL TEOREMA DE PAPPUS

Sea R una región del plano y sea L una recta de ese plano que no corta el interior de R (véase Figura 6.67). Si r denota la distancia del centroide de R a la recta L, el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar la región R en torno a la recta L es

$$V = 2\pi rA$$

donde A es el área de R. (Nótese que $2\pi r$ es la distancia recorrida por el centroide al girar la región en torno a la recta.)

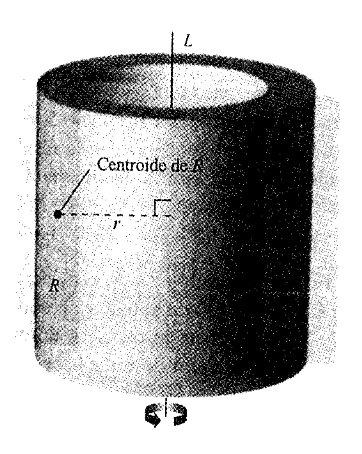


FIGURA 6.67
El volumen V es $2\pi rA$ donde A es el área de la región R.

Gracias al teorema de Pappus es fácil calcular el volumen de un toro, como haremos en el próximo ejemplo. Recordemos que, en Matemáticas, un **toro** es un sólido en forma de rosquilla generado cuando una región circular gira en torno a una recta que está en su mismo plano y que no corta al círculo.

EJEMPLO 7 Aplicación del teorema de Pappus al cálculo de un volumen

Hallar el volumen del toro generado al hacer girar la región circular acotada por $(x-2)^2 + y^2 = 1$ en torno al eje y, como muestra la Figura 6.68*a*.

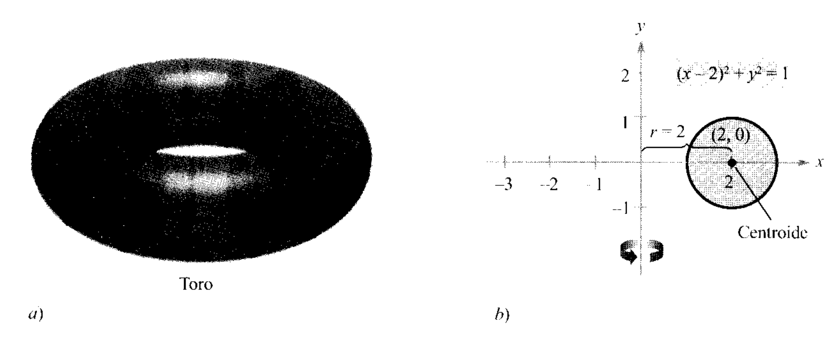


FIGURA 6.68

EXPLORACIÓN

Usar el método de las capas para probar que el volumen del toro viene dado por

$$V = \int_1^3 4\pi x\sqrt{1-(x-2)^2}\,dx$$

Calcular esta integral con ayuda de la calculadora. ¿Coincide el resultado con el del Ejemplo 7?

Solución: En la Figura 6.68*b* vemos que el centroide de la región circular es (2, 0). Por tanto, su distancia al eje de giro es $r = 2$. Y como el área de la región circular es $A = \pi$, el volumen del toro resulta ser

$$\begin{aligned} V &= 2\pi rA \\ &= 2\pi(2)(\pi) \\ &= 4\pi^2 \\ &\approx 39{,}5 \end{aligned}$$

□

Ejercicios de la Sección 6.6

En los Ejercicios 1-4, hallar el centro de masa de las masas puntuales situadas en los puntos del eje x que se especifican.

1. $m_1 = 6, m_2 = 3, m_3 = 5$
$x_1 = -5, x_2 = 1, x_3 = 3$

2. $m_1 = 7, m_2 = 4, m_3 = 3, m_4 = 8$
$x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = 5, x_4 = 6$

3. $m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 1, x_4 = 1, m_5 = 1$
$x_1 = 7, x_2 = 8, x_3 = 12, x_4 = 15, x_5 = 18$

4. $m_1 = 12, m_2 = 1, m_3 = 6, m_4 = 3, m_5 = 11$
$x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = -1, x_4 = 0, x_5 = 4$

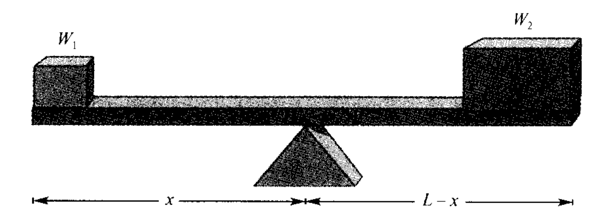
5. ***Razonamiento gráfico***

a) Trasladar cada masa puntual del Ejercicio 3 a la derecha cinco unidades y hallar el centro de masa resultante.

b) Trasladar a la izquierda tres unidades cada masa del Ejercicio 4 y determinar el centro de masa resultante.

6. ***Conjetura*** A la vista del resultado del Ejercicio 5, establecer una conjetura acerca del centro de masa resultante al trasladar k unidades cada una de las masas del sistema.

Problemas de Estática En los Ejercicios 7 y 8, consideramos una tabla de longitud L y con punto de apoyo a x pies de un extremo (véase figura). Si se colocan pesos W_1 y W_2 en los dos extremos de la tabla, hallar el valor de x que hace que el sistema esté en equilibrio.



7. Dos niños, que pesan 50 y 75 libras, juegan en un columpio de 10 pies de largo.

8. Para mover una roca de 550 libras, una persona que pesa 200 libras quiere balancearla con un tablón de 5 pies de longitud.

En los Ejercicios 9-12, localizar el centro de masa del sistema de masas puntuales dado.

9.

m_i	5	1	3
(x_i, y_i)	(2, 2)	(−3, 1)	(1, −4)

10.

m_i	10	2	5
(x_i, y_i)	(1, −1)	(5, 5)	(−4, 0)

11.

m_i	3	4
(x_i, y_i)	(−2, −3)	(−1, 0)

m_i	2	1	6
(x_i, y_i)	(7, 1)	(0, 0)	(−3, 0)

12.

m_i	4	2	$\frac{5}{2}$	5
(x_i, y_i)	(2, 3)	(−1, 5)	(6, 8)	(2, −2)

En los Ejercicios 13-24, hallar M_x, M_y, y $(\bar{x}, \bar{y})$ para las láminas de densidad uniforme ρ acotadas por las gráficas de las ecuaciones.

13. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$

14. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 4$

15. $y = x^2$, $y = x^3$

16. $y = \sqrt{x}$, $y = x$

17. $y = -x^2 + 4x + 2$, $y = x + 2$

18. $y = \sqrt{3x} + 1$, $y = x + 1$

19. $y = x^{2/3}$, $y = 0$, $x = 8$

20. $y = x^{2+/3}$, $y = 4$

21. $x = 4 - y^2$, $x = 0$

22. $x = 2y - y^2$, $x = 0$

23. $x = -y$, $x = 2y - y^2$

24. $x = y + 2$, $x = y^2$

En los Ejercicios 25-28, escribir y calcular las integrales que dan el área y los momentos respecto de los ejes x e y de la región acotada por las gráficas de las ecuacioens. (Supóngase $\rho = 1$.)

25. $y = x^2$, $y = x$

26. $y = \frac{1}{2}$, $y = 0$, $1 \leqslant x \leqslant 4$

27. $y = 2x + 4$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 3$

28. $y = x^2 - 4$, $y = 0$

En los Ejercicios 29-32, representar en la calculadora la región acotada por las gráficas de las ecuaciones. Usar integración en la calculadora con el fin de hallar aproximadamente el centroide de la región.

29. $y = 10x\sqrt{125 - x^3}$, $y = 0$

30. $y = xe^{-x/2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$

31. ***Sección prefabricada de un edificio***

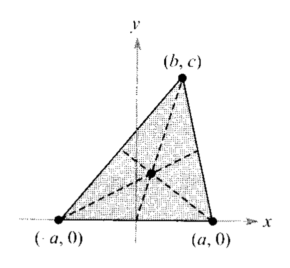
$$y = 5\sqrt[3]{400 - x^2},\ y = 0$$

32. ***Hechicera de Agnesi***

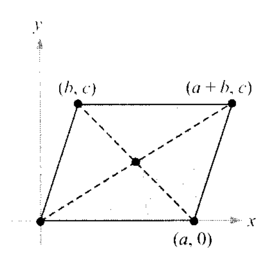
$$y = \frac{8}{(x^2 + 4)},\ y = 0,\ x = -2,\ x = 2$$

En los Ejercicios 33-38, hallar y/o verificar el centroide de la región común usada en Ingeniería.

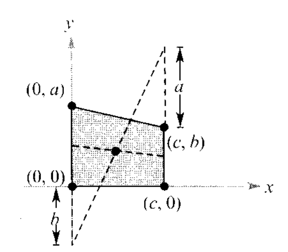
33. ***Triángulo*** Probar que el centroide del triángulo de la figura es el punto de intersección de las medianas.



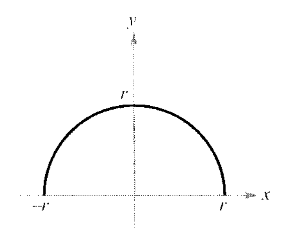
34. ***Paralelogramo*** Demostrar que el centroide del paralelogramo de la figura de la página siguiente es el punto de intersección de las diagonales.



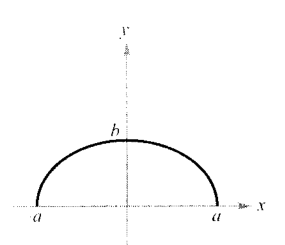
35. ***Trapecio*** Probar que el centroide del trapecio de la figura es el punto de intersección de la recta que une los puntos medios de los lados paralelos con la recta que une los lados paralelos extendidos, como muestra la figura.



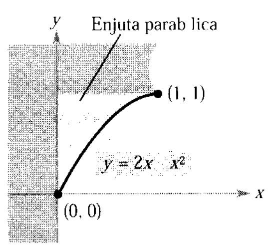
36. ***Semicírculo*** Hallar el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e $y = 0$ (véase figura).



37. ***Semielipse*** Hallar el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ e $y = 0$ (véase figura)



38. ***Región parabólica*** Hallar el centroide de la enjuta parabólica de la figura.



39. ***Razonamiento gráfico*** Consideremos la región acotada por las gráficas de $y = x^2$ e $y = b$, con $b > 0$.

a) Dibujar un croquis de la región.

b) Usar esa gráfica para determinar $\bar{x}$. Explicar la respuesta.

c) Escribir la integral que da M_y. Debido a la forma del integrando, el valor de la integral se puede obtener sin integración. ¿Cuál es la forma del integrando y cuál el valor de la integral? Comparar con el resultado de *b*).

d) Usar la gráfica del apartado *a*) para averiguar si $\bar{y} > \frac{b}{2}$ o $\bar{y} < \frac{b}{2}$. Explicar la respuesta.

40. ***Razonamiento gráfico y numérico*** Consideremos la región acotada por las gráficas de $y = x^{2n}$, e $y = b$, donde $b > 0$ y n es un entero positivo.

a) Escribir la integral que da M_y. Debido a la forma del integrando, el valor de la integral se puede obtener sin integración. ¿Cuál es la forma del integrando y cuál el valor de la integral? Comparar con el resultado de *b*).

b) ¿Es $\bar{y} > \frac{b}{2}$ o $\bar{y} < \frac{b}{2}$? Explicar la respuesta.

c) Hallar, por integración, $\bar{y}$ en función de n.

d) Completar la tabla usando el resultado del apartado *c*).

n	1	2	3	4
$\bar{y}$				

e) Hallar $\lim_{x \to \infty} \bar{y}$.

f) Dar una explicación geométrica del resultado de *e*).

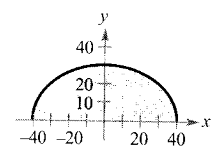
41. ***Un modelo matemático*** Un fabricante de vidrio debe aproximar el centro de masa del vidrio de la ventana de la figura de la página siguiente, en la que aparece superpuesto un sistema de coordenadas. Las medidas, en centímetros, para la mitad derecha de la pieza de vidrio simétrica vienen dadas en la tabla.

x	0	10	20	30	40
y	30	29	26	20	0

a) Usar la regla de Simpson para aproximar el centro de masa de ese vidrio.

b) Hallar, con ayuda de calculadora, un modelo polinómico de grado cuatro para esos datos.

c) Usar integración en la calculadora y el modelo anterior para aproximar el centro de masa del vidrio. Comparar el resultado con el del apartado *a*).



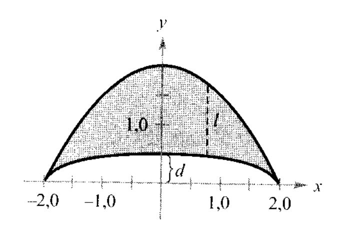
42. ***Un modelo matemático*** El fabricante de un bote desea aproximar el centro de masa de una sección del casco. En la figura se ha superpuesto un sistema de coordenadas. La tabla recoge las medidas, en pies, para la mitad derecha del prototipo simétrico de la figura.

x	0	0,5	1,0	1,5	2
l	1,50	1,45	1,30	0,99	0
d	0,50	0,48	0,43	0,33	0

a) Usar la regla de Simpson para aproximar el centro de masa de la sección del casco.

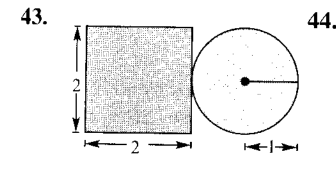
b) Hallar, con ayuda de caluladora, un modelo polinómico de grado cuatro para las dos curvas de la figura.

c) Usar integración en la calculadora y el modelo anterior para aproximar el centro de masa de la sección del casco. Comparar el resultado con el del apartado *a*).

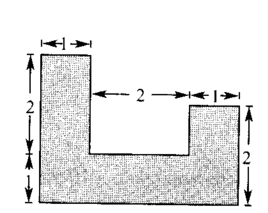


En los Ejercicios 43-46, introducir un sistema de coordenadas apropiado y hallar las coordenadas del centro de masa de la lámina plana. (La respuesta depende de la posición del sistema de coordenadas elegido.)

43.



44.



45.

46.

47. Hallar el centro de masa de la lámina del Ejercicio 43 en el supuesto de que la porción circular tuviera densidad doble que la parte cuadrada.

48. Hallar el centro de masa de la lámina del Ejercicio 43 en el supuesto de que la porción cuadrada tuviera densidad doble que la parte circular.

En los Ejercicios 49-52, usar el teorema de Pappus para calcular el volumen del sólido de revolución.

49. El toro generado al girar el círculo $(x-5)^2 + y^2 = 16$ en torno al eje y.

50. El toro generado al girar el círculo $x^2 + (y-3)^2 = 4$ en torno al eje x.

51. El sólido de revolución que se obtiene al hacer girar, en torno al eje x, la región acotada por las gráficas de $y = x$, $y = 4$ y $x = 0$.

52. El sólido de revolución que se obtiene al hacer girar, en torno al eje y, la región acotada por las gráficas de

$$y = \sqrt{x-1},\ y = 0,\ \text{y}\ x = 5$$

En los Ejercicios 53 y 54, usar el segundo teorema de Pappus. Si un segmento de una curva plana C gira en torno a un eje que no corta a la curva (excepto quizás en sus puntos terminales), el área S de la superficie de revolución resultante es el producto de la longitud de C por la distancia d recorrida por el centroide de C.

53. Se genera una esfera haciendo girar la gráfica de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ en torno al eje x. Usar la fórmula del área para hallar el centroide del semicírculo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

54. Calcular el área del toro generado al girar la gráfica de $(x-1)^2 + y^2 = 1$ en torno al eje y.

55. Sea $n \geqslant 1$ constante y consideremos la región acotada por $f(x) = x^n$, el eje x y $x = 1$. Hallar el centroide de la región. Cuando $n \to \infty$ ¿qué aspecto tiene la región y dónde está su centroide?



6.7 Presión y fuerza de un fluido

CONTENIDO ▪
Presión y fuerza de un fluido ▪



Presión y fuerza de un fluido

Los submarinistas saben bien que cuanto más profundo se sumerge un objeto en un fluido, mayor es la presión sobre él. La **presión** se define como la fuerza por unidad de área en la superficie de un cuerpo. Por ejemplo, como una columna de agua de 10 pies de altura y 1 pulgada cuadrada pesa 4,3 libras, la presión del fluido a 10 pies de profundidad es 4,3 libras/pulg^2*. A 20 pies, sería ya de 8,6 libras/pulg^2 y en general la presión es proporcional a la profundidad del objeto en el fluido.



BLAISE PASCAL (1623-1662)

Pascal es bien conocido por sus contribuciones a diversas áreas de las Matemáticas y de la Física, así como por su influencia sobre Leibniz. Aunque buena parte de su obra en Cálculo fue intuitiva y carente del rigor exigible en las modernas Matemáticas, Pascal anticipó muchos resultados relevantes.

DEFINICIÓN DE LA PRESIÓN DE UN FLUIDO

La **presión** de un objeto a una profundidad h en un líquido es

$$\text{Presión} = P = wh$$

donde w es la densidad de peso (el peso de la unidad de volumen) del líquido.

La tabla adjunta muestra varios pesos por unidad de volumen de fluidos comunes.

Alcohol etílico	49,4
Gasolina	41,43,0
Glicerina	78,6
Keroseno	51,2
Mercurio	849,0
Agua del mar	64,0
Agua	62,4

Al calcular la presión de un fluido puede usarse una ley física importante (y sorprendente), llamada **principio de Pascal**, que debe su nombre al matemático francés Blaise Pascal. El principio de Pascal establece que la presión ejercida por un fluido a profundidad h se transmite exactamente igual *en todas direcciones*. Así, en la Figura 6.69 la presión a la profundidad indicada es la misma para los tres objetos. Puesto que la presión del fluido viene dada en términos de fuerza por unidad de área ($P = F/A$), la fuerza de un fluido sobre una superficie de área A *sumergida horizontalmente* es

$$\text{Fuerza del fluido} = F = PA = (\text{presión})(\text{área})$$

* La presión total sobre un objeto sumergido a 10 pies de profundidad en el agua incluiría también, en realidad, la presión atmosférica, que al nivel del mar es de unas 14,7 libras/pulg^2.

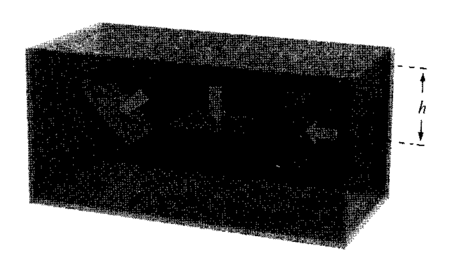


FIGURA 6.69
La presión a profundidad h es la misma para los tres objetos.

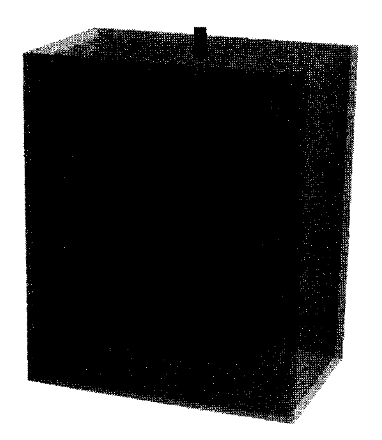


FIGURA 6.70
La fuerza del fluido sobre una lámina horizontal es igual a la presión del fluido por el área de la lámina.

EJEMPLO 1 Fuerza de un fluido sobre una lámina

Hallar la fuerza ejercida sobre una lámina metálica rectangular de 3 por 4 pies, sumergida en agua a 6 pies de profundidad (véase Figura 6.70).

Solución: Como el peso por unidad de volumen del agua es 62,4 libras/pie^3, la presión del fluido es

$$P = (62,4)(6) \qquad P = wh$$

$$= 374,4 \text{ libras por pie cuadrado}$$

El área total de la lámina es $A = (3)(4) = 12$ pies^2, así que la fuerza del fluido es

$$F = PA = \left(374,4 \frac{\text{libras}}{\text{pie cuadrado}}\right)(12 \text{ pies cuadrados})$$

$$= 4.492,8 \text{ libras}$$

Este resultado es independiente del tamaño del contenedor de agua. La fuerza ejercida por el fluido sería la misma en una piscina que en un lago. □

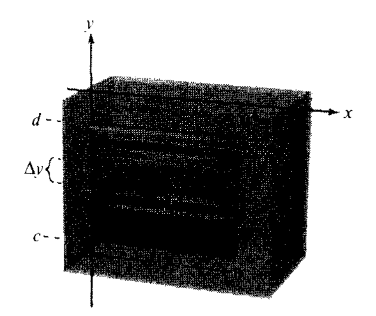


FIGURA 6.71
Para hallar la fuerza del fluido sobre una lámina vertical es necesario recurrir a los métodos del Cálculo.

En el Ejemplo 1, al ser la lámina rectangular y horizontal no hemos necesitado el Cálculo para resolverlo. Observemos ahora una superficie sumergida verticalmente, problema ya más difícil debido a que la presión no es constante sobre toda la superficie.

Consideremos la lámina de la Figura 6.71, sumergida verticalmente en un fluido de peso w por unidad de volumen. Para calcular la fuerza ejercida sobre una cara, entre las profundidades c y d, podemos partir el intervalo $[c, d]$ en n subintervalos, cada uno de anchura Δy. A continuación, tomamos un rectángulo representativo de anchura Δy y longitud $L(y_i)$, donde y_i está en el i-ésimo subintervalo. La fuerza ejercida sobre este rectángulo es

$$\Delta F_i = w(\text{profundidad})(\text{área})$$

$$= wh(y_i)L(y_i)\,\Delta y$$

La suma de las fuerzas sobre los n rectángulos es

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = w \sum_{i=1}^{n} h(y_i)L(y_i)\ \Delta y$$

Nótese que hemos considerado w constante y lo hemos factorizado fuera de la suma. Por tanto, el límite cuando $\|\Delta\| \to 0$ ($n \to \infty$) sugiere la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE LA FUERZA EJERCIDA POR UN FLUIDO

La fuerza F ejercida por un fluido de peso w por unidad de volumen sobre una región plana sumergida verticalmente en él, entre $y = c$ e $y = d$, es

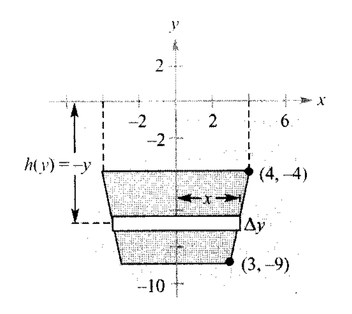
$$F = w \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(y_i)L(y_i)\ \Delta y = w\int_c^d h(y)L(y)\ dy$$

donde $h(y)$ denota la profundidad del fluido en y, y $L(y)$ la longitud horizontal de la región en y.

EJEMPLO 2 Fuerza del fluido sobre una superficie vertical

Una compuerta de una presa tiene forma de trapecio con las medidas que se especifican en la Figura 6.72*a*. ¿Cuál es la fuerza ejercida por el agua sobre la compuerta si la parte superior de ésta se halla a 4 metros de profundidad?

a) Compuerta de una presa



b) La fuerza ejercida por el fluido sobre la compuerta es 13.936 libras

FIGURA 6.72

Solución: Tenemos libertad para colocar los ejes x e y donde queramos con el fin de expresar el problema en términos matemáticos. Una forma conveniente consiste en tomar el eje y pasando por los puntos medios de sus lados paralelos y el eje x en la superficie del agua (véase Figura 6.72*b*). Así pues, la profundidad del agua, en pies, en y es

$$\text{Profundidad} = h(y) = -y$$

Para hallar la longitud $L(y)$ de la región en y, escribimos la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(3, -9)$ y $(4, -4)$:

$$y - (-9) = \frac{-4 - (-9)}{4 - 3}(x - 3)$$

$$y + 9 = 5(x - 3)$$

$$y = 5x - 24$$

$$x = \frac{y + 24}{5}$$

En la Figura 6.72*b* vemos que la longitud de la región en y es

$$\begin{aligned}\text{Longitud} &= 2x\\ &= \frac{2}{5}(y + 24)\\ &= L(y)\end{aligned}$$

Finalmente, integrando desde $y = -9$ hasta $y = -4$ obtenemos para la fuerza ejercida por el agua

$$\begin{aligned}F &= w\int_c^d h(y)L(y)\,dy\\ &= 62{,}4\int_{-9}^{-4}(-y)\left(\frac{2}{5}\right)(y + 24)\,dy\\ &= -62{,}4\left(\frac{2}{5}\right)\int_{-9}^{-4}(y^2 + 24y)\,dy\\ &= -62{,}4\left(\frac{2}{5}\right)\left[\frac{y^3}{3} + 12y^2\right]_{-9}^{-4}\\ &= -62{,}4\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{-1.675}{3}\right)\\ &= 13.936 \text{ libras}\end{aligned}$$

□

Nota. Hacer coincidir el eje x con la superficie del agua en el Ejemplo 2 era conveniente, pero arbitrario. Al elegir un sistema de coordenadas para describir una situación física, deben considerarse diversas posibilidades. Con frecuencia se simplifican los cálculos en la resolución de un problema si se localizan los ejes aprovechando las características especiales de la situación, en particular sus posibles simetrías.

EJEMPLO 3 Fuerza de un fluido sobre una superficie vertical

Una ventana de observación circular en un buque de investigación científica tiene un radio de 1 pie y su centro sumergido a 8 pies de profundidad bajo el agua, como muestra la Figura 6.73. Calcular la fuerza ejercida por el agua sobre la ventana.

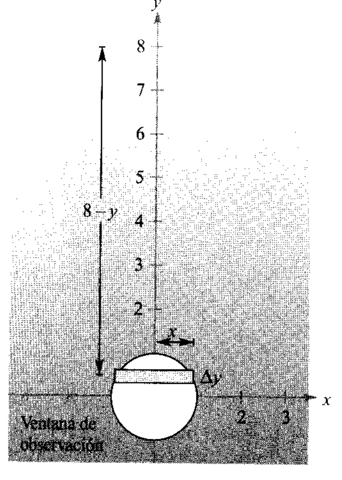


FIGURA 6.73
La fuerza ejercida por el fluido sobre la ventana es 1.608,5 libras.

Solución: Con el fin de sacar ventaja de la simetría, adoptamos como origen de coordenadas el centro de la ventana (véase Figura 6.73). De ese modo, la profundidad en y es

$$\text{Profundidad} = h(y) = 8 - y$$

La longitud horizontal de la ventana es $2x$, así que usando la ecuación del círculo, $x^2 + y^2 = 1$, para despejar x obtenemos

$$\text{Longitud} = 2x = 2\sqrt{1 - y^2} = L(y)$$

Finalmente, como y varía entre -1 y 1, tomando 64 libras/pie^3 como densidad de peso del agua de mar, vemos que

$$F = w\int_c^d h(y)L(y)\,dy$$
$$= 64\int_{-1}^{1} (8-y)(2)\sqrt{1-y^2}\,dy$$

A primera vista esta integral parece difícil de resolver. Sin embargo, si se rompe en dos partes y se aplica la simetría, la solución es simple.

$$F = 64(16)\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\,dy - 64(2)\int_{-1}^{1} y\sqrt{1-y^2}\,dy$$

La segunda integral es 0, ya que el integrando es impar y el intervalo de integración es simétrico respecto del origen. Además, reconocemos que la primera integral representa el área de un semicírculo de radio 1, luego

$$F = 64(16)\left(\frac{\pi}{2}\right) - 64(2)(0)$$
$$= 512\pi$$
$$\approx 1.608{,}5 \text{ libras}$$

Por tanto, la fuerza ejercida por el agua sobre la ventana es de 1.608,5 libras. □

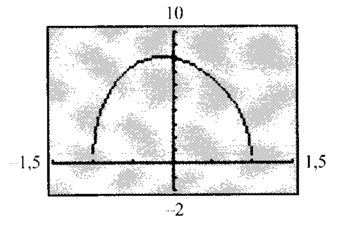


FIGURA 6.74
f no es derivable en $x = \pm 1$.



Se puede verificar el resultado del Ejemplo 3 utilizando la regla de Simpson para aproximar el valor de

$$128\int_{-1}^{1} (8-x)\sqrt{1-x^2}\,dx$$

Sin embargo, la gráfica de

$$f(x) = (8-x)\sqrt{1-x^2}$$

nos hace ver que f no es derivable en $x = \pm 1$. Esto significa que no es aplicable el Teorema 4.19 de la Sección 4.6 para hallar el error en la regla de Simpson y, en esas circunstancias, conocer un valor aproximado carece de interés. Intente aproximar esa integral con ayuda de la calculadora.

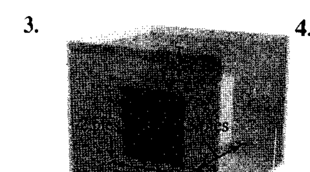
Ejercicios de la Sección 6.7

Fuerza sobre una lámina sumergida En los Ejercicios 1 y 2, se da el área de la cara superior de una lámina metálica, sumergida a 5 pies de profundidad en agua. Calcular la fuerza que ejerce el agua sobre la cara superior de la lámina.

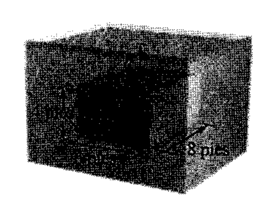
1. 3 pies cuadrados. **2.** 18 pies cuadrados.

Fuerza de flotación En los Ejercicios 3 y 4, hallar la fuerza de flotación de un sólido en forma de paralelepípedo de las dimensiones que se especifican, sumergido en agua con su cara superior paralela a la superficie del agua. La fuerza de flotación es la diferencia entre las fuerzas ejercidas por el fluido sobre las caras superior e inferior del sólido.

3.



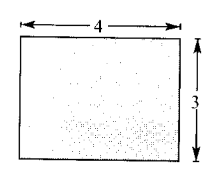
4.



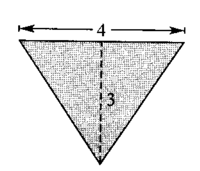
Fuerza de un fluido sobre la pared de un depósito En los Ejercicios 5-10, calcular la fuerza del fluido sobre la pared vertical del depósito, cuyas dimensiones se dan en pies. Se supone que el depósito está lleno de agua.



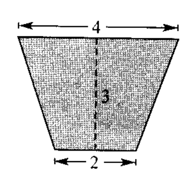
5. Rectángulo



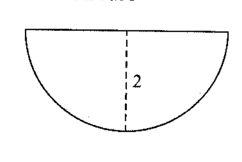
6. Triángulo



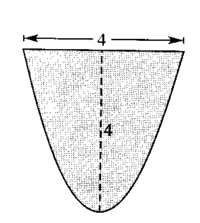
7. Trapecio



8. Semicírculo

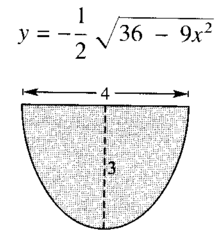


9. Parábola, $y = x^2$



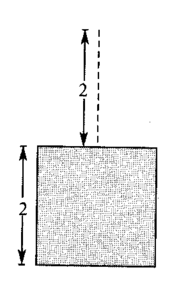
10. Semielipse

$$y = -\frac{1}{2}\sqrt{36 - 9x^2}$$

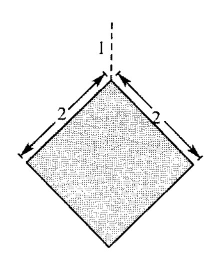


Fuerza del agua En los Ejercicios 11-14, hallar la fuerza ejercida por el fluido sobre una placa sumergida en agua (que pesa 1.000 kg/m^3), cuyas dimensiones vienen dadas en cada figura.

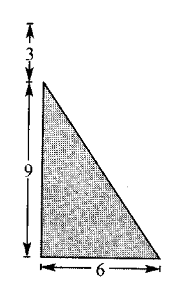
11. Cuadrado



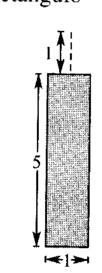
12. Rombo



13. Triángulo

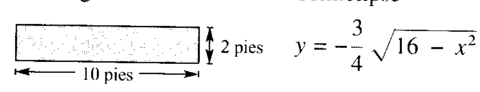


14. Rectángulo

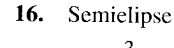


Fuerza sobre una estructura de hormigón En los Ejercicios 15-18, la figura muestra la pared vertical de una estructura de hormigón, que pesa 140,7 libras/pie^3. Determinar la fuerza ejercida sobre la pared.

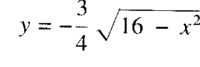
15. Rectángulo

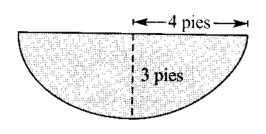


16. Semielipse

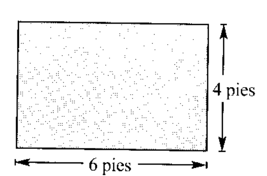


$$y = -\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$$

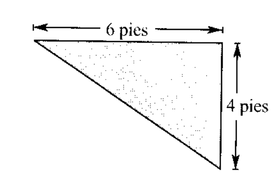




17. Rectángulo



18. Triángulo



19. ***Fuerza de fluido de la gasolina*** Un depósito cilíndrico de gasolina (que pesa 42 libras/pie^3) está colocado

con su eje horizontal. Calcular la fuerza ejercida por la gasolina sobre una de las paredes circulares si el depósito está medio lleno y el diámetro es 3 pies.

20. ***Fuerza de fluido de la gasolina*** Repetir el Ejercicio 19 suponiendo el depósito completamente lleno. (Calcular una integral mediante una fórmula geométrica y la otra observando que el integrando es impar.)

21. ***Fuerza de un fluido sobre una placa circular*** Una placa circular de radio r pies está sumergida verticalmente en un fluido que pesa w libras/pie^3. El centro del círculo está a k ($k > r$) pies de profundidad. Probar que la fuerza ejercida por el fluido sobre la superficie de la placa es

$$F = wk(\pi r^2)$$

22. ***Fuerza de un fluido sobre una lámina rectangular*** Una lámina rectangular de base b y altura h (ambos en pies) está sumergida verticalmente en un fluido que pesa w libras/pie^3. Su centro está a k pies de profundidad. Comprobar que la fuerza ejercida por el fluido sobre esa lámina es

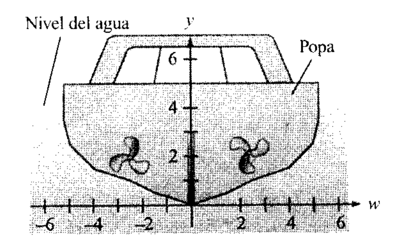
$$F = wkhb$$

23. ***Portilla de un submarino*** Una portilla vertical de un submarino, sumergido en el agua, es un cuadrado de 1 pie de lado. Hallar la fuerza del fluido sobre ella, suponiendo que el centro del cuadrado está a 15 pies de profundidad.

24. ***Portilla de un submarino*** Repetir el ejercicio anterior para una portilla circular de 1 pie de radio, cuyo centro está a 15 pies de profundidad.

25. ***Diseño de yates*** La figura muestra una sección de un yate con un sistema de coordenadas superpuesto. La tabla da, en pies, la anchura w en ciertos valores de y. Estimar la fuerza del fluido sobre el casco del yate.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
w	0	3	5	8	9	10	10,25	10,5	10,5



26. ***Compuerta de un canal de riego*** La sección vertical de una compuerta de un canal de riego se ajusta al modelo

$$f(x) = \frac{5x^2}{x^2 + 4}$$

donde x se mide en pies y $x = 0$ corresponde al centro del canal. Usar integración en la calculadora para estimar la fuerza del fluido sobre la compuerta si hay 3 pies de profundidad de agua.

En los Ejercicios 27 y 28, usar integración en la calculadora para estimar la fuerza ejercida por el agua sobre la placa vertical acotada por el eje x y la mitad superior de la gráfica de la ecuación. Supóngase la base de la placa a 12 pies de profundidad bajo el nivel del agua.

27. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$

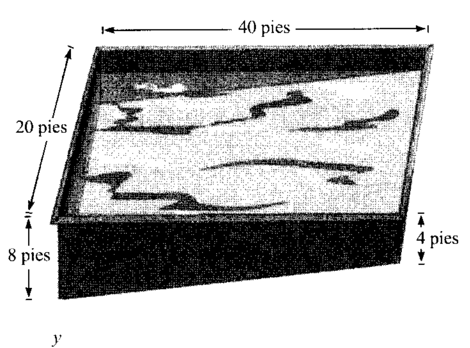
28. $\dfrac{x^2}{28} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

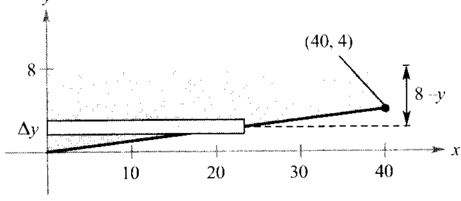
29. ***Para pensar***

a) Aproximar la profundidad del agua en el depósito del Ejercicio 5 si la fuerza del fluido es la mitad de la que produce cuando está lleno.

b) Explicar por qué la respuesta al apartado *a*) no es $\frac{3}{2}$.

30. ***Diseño de una piscina*** La piscina de la figura tiene como base un plano inclinado. Calcular la fuerza ejercida por el agua sobre cada una de las paredes verticales.





(*Ayuda:* Hay que escribir dos integrales, una para $0 \leqslant y \leqslant 4$ y otra para $4 \leqslant y \leqslant 8$.)

Ejercicios de repaso del Capítulo 6

En los Ejercicios 1-10, dibujar un croquis de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones y calcular su área.

1. $y = \dfrac{1}{x^2}, y = 0, x = 1, x = 5$ **2.** $y = \dfrac{1}{x^2}, y = 4, x = 5$

3. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}, y = 0, x = -1, x = 1$

4. $x = y^2 - 2y, x = -1, y = 0$

5. $y = x, y = x^3$

6. $x = y^2 + 1, x = y + 3$

7. $y = e^x, y = e^2, x = 0$

8. $y = \operatorname{cosec} x, y = 2$ (una región)

9. $y = \operatorname{sen} x, y = \cos x, \dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{4}$

10. $x = \cos y, x = \dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{3} \leqslant y \leqslant \dfrac{7\pi}{3}$

En los Ejercicios 11-14, representar en la calculadora la región acotada por las gráficas de las ecuaciones y hallar, usando integración en la calculadora, el área de la región.

11. $y = x^2 - 8x + 3, y = 3 + 8x - x^2$

12. $y = x^2 - 4x + 3, y = x^3, x = 0$

13. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, y = 0, x = 0$

14. $y = x^4 - 2x^2, y = 2x^2$

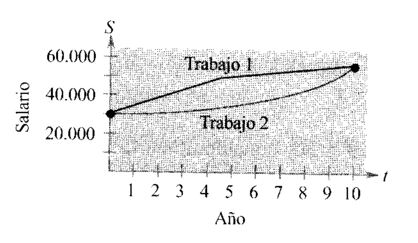
Área En los Ejercicios 15-18, escribir integrales que representen el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, usando rectángulos representativos horizontales y verticales. Calcular el área evaluando la integral que sea más sencilla.

15. $x = y^2 - 2y, x = 0$ **16.** $y = \sqrt{x - 1}, y = \dfrac{x - 1}{2}$

17. $y = 1 - \dfrac{x}{2}, y = x - 2, y = 1$

18. $y = \sqrt{x - 1}, y = 2, y = 0, x = 0$

19. ***Para pensar*** Una persona tiene dos ofertas de trabajo. El salario inicial es \$30.000 en ambas y a los 10 años de servicio, cada una de ellas pagará \$56.000. El incremento salarial en cada una está dibujado en la figura. Desde un punto de vista estrictamente monetario, ¿cuál es la mejor oferta? Explicar la respuesta.



20. ***Ventas por tarjetas de crédito*** Las ventas anuales s, en millones de dólares, de VISA, Mastercard y American Express, entre 1983 y 1992, admiten estos modelos:

$s = 15{,}9696t - 6{,}318$	VISA
$s = 8{,}581t + 6{,}965$	Mastercard
$s = 6{,}214t + 10{,}345$	American Express

donde $3 \leqslant t \leqslant 12$ representa el período de 10 años que va de 1983 a 1992. (*Fuente: Credit Card News.*)

a) En ese período ¿en cuánto superaron las ventas de VISA a las de Mastercard?

b) ¿Y las de VISA a las de American Express?

Volumen En los Ejercicios 21-28, calcular el volumen del sólido generado por revolución de la región plana acotada por las ecuaciones en torno a la recta indicada.

21. $y = x, y = 0, x = 4$
a) el eje x *b*) el eje y
c) la recta $x = 4$ *d*) la recta $x = 6$

22. $y = \sqrt{x}, y = 2, x = 0$
a) el eje x *b*) la recta $y = 2$
c) el eje y *d*) la recta $x = -1$

23. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ *a*) el eje y (esferoide oblongo)
b) el eje x (esferoide prolato)

24. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *a*) el eje y (esferoide oblongo)
b) el eje x (esferoide prolato)

25. $y = \dfrac{1}{x^4 + 1}, y = 0, x = 0, x = 1$
en torno al eje y

26. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, y = 0, x = -1, x = 1$
en torno al eje x

27. $y = \dfrac{1}{(1 + \sqrt{x - 2})}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 6$
en torno al eje y

28. $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$
en torno al eje x

En los Ejercicios 29 y 30, consideramos la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x\sqrt{x + 1}$ e $y = 0$.

29. ***Área*** Calcular el área de la región.

30. ***Volumen*** Hallar el volumen del sólido generado al hacer girar esa región en torno al *a*) eje x y *b*) eje y.

31. ***Gasolina en un depósito*** Un depósito de gasolina es un esferoide oblato generado al hacer girar, en torno al eje y, la región acotada por la gráfica de $(x^2/16) + (y^2/9) = 1$, donde x e y se miden en pies. Hallar la profundidad de la gasolina cuando el depósito está lleno en un cuarto de su capacidad.

32. ***Tamaño de la base*** La base de un sólido es un círculo de radio a y sus secciones verticales son triángulos equiláteros. Calcular el radio del círculo si el sólido tiene 10 m^3 de volumen.

Longitud de arco En los Ejercicios 33 y 34, hallar la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo indicado.

33. $f(x) = \dfrac{4}{5}x^{5/4}$, $[0, 4]$ **34.** $y = \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{2x}$, $[1, 3]$

35. ***Longitud de una catenaria*** Un cable de suspensión de un puente tiene la forma de una catenaria de ecuación

$$y = 300 \cosh\left(\frac{x}{2.000}\right) - 280, \quad -2.000 \leqslant x \leqslant 2.000$$

donde x e y se miden en pies. Utilizar la calculadora para estimar la longitud del cable.

36. ***Aproximación*** Determinar qué valor aproxima mejor la longitud de arco dada por la integral

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + (\sec^2 x)^2}\, dx$$

(Elegir atendiendo a un dibujo del arco, no haciendo cálculos.)
a) -2 *b*) 1 *c*) π *d*) 4 *e*) 3

37. ***Área de una superficie*** Hallar, por integración, el área lateral de un cilindro circular recto de altura 4 y radio 3.

38. ***Área de una superficie*** La región acotada por las gráficas de $y = 2\sqrt{x}$, $y = 0$, y $x = 3$ gira en torno al eje x. Hallar el área superficial del sólido generado.

39. ***Trabajo*** Determinar el trabajo realizado al estirar un muelle desde su longitud natural de 10 pulgadas hasta 15 pulgadas, sabiendo que es necesaria una fuerza de 4 libras para estirarlo 1 cm desde su posición natural.

40. ***Trabajo*** Determinar el trabajo realizado al estirar un muelle desde su longitud natural de 9 pulgadas hasta 18 pulgadas, sabiendo que es necesaria una fuerza de 50 libras para ello.

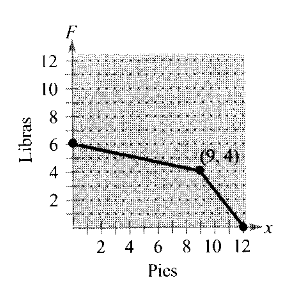
41. ***Trabajo*** Un pozo de agua tiene 8 pulgadas de diámetro y 175 pies de profundidad. Si el agua llega a 25 pies de la parte superior del pozo, calcular el trabajo necesario para vaciarlo, supuesto que durante el vaciado no entra agua en él.

42. ***Trabajo*** Repetir el Ejercicio 41 suponiendo ahora que está entrando agua en el pozo a razón de 4 galones por minuto y que la bomba vacía 12 galones por minuto. ¿Cuántos galones hay que bombear en este caso?

43. ***Trabajo*** Una cadena de 10 pies de longitud pesa 5 libras/pie y está colgada de una plataforma situada a 20 pies sobre el nivel del suelo. ¿Cuánto trabajo hay que hacer para subir toda la cadena hasta la plataforma?

44. ***Trabajo*** El trabajo realizado por una fuerza variable cuadrática, del tipo $F = ax^2$, en una presa es de 80 libras-pies. La presa se mueve 4 pies. Hallar a.

45. ***Trabajo*** Calcular el trabajo realizado por la fuerza de la figura.



Centroides En los Ejercicios 46-49, hallar el centroide de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

46. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$

47. $y = x^2$, $y = 2x + 3$

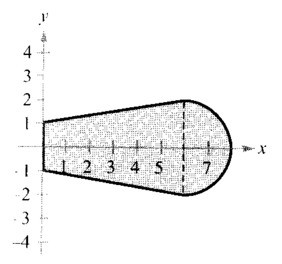
48. $y = a^2 - x^2$, $y = 0$

49. $y = x^{2/3}$, $y = \dfrac{1}{2}x$

50. ***Centroide*** Un cabrestante, situado en lo alto de un edificio, a 200 pies sobre el suelo, utiliza un cable que pesa 4 libras/pie. Hallar el trabajo requerido para izar el cable si

a) un extremo está al nivel del suelo,

b) hay un peso de 300 libras atado al extremo del cable.



51. ***Centroide*** Corte una pieza irregular en una cartulina.

a) Coloque un lápiz vertical bajo la pieza y muévalo hasta dar con el centroide.

b) Divida la pieza en elementos representativos. Efectúe las medidas pertinentes y estime numéricamente el centroide. Compare el resultado con el del apartado *a*).

52. ***Fuerza de un fluido*** Una piscina rectangular, de 40 por 20 pies, tiene como fondo un plano inclinado, con profundidades que van de 5 a 10 pies. Si está llena de agua, calcular la fuerza sobre las paredes verticales.

53. ***Fuerza de un fluido*** Probar que la fuerza de un fluido sobre cualquier región vertical en un líquido es el producto del peso por unidad de volumen del líquido, el área de la región y la profundidad del centroide de la región.

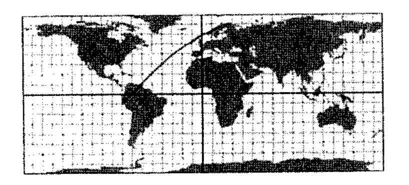
54. ***Fuerza de un fluido*** Usando el resultado del Ejercicio 53, calcular la fuerza del fluido sobre una cara de una placa circular vertical de 4 pies de radio, sumergida en agua con su centro a una profundidad de 5 pies.

Capítulo 7

MOTIVACIÓN DEL CAPÍTULO



Vuelo con rumbo constante de 45°.



Mapa plano usual: vuelo con rumbo constante de 45°.

El mapa de Mercator

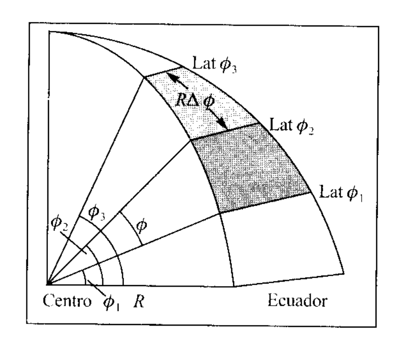
En el vuelo y en la navegación, los pilotos desean disponer de un rumbo fijo. Eso resulta difícil en un mapa plano usual, porque una trayectoria de rumbo fijo aparece en ellos en forma de línea curva, como muestran las dos primeras figuras adjuntas.

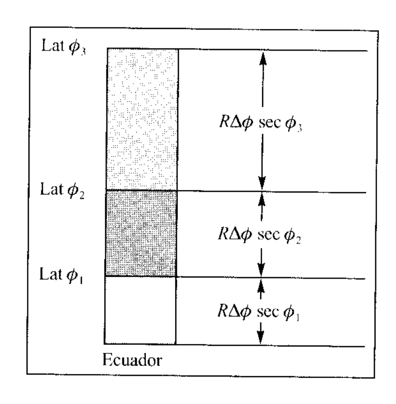
Para que esas líneas aparezcan como rectas en un mapa plano, el geógrafo flamenco Gerardus Mercator (1512-1594) se dio cuenta de que las líneas de latitud constante han de sufrir un factor de escala sec ϕ, donde ϕ denota el ángulo de latitud. Para que el mapa preserve los ángulos entre las líneas de latitud y las de longitud, también estas últimas deben sufrir esa misma dilatación de factor sec ϕ en latitud ϕ. En el mapa de Mercator, las líneas de latitud constante no son equidistantes, como vemos en la figura del margen de la página siguiente.

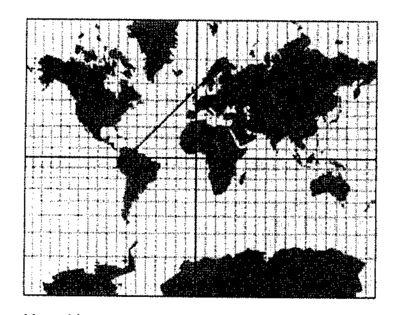
Para calcular estas longitudes verticales, imaginemos un globo con líneas de latitud marcadas cada $\Delta\phi$ radianes, con $\Delta\phi = \phi_i - \phi_{i-1}$. La longitud de arco de líneas de longitud sucesivas es $R\Delta\phi$. En el mapa de Mercator, la distancia vertical entre el ecuador y la primera línea de latitud es $R\Delta\phi \sec \phi_1$. La distancia vertical entre la primera y la segunda líneas de latitud es $R\Delta\phi \sec \phi_2$, la distancia vertical entre la segunda y la tercera líneas de latitud es $R\Delta\phi \sec \phi_3$, etc. (véase figura de la parte superior de la página siguiente).

Sobre el globo, el ángulo entre líneas de latitud consecutivas es $\Delta\phi$, y la longitud de arco entre ellas es $R\Delta\phi$ (figura izquierda de la parte superior de la página siguiente). En un mapa de Mercator la distancia vertical entre la $(i-1)$ y la i-ésima línea de latitud es $R\Delta\phi \sec \phi_i$ y la distancia del Ecuador a la i-ésima línea de latitud es aproximadamente

$$R\Delta\phi \sec \phi_1 + R\Delta\phi \sec \phi_2 + \cdots + R\Delta\phi \sec \phi_i$$







Mapa Mercator: vuelo con rumbo constante de 45°.

CUESTIONES

1. Escribir en notación sigma una expresión para calcular a qué distancia del Ecuador hay que dibujar la línea de latitud ϕ_n.
2. En los cálculos anteriores Mercator apreció que cuanto menor era el valor asignado a $\Delta\phi$ mejor era el mapa obtenido (en el sentido de que las rectas se podían usar muy exactamente como rumbos fijos). A partir de su conocimiento del Cálculo, ¿cómo podría usar esa observación de Mercator para calcular la distancia vertical total que dista una línea de latitud del Ecuador?
3. Usar el resultado de la Cuestión 2 para determinar a qué distancia del Ecuador han de colocarse las líneas de latitudes 10°, 20°, 30°, 40° y 50°. (Usar un globo de radio $R = 6$ pulgadas.)
4. ¿Hay algún problema cuando intenta calcular la distancia del Polo Norte al Ecuador?

7

Técnicas de integración, regla de L'Hôpital e integrales impropias



7.1 Reglas básicas de integración

Adaptación de integrandos a las reglas básicas

En este capítulo presentaremos varias técnicas de integración que extienden de forma muy notable la familia de integrales resolubles por aplicación de las reglas básicas (véase pág. 442). Un paso crucial en la resolución de integrales consiste en reconocer la regla de integración más adecuada, cosa nada fácil. Como muestra el Ejemplo 1, ligeras diferencias en el integrando pueden exigir técnicas de resolución muy distintas.

EXPLORACIÓN

Comparación de tres integrales similares ¿Cuál de las siguientes integrales, si hay alguna, puede calcularse usando las 20 reglas básicas de integración? Para aquellas en que sea posible, hallarlas así. Para las que no sea factible, explicar la razón.

a) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

EJEMPLO 1 Comparación de tres integrales parecidas

Hallar las integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2+9}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int \frac{4x}{x^2+9}\,dx$ *c*) $\displaystyle\int \frac{4x^2}{x^2+9}\,dx$

Solución:

a) Usamos la regla de la arcotangente con $u = x$ y $a = 3$

$$\begin{aligned}\int \frac{4}{x^2+9}\,dx &= 4\int \frac{1}{x^2+3^2}\,dx\\ &= 4\left(\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)+C\\ &= \frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C\end{aligned}$$

b) Aquí no es aplicable la regla de la arcotangente porque el numerador contiene un factor x. Consideremos la regla log, con $u = x^2 + 9$. Entonces $du = 2x\,dx$, de modo que

$$\begin{aligned}\int \frac{4x}{x^2+9}\,dx &= 2\int \frac{2x\,dx}{x^2+9}\\ &= 2\int \frac{du}{u}\\ &= 2\ln|u| + C\\ &= 2\ln(x^2+9) + C\end{aligned}$$

c) Como el grado del numerador y el del denominador son iguales, dividimos antes de nada para reexpresar el integrando, que es una función racional impropia, como suma de un polinomio y de una función racional propia.

| Nota. Observemos que en el Ejemplo 1*c* ha sido necesaria el Álgebra antes de aplicar la regla de integración y que la resolución ha requerido después más de una de esas reglas.

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2}{x^2+9}\,dx &= \int\left(4 - \frac{36}{x^2+9}\right)dx\\ &= \int 4\,dx - 36\int \frac{1}{x^2+9}\,dx\\ &= 4x - 36\left(\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right) + C\\ &= 4x - 12\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 2 Necesidad de dos reglas básicas para resolver una integral

Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$

Solución: Para empezar, escribimos la integral como suma de dos, a las que aplicamos, a continuación, las reglas de las potencias y del arcsen.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 (4-x^2)^{-1/2}(-2x)\,dx + 3\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}\,dx\\ &= \left[-(4-x^2)^{1/2} + 3\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}\right]_0^1\\ &= \left(-\sqrt{3} + \frac{1}{2}\pi\right) - (-2+0)\\ &\approx 1{,}839\end{aligned}$$

□

(Véase Figura 7.1.)

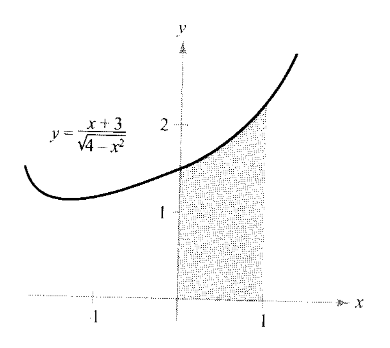


FIGURA 7.1
El área de la región es aproximadamente 1,839.

La regla de Simpson permite hallar una buena aproximación del valor de la integral del Ejemplo 2 (con $n = 10$ da 1,839). No obstante, al utilizar integración numérica hay que tener en cuenta que la regla de Simpson no da buenas aproximaciones cuando uno de los límites de integración está cerca de una asíntota vertical. Por ejemplo, por el teorema fundamental del Cálculo sabemos que

$$\int_0^{1,99} \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \approx 6,213$$

La regla de Simpson con $n = 10$ da para esta integral un valor aproximado de 6,889.

EJEMPLO 3 Una sustitución relacionada con $a^2 - u^2$

Hallar $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}\,dx$.

Solución: El radical del denominador se puede expresar

$$\sqrt{a^2-u^2} = \sqrt{4^2-(x^3)^2}$$

así que intentamos la sustitución $u = x^3$. Entonces $du = 3x^2\,dx$ y, por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}\,dx &= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{16-(x^3)^2}}\\ &= \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4^2-u^2}}\\ &= \frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{u}{4} + C\\ &= \frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{x^3}{4} + C\end{aligned}$$

□

ADVERTENCIA Las reglas 18, 19 y 20 de la página 442 contienen expresiones con la suma o la diferencia de dos cuadrados:

$$a^2 - [f(x)]^2$$
$$a^2 + [f(x)]^2$$
$$[f(x)]^2 - a^2$$

Con este tipo de expresiones, hay que considerar la posibilidad de una sustitución $u = f(x)$, como se ha hecho en el Ejemplo 3.

Curiosamente, dos de las reglas de integración que se pasan por alto con más facilidad son la regla log y la regla de las potencias. Los dos próximos ejemplos muestran cómo pueden estar camufladas.

EJEMPLO 4 Una forma disfrazada de la regla log

Hallar $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

Solución: Parece que esta integral no se adapta a ninguna regla básica. Sin embargo, la forma de cociente sugiere la regla log. Si hacemos $u = 1 + e^x$, con

lo que $du = e^x\,dx$, podemos conseguir el du necesario sin más que sumar y restar e^x en el numerador:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx \qquad \text{Sumar y restar } e^x \text{ en el numerador}$$

$$= \int \left(\frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx$$

$$= \int dx - \int \frac{e^x\,dx}{1+e^x}$$

$$= x - \ln(1+e^x) + C$$

□

Nota. En general, hay más de un camino para resolver un problema de integración. Sin ir más lejos, en el Ejemplo 4 multiplique numerador y denominador por e^{-x} para obtener una integral de la forma $-\int du/u$. Vea si puede llegar a la solución por este procedimiento. (¡Cuidado! La respuesta puede adoptar aspectos distintos.)

EJEMPLO 5 Una forma disfrazada de la regla de las potencias

Hallar $\int (\text{ctg } x)[\ln(\text{sen } x)]\,dx$.

Solución: De nuevo, la integral no parece ajustarse a ninguna regla básica. Ahora bien, basta ensayar las dos posibles elecciones de sustitución como u ($u = \text{ctg } x$ y $u = \ln \text{sen } x$), para comprobar que la segunda es apropiada, ya que

$$u = \ln \text{sen } x$$

$$du = \frac{\cos x}{\text{sen } x}\,dx$$

$$du = \text{ctg } x\,dx$$

En consecuencia,

$$\int (\text{ctg } x)[\ln(\text{sen } x)]\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(\text{sen } x)]^2 + C$$

□

Nota. En el Ejemplo 5, intente *verificar* que la derivada de

$$\frac{1}{2}[\ln(\text{sen } x)]^2 + C$$

es el integrando original.

A menudo es posible recurrir a identidades trigonométricas con el fin de adaptar integrandos a las reglas básicas.

EJEMPLO 6 Aplicación de las identidades trigonométricas

Hallar $\int \operatorname{tg}^2 2x\,dx$.



Si tiene acceso a paquetes informáticos de integración simbólica, intente hallar con ellos las integrales de esta sección. Compare la forma de la primitiva dada por ellos con la obtenida a mano. A veces parecen muy diferentes, aunque sean iguales. Por ejemplo, ¿por qué la primitiva $\ln 2x + C$ es equivalente a la primitiva $\ln x + C$?

Solución: Aunque $\operatorname{tg}^2 u$ no está en la lista de las reglas básicas, sí está $\sec^2 u$. Eso sugiere usar la identidad $\operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u - 1$. Si hacemos $u = 2x$, entonces $du = 2\,dx$, con lo que

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{tg}^2 2x\,dx &= \frac{1}{2}\int \operatorname{tg}^2 u\,du \\
&= \frac{1}{2}\int (\sec^2 u - 1)\,du \\
&= \frac{1}{2}\int \sec^2 u\,du - \frac{1}{2}\int du \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{tg} u - \frac{u}{2} + C \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x - x + C
\end{aligned}$$

□

Cerramos la sección con un compendio de los procedimientos comunes para adaptar integrandos a las reglas básicas de integración.

Procedimientos de ajuste de integrandos a las reglas básicas

Técnica	*Ejemplo*
Desarrollar (el numerador)	$(1 + e^x)^2 = 1 + 2e^x + e^{2x}$
Separar el numerador	$\dfrac{1+x}{x^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{x}{x^2+1}$
Completar el cuadrado	$\dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$
Dividir la función racional impropia	$\dfrac{x^2}{x^2+1} = 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$
Sumar y restar términos en el numerador	$\dfrac{2x}{x^2+2x+1} = \dfrac{2x+2-2}{x^2+2x+1} = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+1} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$
Usar identidades trigonométricas	$\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$
Multiplicar y dividir por el conjugado pitagórico	$\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x} = \left(\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x}\right)\left(\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right) = \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x}$ $= \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \sec^2 x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

Nota. Recordemos que se pueden separar los numeradores, pero no los denominadores. Atención al siguiente error, frecuente cuando se trata de ajustar integrandos a las reglas básicas:

$$\frac{1}{x^2+1} \neq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1} \qquad \text{No separar el denominador}$$

Ejercicios de la Sección 7.1

En los Ejercicios 1-4, seleccionar la primitiva correcta.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

a) $2\sqrt{x^2+1}+C$ *b)* $\sqrt{x^2+1}+C$

c) $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}+C$ *d)* $\ln(x^2+1)+C$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x^2+1}$

a) $\ln\sqrt{x^2+1}+C$ *b)* $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}+C$

c) $\operatorname{arctg} x + C$ *d)* $\ln(x^2+1)+C$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2+1}$

a) $\ln\sqrt{x^2+1}+C$ *b)* $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}+C$

c) $\operatorname{arctg} x + C$ *d)* $\ln(x^2+1)+C$

4. $\dfrac{dy}{dx} = x\cos(x^2+1)$

a) $2x\operatorname{sen}(x^2+1)+C$ *b)* $-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x^2+1)+C$

c) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x^2+1)+C$ *d)* $-2x\operatorname{sen}(x^2+1)+C$

En los Ejercicios 5-14, seleccionar la fórmula básica de integración útil para hallar la integral. Identificar u y a cuando haya lugar.

5. $\int (3x-2)^4\,dx$ **6.** $\int \dfrac{2t-1}{t^2-t+2}\,dt$

7. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}(1-2\sqrt{x})}\,dx$ **8.** $\int \dfrac{2}{(2t-1)^2+4}\,dt$

9. $\int \dfrac{3}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ **10.** $\int \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

11. $\int t\operatorname{sen} t^2\,dt$ **12.** $\int \sec 3x\operatorname{tg} 3x\,dx$

13. $\int \cos x\, e^{\operatorname{sen} x}\,dx$ **14.** $\int \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$

En los Ejercicios 15-46, hallar la integral indefinida.

15. $\int (-2x+5)^{3/2}\,dx$ **16.** $\int \dfrac{2}{(t-9)^2}\,dt$

17. $\int \left[v + \dfrac{1}{(3v-1)^3}\right] dv$ **18.** $\int x\sqrt{4-2x^2}\,dx$

19. $\int \dfrac{t^2-3}{-t^3+9t+1}\,dt$ **20.** $\int \dfrac{2x}{x-4}\,dx$

21. $\int \dfrac{x^2}{x-1}\,dx$ **22.** $\int \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-4}}\,dx$

23. $\int \dfrac{e^x}{1+e^x}\,dx$ **24.** $\int \left(\dfrac{1}{3x-1} - \dfrac{1}{3x+1}\right) dx$

25. $\int (1+2x^2)^2\,dx$ **26.** $\int x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3 dx$

27. $\int x\cos 2\pi x^2\,dx$ **28.** $\int \sec 4u\,du$

29. $\int \operatorname{cosec} \pi x \operatorname{ctg} \pi x\,dx$ **30.** $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

31. $\int e^{5x}\,dx$ **32.** $\int \operatorname{cosec}^2 x e^{\operatorname{ctg} x}\,dx$

33. $\int \dfrac{2}{e^{-x}+1}\,dx$ **34.** $\int \dfrac{1}{2e^x-3}\,dx$

35. $\int \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$ **36.** $\int \dfrac{1}{\sec x - 1}\,dx$

37. $\int \dfrac{2t-1}{t^2+4}\,dt$ **38.** $\int \dfrac{3}{t^2+1}\,dt$

39. $\int \dfrac{-1}{\sqrt{1-(2t-1)^2}}\,dt$ **40.** $\int \dfrac{1}{4+3x^2}\,dx$

41. $\int \dfrac{\operatorname{tg}(2/t)}{t^2}\,dt$ **42.** $\int \dfrac{e^{1/t}}{t^2}\,dt$

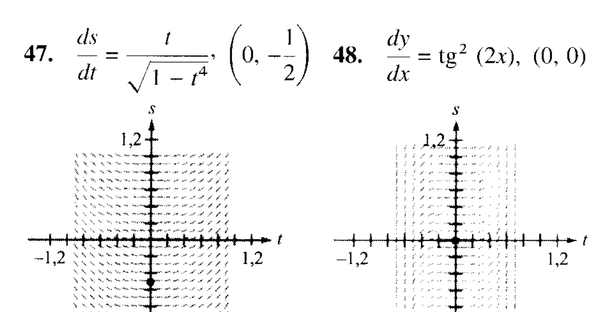
43. $\int \dfrac{3}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$ **44.** $\int \dfrac{1}{(x-1)\sqrt{4x^2-8x+3}}\,dx$

45. $\int \dfrac{4}{4x^2+4x+65}\,dx$ **46.** $\int \dfrac{1}{\sqrt{2-2x-x^2}}\,dx$

Campos de direcciones En los Ejercicios 47 y 48, se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo de direcciones. *a)* Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial sobre el campo de direcciones, una de las cuales pase por el punto indicado. *b)* Hallar, por integración, la solución particular de la ecuación diferencial y representar esta

solución en la calculadora. Comparar el resultado con los dibujos del apartado *a*).

47. $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{t}{\sqrt{1 - t^4}}, \ \left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$ **48.** $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}^2 (2x), \ (0, 0)$



En los Ejercicios 49-52, resolver la ecuación diferencial.

49. $\dfrac{dy}{dx} = (1 + e^x)^2$ **50.** $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{(1 + e^t)^2}{e^t}$

51. $(4 + \operatorname{tg}^2 x)y' = \sec^2 x$ **52.** $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{4x^2 - 1}}$

En los Ejercicios 53-60, hallar la integral indefinida y verificar los resultados usando integración en la calculadora.

53. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx$ **54.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos t \, dt$

55. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2} \, dx$ **56.** $\displaystyle\int_1^e \frac{1 - \ln x}{x} \, dx$

57. $\displaystyle\int_0^4 \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 9}} \, dx$ **58.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{x - 2}{x} \, dx$

59. $\displaystyle\int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{4 + 9x^2} \, dx$ **60.** $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}} \, dx$

En los Ejercicios 61-64, usar integración simbólica para hallar la integral y representar dos primitivas. Describir la relación entre sus gráficas.

61. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 4x + 13} \, dx$ **62.** $\displaystyle\int \frac{x - 2}{x^2 + 4x + 13} \, dx$

63. $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} \theta} \, d\theta$ **64.** $\displaystyle\int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^3 dx$

65. Determinar valores de las constantes a y b tales que

$$\operatorname{sen} x + \cos x = a \operatorname{sen} (x + b)$$

Usar ese resultado para integrar

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}$$

66. ***Para pensar*** Representar en la calculadora la función $f(x) = \frac{1}{5}(x^3 - 7x^2 + 10x)$. Usando la gráfica, decidir si el valor de

$$\int_0^5 f(x) \, dx$$

es positivo o negativo. Explicar la respuesta.

Aproximación En los Ejercicios 67 y 68, averiguar qué valor aproxima mejor el área de la región entre la gráfica de la función y el eje x, en el intervalo que se especifica. (Elegir atendiendo a un croquis de la región, no efectuando cálculos.)

67. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}, \quad [0, 2]$

a) 3 *b*) 1 *c*) −8 *d*) 8 *e*) 10

68. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 1}, \quad [0, 2]$

a) 3 *b*) 1 *c*) −4 *d*) 4 *e*) 10

Área En los Ejercicios 69 y 70, calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

69. $y^2 = x^2(1 - x^2)$

70. $y = \operatorname{sen} 2x, \ y = 0, \ x = 0, \ x = \pi/2$

71. ***Área*** Las gráficas de $f(x) = x$ y $g(x) = ax^2$ se cortan en los puntos $(0, 0)$ y $(1/a, 1/a)$. Determinar $a > 0$ de manera que el área de la región comprendida entre ellas sea 2/3.

72. ***Interpretación de una integral*** Se nos da la integral

$$\int_0^2 2\pi x^2 \, dx$$

sin decirnos qué representa. (Hay más de una respuesta correcta en cada apartado.)

a) Dibujar la región cuya área representa.
b) Esbozar el sólido cuyo volumen viene dado por esa integral si se usa el método de los discos.
c) Esbozar el sólido cuyo volumen viene dado por esa integral si se usa el método de las capas.

73. ***Volumen*** Se hace girar la región acotada por $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = b$ $(b > 0)$ en torno al eje y.

a) Calcular el volumen del sólido generado si $b = 1$.
b) Hallar b de modo que el volumen del sólido generado sea 4/3 unidades cúbicas.

74. ***Valor medio*** Evaluar el valor medio de cada función en el intervalo indicado.

a) $f(x) = \operatorname{sen} nx, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi/n$, n es un entero positivo.
b) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}, \quad -3 \leqslant x \leqslant 3.$

75. ***Centroide*** Calcular las coordenadas del centroide de la región limitada por las gráficas de

$$y = \frac{5}{\sqrt{25 - x^2}}, \quad y = 0, x = 0 \text{ y } x = 4$$

76. ***Área de una superficie*** Calcular el área de la superficie de revolución engendrada al hacer girar la gráfica de $y = 2\sqrt{x}$, en el intervalo $[0, 9]$, en torno al eje x.

Longitud de arco En los Ejercicios 77 y 78, usar integración en la calculadora para hallar un valor aproximado de la longitud de arco de la curva en el intervalo indicado.

77. $y = \operatorname{tg} \pi x, \quad \left[0, \frac{1}{4}\right]$

78. $y = x^{2/3}, \quad [1, 8]$

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 79 y 80, discutir si la afirmación propuesta es correcta. Si no lo es, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

79. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4 - 1}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u}, \quad u = x^4 - 1$

80. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{du}{a^2 + u^2}, \quad u = \operatorname{sen} x,\ a = 1$

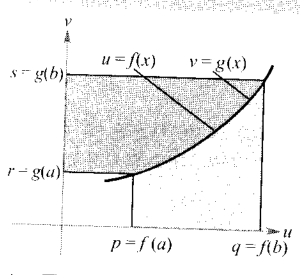


7.2 Integración por partes

CONTENIDO ▪
Integración por partes ▪
Método tabular ▪

EXPLORACIÓN

Demostración sin palabras He aquí una vía diferente para demostrar la fórmula de integración por partes, tomada con permiso del autor de «Proof Without Words: Integration by Parts» de Roger B. Nelsen MATHEMATICS MAGAZINE, abril 1991.



Área ▭ + Área ▭ = $qs - pr$

$$\int_r^s u\, dv + \int_q^p v\, du = \Big[uv\Big]_{(p,\, r)}^{(q,\, s)}$$

$$\int_r^s u\, dv = \Big[uv\Big]_{(p,\, r)}^{(q,\, s)} - \int_q^p v\, du$$

Explicar por qué este gráfico demuestra el teorema. ¿Qué notación usada en esta demostración no nos es familiar? ¿Cuál cree que es su significado?

Integración por partes

En esta sección estudiaremos una técnica muy importante de integración, llamada **integración por partes**. Esta técnica puede aplicarse a una amplia variedad de integrales y es particularmente eficaz para integrandos donde aparecen *productos* de funciones algebraicas y trascendentes. Por ejemplo, funciona muy bien para resolver integrales como

$$\int x \ln x\, dx, \quad \int x^2 e^x\, dx \quad \text{y} \quad \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

La integración por partes se basa en la fórmula de la derivada de un producto

$$\frac{d}{dx}[uv] = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$
$$= uv' + vu'$$

donde u y v son funciones derivables de x. Si u' y v' son continuas, podemos integrar ambos lados para llegar al resultado

$$uv = \int uv'\, dx + \int vu'\, dx$$
$$= \int u\, dv + \int v\, du$$

Reescribiendo esta ecuación se obtiene el siguiente teorema.

TEOREMA 7.1 INTEGRACIÓN POR PARTES

Si u y v son funciones de x con derivadas continuas,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Esta fórmula expresa la integral original en términos de otra integral. Dependiendo de la elección de u y de dv, puede ocurrir que la segunda integral sea más fácil que la original. Como las elecciones de u y de dv son críticas para la buena marcha del método, damos unas indicaciones sobre cómo proceder.

Estrategia para integrar por partes

1. Intente tomar como dv la porción más complicada del integrando que se ajuste a una regla básica de integración y como u el factor restante del integrando.
2. Intente tomar como u la porción del integrando cuya derivada es una función más simple que u y como dv el factor restante del integrando.

EJEMPLO 1 Integración por partes

Hallar $\int xe^x\,dx$.

Solución: Para aplicar integración por partes, necesitamos escribir la integral en la forma $\int u\,dv$. Hay varias maneras de hacerlo:

$$\int \underbrace{(x)}_{u}\underbrace{(e^x\,dx)}_{dv},\quad \int \underbrace{(e^x)}_{u}\underbrace{(x\,dx)}_{dv},\quad \int \underbrace{(1)}_{u}\underbrace{(xe^x\,dx)}_{dv},\quad \int \underbrace{(xe^x)}_{u}\underbrace{(dx)}_{dv}$$

La estrategia invita a elegir la primera opción, ya que la derivada de $u = x$ es más simple que x y además $dv = e^x\,dx$ es la parte más complicada del integrando que se adapta a una regla básica de integración.

$$dv = e^x\,dx \quad \Longrightarrow \quad v = \int dv = \int e^x\,dx = e^x$$

$$u = x \quad \Longrightarrow \quad du = dx$$

Integrando por partes obtenemos

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx$$

$$= xe^x - e^x + C$$

Se puede comprobar el resultado derivando $xe^x - e^x + C$ y viendo que se obtiene el integrando original. □

Nota. En el Ejemplo 1 nótese que no es necesario incluir una constante de integración al resolver

$$v = \int e^x\,dx = e^x + C_1$$

Para verlo, basta comprobar que si se sustituye $v = e^x$ por $v = e^x + C_1$ y se integra por partes, se llega al mismo resultado.

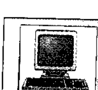
EJEMPLO 2 *Integración por partes*

Hallar $\int x^2 \ln x \, dx$.

Solución: En este caso, x^2 es más fácil de integrar que $\ln x$. Además, la derivada de $\ln x$ es más sencilla que $\ln x$. Por tanto, tomamos $dv = x^2\,dx$

$$dv = x^2\,dx \implies v = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$$

$$u = \ln x \implies du = \frac{1}{x}\,dx$$



Intente representar en la calculadora

$\int x^2 \ln x \, dx$ y $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}$

¿Obtiene la misma gráfica? (Este ejercicio exige algo de tiempo, así que tenga paciencia.)

Integrando por partes se obtiene

$$\int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \left(\frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

Se puede verificar este resultado por derivación:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right] = \frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(x^2) - \frac{x^2}{3} = x^2 \ln x \qquad \square$$

Una aplicación sorprendente de la integración por partes afecta a integrandos que constan de un solo factor, como $\int \ln x\,dx$ o $\int \text{arcsen}\, x\,dx$. En tales casos, hay que tomar $dv = dx$, como en el próximo ejemplo.

EJEMPLO 3 *Un integrando con un solo factor*

Calcular $\int_0^1 \text{arcsen}\, x\,dx$.

Solución: Sea $dv = dx$

$$dv = dx \implies v = \int dx = x$$

$$u = \text{arcsen}\, x \implies du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

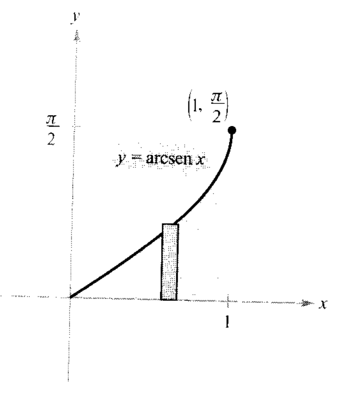


FIGURA 7.2
El área de la región es aproximadamente 0,571.

Integrando por partes vemos que

$$\int \text{arcsen}\, x\,dx = \text{arcsen}\, x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

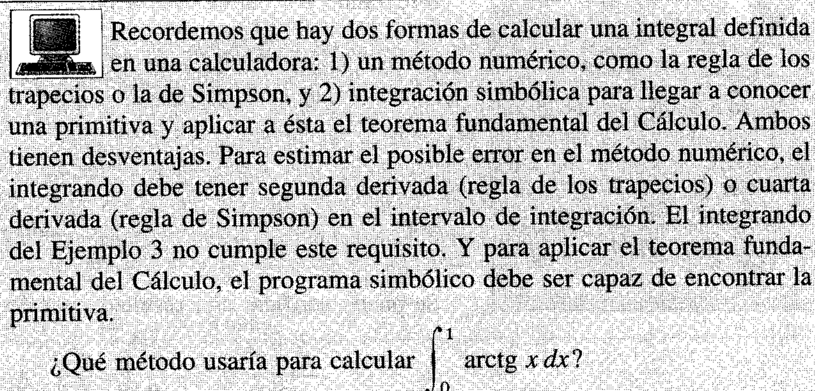
$$= x\,\text{arcsen}\, x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}(-2x)\,dx$$

$$= x\,\text{arcsen}\, x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Una vez conocida esta primitiva podemos evaluar la integral definida así:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \operatorname{arcsen} x\,dx &= \left[x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \\ &\approx 0{,}571\end{aligned}$$

La Figura 7.2 muestra el área dada por esta integral. □



Recordemos que hay dos formas de calcular una integral definida en una calculadora: 1) un método numérico, como la regla de los trapecios o la de Simpson, y 2) integración simbólica para llegar a conocer una primitiva y aplicar a ésta el teorema fundamental del Cálculo. Ambos tienen desventajas. Para estimar el posible error en el método numérico, el integrando debe tener segunda derivada (regla de los trapecios) o cuarta derivada (regla de Simpson) en el intervalo de integración. El integrando del Ejemplo 3 no cumple este requisito. Y para aplicar el teorema fundamental del Cálculo, el programa simbólico debe ser capaz de encontrar la primitiva.

¿Qué método usaría para calcular $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$?

¿Y para calcular $\int_0^1 \operatorname{arctg} x^2\,dx$?

Algunas integrales requieren integrar por partes más de una vez.

EJEMPLO 4 Sucesivas integraciones por partes

Hallar $\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$.

Solución: Los factores x^2 y $\operatorname{sen} x$ son igualmente fáciles de integrar, pero la derivada de x^2 es más simple que la propia función, mientras que la derivada de $\operatorname{sen} x$ no lo es. En consecuencia, optamos por tomar $u = x^2$.

$$dv = \operatorname{sen} x\,dx \implies v = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$$

$$u = x^2 \implies du = 2x\,dx$$

Ahora, la integración por partes lleva a que

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x\,dx \qquad \text{Primera integración por partes}$$

Con esta primera integración por partes, hemos simplificado la integral original, pero la nueva todavía no se ajusta a ninguna regla básica de integración. Volvamos a aplicar integración por partes, esta vez con $u = 2x$.

$$dv = \cos x\,dx \implies v = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$$
$$u = 2x \implies du = 2\,dx$$

Integrando por partes obtenemos

$$\int 2x \cos x\,dx = 2x \operatorname{sen} x - \int 2 \operatorname{sen} x\,dx \qquad \text{Segunda integración por partes}$$
$$= 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C$$

Combinando los dos resultados queda

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C$$ □

EXPLORACIÓN

Intente hallar

$$\int e^x \cos 2x\,dx$$

haciendo $u = \cos 2x$ y $dv = e^x\,dx$ como primera sustitución y $u = \operatorname{sen} 2x$ y $dv = e^x\,dx$ como segunda.

Cuando se efectúan varias integraciones por partes sucesivas, hay que tener cuidado con no intercambiar las sustituciones en las sucesivas aplicaciones. Así, en el Ejemplo 4, la primera sustitución era $u = x^2$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Si en la segunda integración por partes hubiéramos hecho la sustitución $u = \cos x$, $dv = 2x$, el resultado hubiera sido

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x\,dx$$
$$= -x^2 \cos x + x^2 \cos x + \int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$$
$$= \int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$$

deshaciendo de ese modo la integración previa y retornando a la integral original. Asimismo debe tenerse cuidado, al hacer sucesivas integraciones por partes, con la posible aparición de un *múltiplo constante* de la integral original. Por ejemplo, eso sucede cuando se aplica integración por partes a la integral $\int e^x \cos 2x\,dx$, y en el Ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Integración por partes

Hallar $\int \sec^3 x\,dx$.

Nota. La integral del Ejemplo 5 es importante. En la Sección 7.4 (Ejemplo 5) veremos que se utiliza para calcular la longitud de arco de un segmento de parábola.

Solución: La porción más complicada del integrando que resulta fácil de integrar es $\sec^2 x$, así que tomamos $dv = \sec^2 x\,dx$ y $u = \sec x$.

$$dv = \sec^2 x\,dx \implies v = \int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x$$
$$u = \sec x \implies du = \sec x \operatorname{tg} x\,dx$$

ADVERTENCIA Las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

juegan un papel importante en este capítulo.

Integrando por partes se obtiene

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x \operatorname{tg}^2 x\,dx$$

$$= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\,dx$$

$$= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$$

$$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \operatorname{tg} x + \int \sec x\,dx \qquad \text{Agrupar integrales idénticas}$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$ □

EJEMPLO 6 Localización de un centroide

Una parte de una máquina tiene la forma de la región acotada por la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y el eje x, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, que se muestra en la Figura 7.3. Hallar el centroide de esa región.

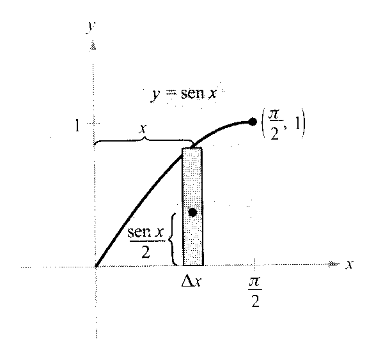


FIGURA 7.3
El centroide de la región, $\left(1, \frac{\pi}{8}\right)$, es el punto de equilibrio.

Solución: Empezamos calculando el área de la región.

$$A = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

Ya podemos hallar las coordenadas del centroide:

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{2}(\operatorname{sen} x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(1 - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{4}\left[x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$$

La integral que da $\bar{x}$, $(1/A)\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\,dx$, se puede evaluar mediante integración por partes. Haciendo $dv = \operatorname{sen} x\,dx$ y $u = x$, resulta $v = -\cos x$, $du = dx$ y, por tanto,

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

Finalmente, $\bar{x}$ resulta ser

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\,dx = \Big[-x\cos x + \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

En consecuencia, el centroide de la región es $(1, \pi/8)$. □

Con la práctica se va adquiriendo habilidad a la hora de elegir u y dv. El resumen que sigue recoge varias clases de integrales comunes junto con las elecciones aconsejadas para u y dv.

Integrales comunes resolubles mediante integración por partes

1. En integrales de los tipos

$$\int x^n e^{ax}\,dx, \quad \int x^n \operatorname{sen} ax\,dx \quad \text{o} \quad \int x^n \cos ax\,dx$$

hacer $u = x^n$ y $dv = e^{ax}\,dx$, $\operatorname{sen} ax\,dx$ o $\cos ax\,dx$.

2. En integrales de los tipos

$$\int x^n \ln x\,dx, \quad \int x^n \operatorname{arcsen} ax\,dx \quad \text{o} \quad \int x^n \operatorname{arctg} ax\,dx$$

hacer $u = \ln x$, $\operatorname{arcsen} ax$ o $\operatorname{arctg} ax$ y $dv = x^n\,dx$.

3. En integrales de los tipos

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx \quad \text{o} \quad \int e^{ax} \cos bx\,dx$$

hacer $u = \operatorname{sen} bx$ o $\cos bx$ y $dv = e^{ax}\,dx$.

Método tabular

En problemas que exigen sucesivas integraciones por partes, conviene organizar el trabajo, como indica el Ejemplo 7. Este método funciona bien en integrales de los tipos $\int x^n \operatorname{sen} ax\,dx$, $\int x^n \cos ax\,dx$ y $\int x^n e^{ax}\,dx$.

EJEMPLO 7 El método tabular

Hallar $\int x^2 \operatorname{sen} 4x\,dx$.

Solución: Como de costumbre, comenzamos haciendo $u = x^2$ y $dv = v'\,dx = \operatorname{sen} 4x\,dx$. A continuación, elaboramos una tabla de tres columnas como sigue.

PARA MÁS INFORMACIÓN
Véase el artículo «More on Tabular Integration by Parts» de Leonard Gillman en *The College Mathematics Journal*, noviembre 1991.

Signos alternados	*u y sus derivadas*	*v′ y sus primitivas*
$+$	x^2	$\operatorname{sen} 4x$
$-$	$2x$	$-\frac{1}{4}\cos 4x$
$+$	2	$-\frac{1}{16}\operatorname{sen} 4x$
$-$	0	$\frac{1}{64}\cos 4x$

Derivar hasta obtener una derivada nula

La solución se obtiene sumando los productos con signo de las entradas diagonales.

$$\int x^2 \operatorname{sen} 4x\,dx = -\frac{1}{4}x^2\cos 4x + \frac{1}{8}x \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{32}\cos 4x + C \qquad \square$$

Ejercicios de la Sección 7.2

1. Asignar a cada primitiva de la izquierda la integral correspondiente de la derecha.

a) $y = \operatorname{sen} x - x\cos x$ i) $\int \ln x\,dx$

b) $y = x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x$ ii) $\int x \operatorname{sen} x\,dx$

c) $y = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$ iii) $\int x^2e^x\,dx$

d) $y = -x + x\ln x$ iv) $\int x^2\cos x\,dx$

2. ***Para pensar*** Explicar verbalmente, del mejor modo posible, la estrategia a seguir en la integración por partes.

En los Ejercicios 3-8, identificar u y dv para aplicar integración por partes a cada integral. (No se pide calcular la integral.)

3. $\int xe^{2x}\,dx$ **4.** $\int x^2e^{2x}\,dx$

5. $\int (\ln x)^2\,dx$ **6.** $\int \ln 3x\,dx$

7. $\int x\sec^2 x\,dx$ **8.** $\int x^2\cos x\,dx$

En los Ejercicios 9-30, hallar la integral. (*Nota:* Resolverlas por el método más simple. No todas requieren integración por partes.)

9. $\int xe^{-2x}\,dx$ **10.** $\int \frac{x}{e^x}\,dx$

11. $\int x^2e^x\,dx$ **12.** $\int \frac{e^{1/t}}{t^2}\,dt$

13. $\int x^2e^{x^3}\,dx$ **14.** $\int x^3\ln x\,dx$

15. $\int t\ln(t+1)\,dt$ **16.** $\int \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$

17. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$ **18.** $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

19. $\int \frac{xe^{2x}}{(2x+1)^2}\,dx$ **20.** $\int \frac{x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2}\,dx$

21. $\int (x^2-1)e^x\,dx$ **22.** $\int \frac{\ln 2x}{x^2}\,dx$

23. $\int x\sqrt{x-1}\,dx$ **24.** $\int \frac{x}{\sqrt{2+3x}}\,dx$

25. $\int x\cos x\,dx$ **26.** $\int \theta\sec\theta\operatorname{tg}\theta\,d\theta$

27. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$ **28.** $\int \arccos x\,dx$

29. $\int e^{2x}\operatorname{sen} x\,dx$ **30.** $\int e^x\cos 2x\,dx$

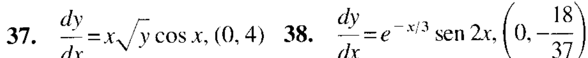
En los Ejercicios 31-36, resolver la ecuación diferencial.

31. $y' = xe^{x^2}$ **32.** $y' = \ln x$

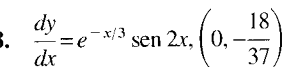
33. $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{\sqrt{2+3t}}$ **34.** $\frac{dy}{dt} = x^2\sqrt{x-1}$

35. $(\cos y)y' = 2x$ **36.** $y' = \operatorname{arctg}\frac{x}{2}$

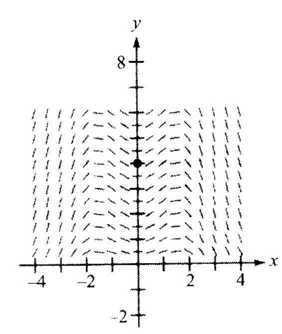
Campos de direcciones En los Ejercicios 37 y 38, se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo de direcciones. *a)* Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial sobre el campo de direcciones, una de las cuales pase por el punto indicado. *b)* Hallar, por integración, la solución particular de la ecuación diferencial y representar esta solución en la calculadora. Comparar el resultado con los dibujos del apartado *a*).

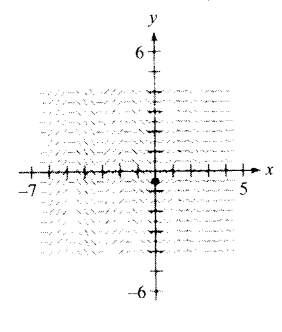


37. $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}\cos x,\ (0, 4)$



38. $\frac{dy}{dx} = e^{-x/3}\operatorname{sen} 2x,\ \left(0, -\frac{18}{37}\right)$





En los Ejercicios 39-44, calcular la integral definida y confirmar el resultado mediante una gráfica en la calculadora.

39. $\int_0^{\pi} x\operatorname{sen} 2x\,dx$ **40.** $\int_0^1 x\operatorname{arcsen} x^2\,dx$

41. $\int_0^1 e^x\operatorname{sen} x\,dx$ **42.** $\int_0^1 x^2e^x\,dx$

43. $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$ **44.** $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$

En los Ejercicios 45-50, aplicar a la integral el método tabular.

45. $\int x^2 e^{2x}\,dx$

46. $\int x^4 e^{-x}\,dx$

47. $\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx$

48. $\int x^3 \cos 2x\,dx$

49. $\int x \sec^2 x\,dx$

50. $\int x^2(x-2)^{3/2}\,dx$

En los Ejercicios 51-54, hallar la integral utilizando integración simbólica.

51. $\int t^3 e^{-4t}\,dt$

52. $\int \alpha^4 \operatorname{sen} \pi\alpha\,d\alpha$

53. $\int_0^{\pi/2} e^{-2x} \operatorname{sen} 3x\,dx$

54. $\int_0^5 x^4(25-x^2)^{3/2}\,dx$

55. Integrar $\int 2x\sqrt{2x-3}\,dx$

a) Por partes, tomando $dv = \sqrt{2x-3}\,dx$

b) Por sustitución, haciendo $u = \sqrt{2x-3}$

56. Integrar $\int x\sqrt{4+x}\,dx$

a) Por partes, tomando $dv = \sqrt{4+x}\,dx$

b) Por sustitución, haciendo $u = 4 + x$

57. Integrar $\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$

a) Por partes, tomando $dv = (x/\sqrt{4+x^2})\,dx$

b) Por sustitución, haciendo $u = 4 + x^2$

58. Integrar $\int x\sqrt{4-x}\,dx$

a) Por partes, tomando $dv = \sqrt{4-x}\,dx$

b) Por sustitución, haciendo $u = 4 - x$

En los Ejercicios 59 y 60, hallar la integral para $n = 0, 1, 2$ y 3, usando integración simbólica. Deducir de los resultados obtenidos una regla general para cualquier entero $n > 0$ y comprobarla en el caso $n = 4$.

59. $\int x^n \ln x\,dx$

60. $\int x^n e^x\,dx$

En los Ejercicios 61-66, verificar la fórmula utilizando integración por partes. (En los Ejercicios 61-64, n es un entero positivo.)

61. $\int x^n \operatorname{sen} x\,dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1} \cos x\,dx$

62. $\int x^n \cos x\,dx = x^n \operatorname{sen} x - n\int x^{n-1} \operatorname{sen} x\,dx$

63. $\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}[-1 + (n+1)\ln x] + C$

64. $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\,dx$

65. $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}(a \operatorname{sen} bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$

66. $\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \operatorname{sen} bx)}{a^2+b^2} + C$

En los Ejercicios 67-70, resolver la integral recurriendo a la fórmula apropiada de entre las expuestas en los Ejercicios 61-66.

67. $\int x^3 \ln x\,dx$

68. $\int x^2 \cos x\,dx$

69. $\int e^{2x} \cos 3x\,dx$

70. $\int x^3 e^{2x}\,dx$

Área En los Ejercicios 71-74, representar en la calculadora la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, y hallar su área.

71. $y = xe^{-x}$, $y = 0$, $x = 4$

72. $y = \frac{1}{9}xe^{-x/3}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$

73. $y = e^{-x} \operatorname{sen} \pi x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

74. $y = x \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$

75. ***Área, volumen y centroide*** Dada la región acotada por las gráficas de $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = e$, hallar

a) Su área.

b) El volumen del sólido generado al hacer girar la región en torno al eje x.

c) El volumen del sólido generado al hacer girar la región en torno al eje y.

d) El centroide de la región.

76. ***Centroide*** Localizar el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \operatorname{arcsen} x$, $x = 0$ e $y = \pi/2$. ¿Qué tiene que ver este ejercicio con el Ejemplo 6 de esta sección?

77. ***Desplazamiento medio*** Una fuerza amortiguadora afecta a la vibración de un muelle de manera que el desplazamiento de éste viene dado por

$$y = e^{-4t}(\cos 2t + 5 \operatorname{sen} 2t)$$

Calcular el valor medio de y en el intervalo entre $t = 0$ y $t = \pi$.

78. ***Modelo para la memoria*** Un modelo para la capacidad M de memorización de un niño, medida en una escala de 0 a 10, viene dado por

$$M = 1 + 1{,}6t, \quad 0 < t \leqslant 4$$

donde t es la edad del niño en años. Calcular el valor medio de esa función:

a) Entre el primer y el segundo cumpleaños.
b) Entre el tercer y cuarto cumpleaños.

Valor presente En los Ejercicios 79 y 80, calcular el valor presente P de un flujo de ingresos de $c(t)$ dólares por año si

$$P = \int_0^{t_1} c(t)e^{-rt}\,dt$$

donde t_1 es el tiempo en años y r la tasa de interés anual compuesto continuamente.

79. $c(t) = 100.000 + 4.000t$, $r = 5\,\%$, $t_1 = 10$

80. $c(t) = 30.000 + 500t$, $r = 7\,\%$, $t_1 = 5$

Integrales para el cálculo de coeficientes de Fourier En los Ejercicios 81 y 82, verificar el valor de la integral definida, donde n es un entero positivo.

81. $$\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\,dx = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{n}, & n \text{ es impar} \\ -\dfrac{2\pi}{n}, & n \text{ es par} \end{cases}$$

82. $$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = \frac{(-1)^n 4\pi}{n^2}$$

83. ***Cuerda vibrante*** Una cuerda tensada entre los puntos (0, 0) y (2, 0) se pulsa desplazando su punto medio h unidades. El movimiento de la cuerda sigue el modelo de una **serie de Fourier de senos**, cuyos coeficientes vienen dados por

$$b_n = h\int_0^1 x \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\,dx + h\int_1^2 (-x+2)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

Hallar b_n.

84. Encontrar el fallo del siguiente argumento:

$$dv = dx \;\Longrightarrow\; v = \int dx = x$$

$$u = \frac{1}{x} \;\Longrightarrow\; du = -\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$0 + \int \frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)(x) - \int \left(-\frac{1}{x^2}\right)(x)\,dx = 1 + \int \frac{dx}{x}$$

Por tanto, $0 = 1$.

85. Sea $y = f(x)$ positiva y estrictamente creciente en el intervalo $0 < a \leqslant x \leqslant b$. Consideremos la región R acotada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$. Si se hace girar R en torno al eje y, probar que el método de los discos y el método de las capas dan, para el sólido resultante, el mismo volumen.

86. Consideremos la ecuación diferencial $f'(x) = xe^{-x}$ con la condición inicial $f(0) = 0$.

a) Resolverla por integración.
b) Representar en la calculadora la solución de la ecuación diferencial.
c) *Método de Euler* De la definición de derivada se sigue que para pequeños valores de Δx

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + [f'(x)]\Delta x$$

Consideremos los puntos de la forma

$$(x_n, y_n) = (n\Delta x,\; y_{n-1} + f'(x_{n-1})\Delta x)$$

donde $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Partiendo de $n = 0$, usar la calculadora para generar 80 puntos de esa forma para $\Delta x = 0{,}05$. Representar en la calculadora los puntos y comparar con la gráfica del apartado *b*).

d) Repetir *c*) generando 40 puntos cuando $\Delta x = 0{,}1$.
e) Dar una explicación geométrica del proceso descrito en el punto *c*). ¿Por qué el resultado de *c*) es mejor aproximación de la solución que el de *d*)?

87. ***Método de Euler*** Consideremos la ecuación diferencial

$$f'(x) = \cos\sqrt{x}$$

con la condición inicial $f(0) = 2$.

a) Intente resolverla por integración. ¿Puede efectuar la integración?
b) Partiendo de $n = 0$, use la calculadora para generar 80 puntos de la forma indicada en el apartado *c*) del Ejercicio 86 para $\Delta x = 0{,}05$. Represente en la calculadora los puntos para obtener una aproximación de la solución de la ecuación diferencial.

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

Velocidad de un cohete La velocidad (en pies/s) de un cohete cuya masa inicial es m (incluyendo el combustible) es

$$v = gt + u\ln\frac{m}{m - rt}, \quad t < \frac{m}{r}$$

donde u es la velocidad de expulsión del combustible, r el ritmo al que se consume éste, y $g = -32$ pies/s^2 es la aceleración de la gravedad. Hallar la ecuación para la posición de un cohete con $m = 50.000$ libras, $u = 12.000$ pies/s y $r = 400$ libras/s. ¿A qué altura está el cohete cuando $t = 100$ segundos? (Suponemos que se ha lanzado desde el suelo y se mueve verticalmente.)



7.3 Integrales trigonométricas

SHEILA SCOTT MACINTYRE (1910-1960)

Sheila Scott Macintyre publicó su primer trabajo sobre los períodos asintóticos de las funciones integrales en 1935. Recibió el doctorado en la Universidad de Aberdeen, donde fue profesora. En 1958 aceptó un puesto como investigadora invitada en la Universidad de Cincinnati.

Integrales que contienen potencias del seno y del coseno

En esta sección estudiaremos técnicas que permiten resolver integrales de los tipos

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx \quad \text{y} \quad \int \sec^m x \operatorname{tg}^n x\,dx$$

donde al menos uno de los exponentes, m o n, es un entero positivo. Para hallar primitivas de estas expresiones, intentaremos romperlas en combinaciones de integrales trigonométricas a las que sea aplicable la regla de las potencias.

Por ejemplo, se puede hallar $\int \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx$ mediante la regla de las potencias haciendo $u = \operatorname{sen} x$, con lo que $du = \cos x\,dx$, y se obtiene

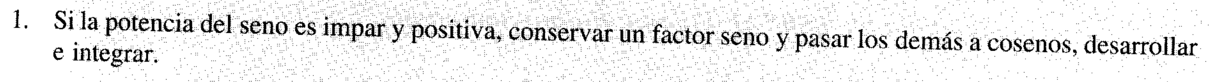
$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx = \int u^5\,dx = \frac{u^6}{6} + C = \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6} + C$$

Con el fin de descomponer $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$ en formas a las que se pueda aplicar la regla de las potencias, usamos las identidades

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \text{Identidad de Pitágoras}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \text{Identidad del ángulo mitad para } \operatorname{sen}^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad \text{Identidad del ángulo mitad para } \cos^2 x$$



Estrategia para hallar integrales con senos y cosenos

1. Si la potencia del seno es impar y positiva, conservar un factor seno y pasar los demás a cosenos, desarrollar e integrar.

$$\int \overbrace{\operatorname{sen}^{2k+1}}^{\text{Impar}} x \cos^n x\,dx = \int \overbrace{(\operatorname{sen}^2 x)^k}^{\text{Pasar a cosenos}} \cos^n x \overbrace{\operatorname{sen} x\,dx}^{\text{Conservar para } du} = \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x\,dx$$

2. Si la potencia del coseno es impar y positiva, conservar un factor coseno y pasar los demás a senos, desarrollar e integrar.

$$\int \operatorname{sen}^m x \overbrace{\cos^{2k+1}}^{\text{Impar}} x\,dx = \int \operatorname{sen}^m x \overbrace{(\cos^2 x)^k}^{\text{Pasar a cosenos}} \overbrace{\cos x\,dx}^{\text{Conservar para } du} = \int \operatorname{sen}^m x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x\,dx$$

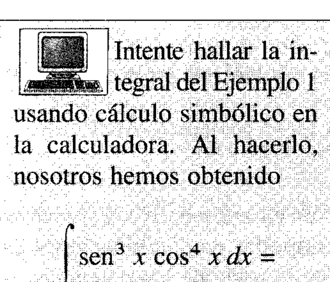
3. Si las potencias del seno y del coseno son pares y no negativas, usar repetidamente las identidades

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

para convertir el integrando en uno con potencias impares del coseno. A continuación, proceder como en el Apartado 2.

EJEMPLO 1 La potencia del seno es impar y positiva

Hallar $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \, dx$.



Intente hallar la integral del Ejemplo 1 usando cálculo simbólico en la calculadora. Al hacerlo, nosotros hemos obtenido

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \, dx =$$

$$= -\cos^5 x\left(\frac{1}{7}\operatorname{sen}^2 x + \frac{2}{35}\right) + C$$

¿Es equivalente al resultado del Ejemplo 1?

Solución: Puesto que albergamos la esperanza de usar la regla de las potencias con $u = \cos x$, *guardamos intacto un factor seno* para formar du con él y pasamos los demás a forma de cosenos.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x(\operatorname{sen} x)\, dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx \\
&= \int (\cos^4 x - \cos^6 x) \operatorname{sen} x \, dx \\
&= \int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx - \int \cos^6 x \operatorname{sen} x \, dx \\
&= -\int \cos^4 x(-\operatorname{sen} x)\, dx + \int \cos^6 x(-\operatorname{sen} x)\, dx \\
&= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C
\end{aligned}$$

□

En el Ejemplo 1, las dos potencias, m y n, eran enteros positivos. Sin embargo, la misma estrategia sirve siempre que al menos uno de ellos sea impar y positivo. Así, en el próximo ejemplo, la potencia del coseno es 3 pero la del seno es $-\frac{1}{2}$.

EJEMPLO 2 La potencia del coseno es impar y positiva

Hallar $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \, dx$.

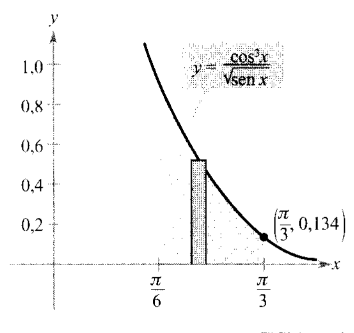


FIGURA 7.4
El área de la región es aproximadamente 0,239.

Solución:

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \, dx &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 x)(\cos x)}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \, dx \\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/3} [(\operatorname{sen} x)^{-1/2} \cos x - (\operatorname{sen} x)^{3/2} \cos x] \, dx \\
&= \left[\frac{(\operatorname{sen} x)^{1/2}}{1/2} - \frac{(\operatorname{sen} x)^{5/2}}{5/2}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} \\
&= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2} - \frac{2}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{5/2} - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{32}}{80} \\
&\approx 0{,}239
\end{aligned}$$

La Figura 7.4 muestra la región cuya área viene dada por esta integral. □



JOHN WALLIS (1616-1703)

Gran parte de la obra de Wallis en Cálculo precedió a Newton y Leibniz, sobre quienes ejerció una notable influencia. A Wallis se atribuye asimismo la introducción del símbolo ∞, utilizado habitualmente para denotar el infinito.

EJEMPLO 3 La potencia del coseno es par y no negativa

Hallar $\int \cos^4 x\, dx$.

Solución: Como m y n son ambos pares y no negativos ($m = 0$), podemos sustituir $\cos^4 x$ por $[(1 + \cos 2x)/2]^2$.

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x\, dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4}\right) dx \\
&= \int \left[\frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right)\right] dx \\
&= \frac{3}{8} \int dx + \frac{1}{4} \int 2 \cos 2x\, dx + \frac{1}{32} \int 4 \cos 4x\, dx \\
&= \frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C
\end{aligned}$$

Utilice derivación simbólica para verificar el resultado. ¿Puede simplificar la derivada hasta obtener el integrando original? □

Si en el Ejemplo 3 quisiéramos calcular la integral *definida* entre 0 y $\pi/2$, obtendríamos

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx &= \left[\frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \left(\frac{3\pi}{16} + 0 + 0\right) - (0 + 0 + 0) \\
&= \frac{3\pi}{16}
\end{aligned}$$

Nótese que el único término que contribuye a la solución es $3x/8$. Las próximas fórmulas, debidas a John Wallis, generalizan esta observación.

FÓRMULAS DE WALLIS

1. Si n es impar ($n \geqslant 3$), entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right) \cdots \left(\frac{n-1}{n}\right)$$

2. Si n es par ($n \geqslant 2$), entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\right) \cdots \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Estas fórmulas son válidas también si se sustituye $\cos^n x$ por $\operatorname{sen}^n x$. (En el Ejercicio 85 se pide demostrar las dos fórmulas.)

Integrales que contienen potencias de la secante y de la tangente

La guía que enunciamos seguidamente puede ayudar a resolver integrales de la forma $\int \sec^m x \operatorname{tg}^n x\,dx$.

Estrategia para hallar integrales que contienen secantes y tangentes

1. Si la potencia de la secante es par y positiva, conservar un factor $\sec^2 x$ y pasar los restantes factores a tangentes. A continuación, desarrollar e integrar.

$$\int \sec^{\overbrace{2k}^{\text{Par}}} x \operatorname{tg}^n x\,dx = \int \overbrace{(\sec^2 x)^{k-1}}^{\text{Pasar a tangentes}} \operatorname{tg}^n x \overbrace{\sec^2 x\,dx}^{\text{Conservar para } du} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{k-1} \operatorname{tg}^n x \sec^2 x\,dx$$

2. Si la potencia de la tangente es impar y positiva, conservar un factor $\sec x \operatorname{tg} x$ y pasar los restantes factores a secantes. A continuación, desarrollar e integrar.

$$\int \sec^m x \operatorname{tg}^{\overbrace{2k+1}^{\text{Impar}}} x\,dx = \int \sec^{m-1} x \overbrace{(\operatorname{tg}^2 x)^k}^{\text{Pasar a secantes}} \overbrace{\sec x \operatorname{tg} x\,dx}^{\text{Conservar para } du} = \int \sec^{m-1} x(\sec^2 x - 1)^k \text{ ses } x \operatorname{tg} x\,dx$$

3. Si no hay factores secante y la potencia de la tangente es par y positiva, pasar un factor $\operatorname{tg}^2 x$ a la forma $\sec^2 x$, desarrollar y repetir el proceso si fuera necesario.

$$\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \overbrace{(\operatorname{tg}^2 x)}^{\text{Pasar a secantes}}\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x(\sec^2 x - 1)\,dx$$

4. Si la integral es de la forma $\int \sec^m x\,dx$, con m impar y positivo, integrar por partes, como ilustra el Ejemplo 5 de la sección anterior.

5. Si no se da ninguna de las cuatro circunstancias precedentes, intente convertir el integrando en senos y cosenos.

EJEMPLO 4 La potencia de la tangente es impar y positiva

Hallar $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\sqrt{\sec x}}\,dx$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\sqrt{\sec x}}\,dx &= \int (\sec x)^{-1/2} \operatorname{tg}^3 x\,dx \\
&= \int (\sec x)^{-3/2} (\operatorname{tg}^2 x)(\sec x \operatorname{tg} x)\,dx \\
&= \int (\sec x)^{-3/2} (\sec^2 x - 1)(\sec x \operatorname{tg} x)\,dx \\
&= \int [(\sec x)^{1/2} - (\sec x)^{-3/2}]\,(\sec x \operatorname{tg} x)\,dx \\
&= \frac{2}{3}(\sec x)^{3/2} + 2(\sec x)^{-1/2} + C
\end{aligned}$$

□

| Nota. En el Ejemplo 5, la potencia de la tangente es impar y positiva, de manera que podríamos haber resuelto la integral atendiendo al punto 2 de la estrategia. En el Ejercicio 71 se pide probar que los resultados a los que se llega por ambas vías difieren sólo en una constante.

EJEMPLO 5 La potencia de la secante es par y positiva

Hallar $\int \sec^4 3x \operatorname{tg}^3 3x\, dx$.

Solución: Hacemos $u = \operatorname{tg} 3x$, con lo que $du = 3\sec^2 3x\, dx$ y por tanto

$$\begin{aligned}\int \sec^4 3x \operatorname{tg}^3 3x\, dx &= \int \sec^2 3x \operatorname{tg}^3 3x(\sec^2 3x)\, dx\\ &= \int (1 + \operatorname{tg}^2 3x) \operatorname{tg}^3 3x(\sec^2 3x)\, dx\\ &= \frac{1}{3}\int (\operatorname{tg}^3 3x + \operatorname{tg}^5 3x)(3\sec^2 3x)\, dx\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\operatorname{tg}^4 3x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^6 3x}{6}\right) + C\\ &= \frac{\operatorname{tg}^4 3x}{12} + \frac{\operatorname{tg}^6 3x}{18} + C\end{aligned}$$
□

EJEMPLO 6 La potencia de la tangente es par

Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^4 x\, dx$.

Solución: No hay factores secante, así que empezamos pasando un factor $\operatorname{tg}^2 x$ a la forma $\sec^2 x$.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^4 x\, dx &= \int \operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg}^2 x)\, dx\\ &= \int \operatorname{tg}^2 x(\sec^2 x - 1)\, dx\\ &= \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\, dx - \int \operatorname{tg}^2 x\, dx\\ &= \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\, dx - \int (\sec^2 x - 1)\, dx\\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C\end{aligned}$$

Ya podemos calcular el valor de la integral definida propuesta.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^4 x\, dx &= \left[\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x\right]_0^{\pi/4}\\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\\ &\approx 0{,}119\end{aligned}$$

La Figura 7.5 muestra la región cuya área representa la integral dada. Intente aproximar el valor de esta integral utilizando la regla de Simpson. Con $n = 10$ debe obtenerse un valor aproximado cuyo error es menor que 0,00001. □

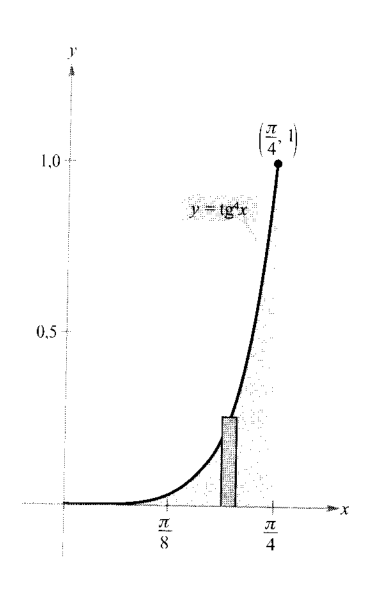


FIGURA 7.5
El área de la región es aproximadamente 0,119.

Para las integrales que contienen cosecantes y cotangentes, la estrategia es análoga a la del par secantes-tangentes. Asimismo, al integrar funciones trigonométricas recuérdese que a veces resulta eficaz transformar todo el integrando en potencias del seno y del coseno.

EJEMPLO 7 Conversión a senos y cosenos

Hallar $\int \frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x}\,dx$.

Solución: Como los cuatro primeros apartados de la estrategia no son aplicables, intentamos convertir el integrando en senos y cosenos. En este caso las potencias resultantes de senos y cosenos se integran así:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x}\,dx &= \int \left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 dx \\ &= \int (\operatorname{sen} x)^{-2}(\cos x)\,dx \\ &= -(\operatorname{sen} x)^{-1} + C \\ &= -\operatorname{cosec} x + C\end{aligned}$$

□

Integrales que contienen productos seno-coseno de ángulos diferentes

PARA MÁS INFORMACIÓN Véase el artículo «Integrals of Products of Sine and Cosine with Different Arguments», de Sherrie J. Nicol, en *The College Mathematics Journal*, marzo 1993.

Este tipo de integrales aparece con frecuencia en las aplicaciones. En tales casos, se recurre a las identidades producto → suma.

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}(\cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x])$$

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}[(m-n)x] + \operatorname{sen}[(m+n)x])$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos[(m-n)x] + \cos[(m+n)x])$$

EJEMPLO 8 Uso de las identidades producto → suma

Hallar $\int \operatorname{sen} 5x \cos 4x\,dx$.

Solución: La segunda de las identidades producto → suma nos permite ver que

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 5x \cos 4x\,dx &= \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(-\cos x - \frac{\cos 9x}{9}\right) + C \\ &= -\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + C\end{aligned}$$

□

Ejercicios de la Sección 7.3

1. Sea $f(x) = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$.
   a) Usar las fórmulas de reducción de potencias para escribir $f(x)$ en términos del coseno (elevado a potencia uno).
   b) Determinar alguna otra manera de expresar la función. Verificar el resultado con una gráfica en la calculadora.
   c) Hallar una expresión trigonométrica que sumada a la función la convierta en cuadrado perfecto de un trinomio. Reescribir la función como ese cuadrado menos el término añadido. Comprobar el resultado mediante una gráfica en la calculadora.
   d) Reescribir el resultado de *c)* en términos del seno de un ángulo doble.
   e) ¿De cuántas maneras ha reescrito la función trigonométrica? Cuando dos personas reescriben una expresión trigonométrica, sus resultados pueden ser distintos. ¿Significa esto que alguna de ellas se ha equivocado? Explicar la respuesta.

2. Asociar cada primitiva de la izquierda con su correspondiente integral de la derecha.

   a) $y = \sec x$ — i) $\int \operatorname{sen} x \operatorname{tg}^2 x\,dx$

   b) $y = \cos x + \sec x$ — ii) $8\int \cos^4 x\,dx$

   c) $y = x - \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$ — iii) $\int \operatorname{sen} x \sec^2 x\,dx$

   d) $y = 3x + 2\operatorname{sen} x \cos^3 x + 3\operatorname{sen} x \cos x$ — iv) $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$

En los Ejercicios 3-12, hallar la integral (el integrando contiene senos y cosenos).

3. $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x\,dx$
4. $\int \cos^3 x \operatorname{sen}^2 x\,dx$
5. $\int \operatorname{sen}^5 2x \cos 2x\,dx$
6. $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$
7. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\,dx$
8. $\int \cos^3 \frac{x}{3}\,dx$
9. $\int \cos^2 3x\,dx$
10. $\int \operatorname{sen}^2 2x\,dx$
11. $\int x \operatorname{sen}^2 x\,dx$
12. $\int x^2 \operatorname{sen}^2 x\,dx$

En los Ejercicios 13-16, verificar las fórmulas de Wallis calculando la integral.

13. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx = \frac{2}{3}$
14. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\,dx = \frac{8}{15}$
15. $\int_0^{\pi/2} \cos^7 x\,dx = \frac{16}{35}$
16. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$

En los Ejercicios 17-32, calcular la integral (el integrando contiene secantes y tangentes)

17. $\int \sec 3x\,dx$
18. $\int \sec^2 (2x - 1)\,dx$
19. $\int \sec^4 5x\,dx$
20. $\int \sec^6 \frac{x}{2}\,dx$
21. $\int \sec^3 \pi x\,dx$
22. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$
23. $\int \operatorname{tg}^5 \frac{x}{4}\,dx$
24. $\int \operatorname{tg}^3 \frac{\pi x}{2} \sec^2 \frac{\pi x}{2}\,dx$
25. $\int \sec^2 x \operatorname{tg} x\,dx$
26. $\int \operatorname{tg}^3 t \sec^3 t\,dt$
27. $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\,dx$
28. $\int \operatorname{tg}^5 2x \sec^2 2x\,dx$
29. $\int \sec^6 4x \operatorname{tg} 4x\,dx$
30. $\int \sec^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\,dx$
31. $\int \sec^3 x \operatorname{tg} x\,dx$
32. $\int \operatorname{tg}^3 3x\,dx$

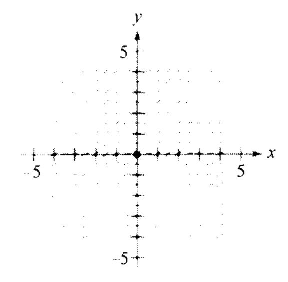
En los Ejercicios 33-36, resolver la ecuación diferencial.

33. $\frac{dr}{d\theta} = \operatorname{sen}^4 \pi\theta$
34. $\frac{ds}{d\alpha} = \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$
35. $y' = \operatorname{tg}^3 3x \sec 3x$
36. $y' = \sqrt{\operatorname{tg} x}\, \sec^4 x$

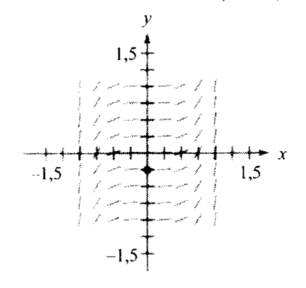
Campos de direcciones En los Ejercicios 37 y 38, se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo de direcciones. *a)* Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial sobre el campo de direcciones, una de las cuales pase por el punto indicado. *b)* Hallar, por integración, la solución particular de la ecuación diferencial y representar esta

solución en la calculadora. Comparar el resultado con los dibujos del apartado a).

37. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen}^2 x,\ (0, 0)$



38. $\dfrac{dy}{dx} = \sec^2 x \operatorname{tg}^2 x,\ \left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$



En los Ejercicios 39-42, hallar la integral.

39. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x\, dx$ **40.** $\displaystyle\int \cos 3\theta \cos(-2\theta)\, d\theta$

41. $\displaystyle\int \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} 3\theta\, d\theta$ **42.** $\displaystyle\int \operatorname{sen}(-4x) \cos 3x\, dx$

En los Ejercicios 43-52, resolver la integral y confirmar el resultado usando cálculo simbólico en la calculadora.

43. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^3 2x\, dx$ **44.** $\displaystyle\int \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2} \sec^4 \frac{x}{2}\, dx$

45. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^4 \theta\, d\theta$ **46.** $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2 3x \operatorname{ctg} 3x\, dx$

47. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ctg}^2 t}{\operatorname{cosec} t}\, dt$ **48.** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ctg}^3 t}{\operatorname{cosec} t}\, dt$

49. $\displaystyle\int \frac{1}{\sec x \operatorname{tg} x}\, dx$ **50.** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos x}\, dx$

51. $\displaystyle\int (\operatorname{tg}^4 t - \sec^4 t)\, dt$ **52.** $\displaystyle\int \frac{1 - \sec t}{\cos t - 1}\, dt$

En los Ejercicios 53-60, calcular la integral definida. Comprobar el resultado con la calculadora.

53. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx$ **54.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x\, dx$

55. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3 x\, dx$ **56.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec^2 t \sqrt{\operatorname{tg} t}\, dt$

57. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1 + \operatorname{sen} t}\, dt$ **58.** $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 3\theta \cos \theta\, d\theta$

59. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x\, dx$ **60.** $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2 x + 1)\, dx$

En los Ejercicios 61-66, usar integración simbólica en la calculadora para calcular la integral. Dibujar las primitivas para dos valores distintos de la constante de integración.

61. $\displaystyle\int \cos^4 \frac{x}{2}\, dx$ **62.** $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$

63. $\displaystyle\int \sec^5 \pi x\, dx$ **64.** $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 (1 - x)\, dx$

65. $\displaystyle\int \sec^5 \pi x \operatorname{tg} \pi x\, dx$ **66.** $\displaystyle\int \sec^4 (1 - x) \operatorname{tg}(1 - x)\, dx$

En los Ejercicios 67-70, calcular la integral utilizando integración simbólica en la calculadora.

67. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} 3\theta\, d\theta$ **68.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (1 - \cos \theta)^2\, d\theta$

69. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\, dx$ **70.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x\, dx$

En los Ejercicios 71 y 72, a) hallar la integral de dos formas diferentes, b) representar en la calculadora la primitiva obtenida por cada método, sin la constante de integración, para ver que difieren sólo en una constante, c) verificar analíticamente que los resultados difieren sólo en una constante.

71. $\displaystyle\int \sec^4 3x \operatorname{tg}^3 3x\, dx$ **72.** $\displaystyle\int \sec^2 x \operatorname{tg} x\, dx$

73. ***Área*** Calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = \operatorname{sen}^2 \pi x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.

74. ***Volumen*** Calcular el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = \operatorname{tg} x$, $y = 0$, $x = -\pi/4$ y $x = \pi/4$ en torno al eje x.

Volumen y centroide En los Ejercicios 75 y 76, para la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, determinar a) el volumen del sólido de revolución generado al girar esa región en torno al eje x, y b) el centroide de la región.

75. $y = \operatorname{sen} x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \pi$

76. $y = \cos x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2}$

En los Ejercicios 77-80, verificar la fórmula de recurrencia integrando por partes.

77. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$

78. $\displaystyle\int \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$

79. $\int \cos^m x \operatorname{sen}^n x\,dx = -\dfrac{\cos^{m+1} x \operatorname{sen}^{n-1} x}{m+n} +$

$$+ \frac{m-1}{m+n}\int \cos^m x \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

80. $\int \sec^n x\,dx = \dfrac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x + \dfrac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx$

En los Ejercicios 81-84, resolver la integral utilizando los resultados de los Ejercicios 77-80.

81. $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$ **82.** $\int \cos^4 x\,dx$

83. $\int \sec^4 \dfrac{2\pi x}{5}\,dx$ **84.** $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\,dx$

85. ***Fórmulas de Wallis*** Utilizando el resultado del Ejercicio 78, demostrar las siguientes versiones de las fórmulas de Wallis.

a) Si n es impar ($n \geqslant 3$), entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

b) Si n es par ($n \geqslant 2$), entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

86. El **producto interno** de dos funciones f y g en $[a, b]$ viene dado por $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$. Se dice que dos funciones distintas f y g son **ortogonales** si $\langle f, g\rangle = 0$. Probar que las funciones de la siguiente colección son ortogonales entre sí en $[-\pi, \pi]$

$$\{\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} 3x, \ldots, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots\}$$

87. ***Un modelo matemático*** La tabla da la media de las temperaturas máxima y mínima en Erie, Pennsylvania, en los meses del año. *(Fuente: NOAA.)*

Mes	En	Feb	Mar	Ab	May	Jun
Máx.	30,9	32,2	41,1	53,7	64,6	74,0
Mín.	18,0	17,7	25,8	36,1	45,4	55,2

Mes	Jul	Ag	Sep	Oct	Nov	Dic
Máx.	78,2	77,0	71,0	60,1	47,1	35,7
Mín.	59,9	59,4	53,1	43,2	34,3	24,2

Las temperaturas máxima y mínima admiten el modelo

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos\frac{\pi t}{6} + b_1 \operatorname{sen}\frac{\pi t}{6}$$

donde a_0, a_1 y b_1 son

$$a_0 = \frac{1}{12}\int_0^{12} f(t)\,dt$$

$$a_1 = \frac{1}{6}\int_0^{12} f(t)\cos\frac{\pi t}{6}\,dt$$

$$b_1 = \frac{1}{6}\int_0^{12} f(t)\operatorname{sen}\frac{\pi t}{6}\,dt$$

a) Aproximar el modelo $H(t)$ para las temperaturas máximas, con $t = 0$ correspondiendo a enero. (*Ayuda:* Aproximar el valor de las integrales por la regla de Simpson y usar el dato de enero dos veces.)

b) Repetir el apartado *a)* para el modelo $L(t)$ de las temperaturas mínimas.

c) Comparar los modelos con los datos en la calculadora. ¿Durante qué parte del año es mayor la diferencia entre las máximas y las mínimas?

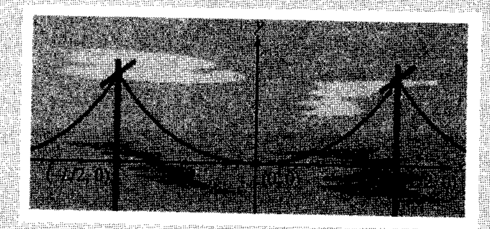
88. Utilizando una sustitución trigonométrica y las fórmulas de Wallis, probar que

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,dx = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

donde n es un entero positivo.

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

Tendidos eléctricos Los tendidos eléctricos se construyen colocando cables entre soportes fijos y ajustando la tensión en los diversos tramos. El cable adopta la forma de una catenaria, como muestra la figura.



Sean T la tensión, en libras, del cable, u la densidad (en libras/pie), $g \approx 32{,}2$ la aceleración de la gravedad

(en pies/s^2) y L la distancia (en pies) entre dos soportes consecutivos. Entonces, la ecuación de la catenaria es

$$y = \frac{T}{ug}\left(\text{ch}\,\frac{ugx}{T} - 1\right)$$

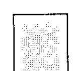
donde x e y se miden en pies.

a) Calcular la longitud de cable entre dos soportes.

b) Los especialistas miden la tensión utilizando el método de la onda de retorno. Se percute el cable en uno de los soportes, creando una onda en la línea y se mide el tiempo t (en segundos) que tarda en ir y volver del soporte siguiente. La velocidad v (en pies/s) viene dada por $v = \sqrt{T/u}$. ¿Cuánto tarda la onda en ir y volver entre dos soportes contiguos?

c) El pandeo, en pulgadas, puede estimarse evaluando y cuando $x = L/2$ en la ecuación de la catenaria (y multiplicando por 12). Sin embargo, en la práctica los operarios usan la ecuación $s \approx 12{,}075t^2$. Usar el hecho de que $[\text{ch}\,(ugL/2T) + 1] \approx 2$ para deducir esta ecuación.

PARA MÁS INFORMACIÓN Sobre las Matemáticas de los tendidos eléctricos, véase el artículo «Constructing Power Lines» de Thomas O'Neil en el *UMAP Journal*, volumen 4, n.º 3 (1983).



7.4 Sustituciones trigonométricas

CONTENIDO ▪
Sustituciones trigonométricas ▪
Aplicaciones ▪

Sustituciones (cambios de variable) trigonométricas

EXPLORACIÓN

Integración de una función radical Hasta este momento no hemos resuelto en el texto la integral

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

Por argumentos geométricos debe ser capaz de calcular su valor exacto. ¿Cuál es? Utilizando integración simbólica, con la regla de los trapecios o la de Simpson, no podemos estar seguros de la precisión de la aproximación obtenida. ¿Por qué?

Intente calcular el valor exacto mediante la sustitución

$$x = \text{sen}\,\theta \quad \text{y} \quad dx = \cos\theta\, d\theta$$

¿Coincide su resultado con el valor deducido por razonamientos geométricos?

Ahora que sabemos cómo hallar integrales en las que aparecen potencias de las funciones trigonométricas, podemos utilizar **sustituciones trigonométricas** para resolver integrales cuyos integrandos contengan los radicales

$$\sqrt{a^2 - u^2}, \quad \sqrt{a^2 + u^2} \quad \text{y} \quad \sqrt{u^2 - a^2}$$

El propósito de esas sustituciones (o cambios de variable) es eliminar los radicales. Eso se consigue con las identidades de Pitágoras

$$\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\,\theta, \quad \sec^2\theta = 1 + \text{tg}^2\,\theta \quad \text{y} \quad \text{tg}^2\,\theta = \sec^2\theta - 1$$

Por ejemplo, si $a > 0$, hacemos $u = a\,\text{sen}\,\theta$, donde $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Entonces

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - u^2} &= \sqrt{a^2 - a^2\,\text{sen}^2\,\theta}\\ &= \sqrt{a^2(1 - \text{sen}^2\,\theta)}\\ &= \sqrt{a^2\cos^2\theta}\\ &= a\cos\theta\end{aligned}$$

Nótese que $\cos\theta \geqslant 0$, ya que $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.

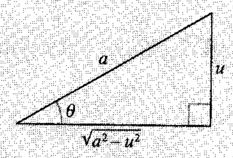
SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA ($a > 0$)

1. En integrales que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$, hacer

$$u = a \operatorname{sen} \theta$$

Así $\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \theta$, donde

$$-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$$

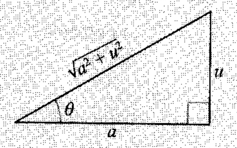


2. En integrales que contienen $\sqrt{a^2 + u^2}$, hacer

$$u = a \operatorname{tg} \theta$$

Así $\sqrt{a^2 + u^2} = a \sec \theta$, donde

$$-\pi/2 < \theta < \pi/2$$

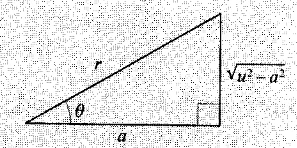


3. En integrales que contienen $\sqrt{u^2 - a^2}$, hacer

$$u = a \sec \theta$$

Así $\sqrt{u^2 - a^2} = \pm a \operatorname{tg} \theta$, donde

$$0 \leqslant \theta < \pi/2 \quad \text{o} \quad \pi/2 < \theta \leqslant \pi$$



Tomar el valor positivo si $u > a$ y el negativo si $u < -a$.

Nota. Las restricciones sobre θ garantizan que la función que determina la sustitución es inyectiva. De hecho, son los mismos intervalos sobre los que arcsen, arctg y arcsec están definidas.

EJEMPLO 1 Sustitución trigonométrica $u = a \operatorname{sen} \theta$

Hallar $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9 - x^2}}$.

Solución: En primer lugar, observemos que no es aplicable ninguna de las reglas básicas de integración expuestas en la Sección 5.9. Para usar una sustitución trigonométrica hay que advertir que $\sqrt{9 - x^2}$ es de la forma $\sqrt{a^2 - u^2}$. Por tanto, hacemos la sustitución

$$x = a \operatorname{sen} \theta = 3 \operatorname{sen} \theta$$

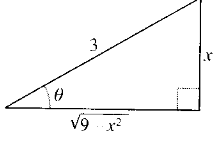


FIGURA 7.6
$\operatorname{sen} \theta = \frac{x}{3}$, $\operatorname{ctg} \theta = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$.

Utilizando derivación y el triángulo de la Figura 7.6, obtenemos

$$dx = 3 \cos \theta \, d\theta, \quad \sqrt{9 - x^2} = 3 \cos \theta \quad \text{y} \quad x^2 = 9 \operatorname{sen}^2 \theta$$

Por tanto, la sustitución trigonométrica lleva al resultado siguiente.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} &= \int \frac{3\cos\theta\, d\theta}{(9\,\mathrm{sen}^2\,\theta)(3\cos\theta)} && \text{Sustituir}\\
&= \frac{1}{9}\int \frac{d\theta}{\mathrm{sen}^2\,\theta} && \text{Simplificar}\\
&= \frac{1}{9}\int \mathrm{cosec}^2\,\theta\, d\theta && \text{Identidad trigonométrica}\\
&= -\frac{1}{9}\,\mathrm{ctg}\,\theta + C && \text{Aplicar la regla de la cosecante}\\
&= -\frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\right) + C && \text{Sustituir ctg }\theta\\
&= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C
\end{aligned}$$

El triángulo de la Figura 7.6 permite volver de la variable θ a la variable x.

$$\mathrm{ctg}\,\theta = \frac{\text{ady.}}{\text{op.}} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$ □

Intente hallar en la calculadora, con integración simbólica, las integrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}} \qquad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} \qquad \int \frac{dx}{x^3\sqrt{9-x^2}}$$

e intente después llegar a esos resultados usando una sustitución trigonométrica.

En la Sección 5.10 vimos cómo usar las funciones hiperbólicas inversas para resolver las integrales

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}, \quad \int \frac{du}{a^2 - u^2} \quad \text{y} \quad \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}}$$

Estas integrales se pueden hallar asimismo por cambios de variable trigonométricos, como ilustra el próximo ejemplo.

EJEMPLO 2 Sustitución trigonométrica $u = a \operatorname{tg} \theta$

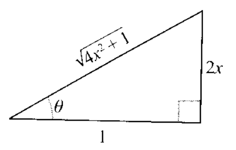


FIGURA 7.7
$\operatorname{tg} \theta = 2x$, $\sec \theta = \sqrt{4x^2+1}$.

Hallar $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$.

Solución: Tomemos $u = 2x$, $a = 1$ y $2x = \operatorname{tg} \theta$, como indica la Figura 7.7. Entonces,

$$dx = \frac{1}{2}\sec^2 \theta \, d\theta \quad \text{y} \quad \sqrt{4x^2+1} = \sec \theta$$

La sustitución trigonométrica hace que

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 \theta \, d\theta}{\sec \theta} \qquad \text{Sustituir}$$

$$= \frac{1}{2}\int \sec \theta \, d\theta \qquad \text{Simplificar}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C \qquad \text{Aplicar la regla de la secante}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{4x^2+1} + 2x\right| + C \qquad \text{Deshacer el cambio}$$

Verifique el resultado mediante integración simbólica. El resultado ¿viene dado en esa forma o en términos de una función hiperbólica inversa? □

La utilidad de los cambios de variable trigonométricos alcanza a las integrales donde aparecen expresiones $(a^2 - u^2)^{n/2}$, para lo cual basta escribir

$$(a^2 - u^2)^{n/2} = \left(\sqrt{a^2 - u^2}\right)^n$$

EJEMPLO 3 Sustitución trigonométrica: potencias racionales

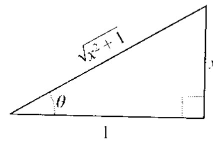


FIGURA 7.8
$\operatorname{tg} \theta = x$, $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Hallar $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$.

Solución: Comenzamos escribiendo $(x^2+1)^{3/2}$ como $\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3$. Ahora hacemos $a = 1$ y $u = x = \operatorname{tg} \theta$, como muestra la Figura 7.8. Teniendo en cuenta que

$$dx = \sec^2 \theta \, d\theta \quad \text{y} \quad \sqrt{x^2+1} = \sec \theta$$

al aplicar la sustitución trigonométrica se obtiene

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} \qquad \text{Reescribir el denominador}$$

$$= \int \frac{\sec^2 \theta \, d\theta}{\sec^3 \theta} \qquad \text{Sustituir}$$

$$= \int \frac{d\theta}{\sec \theta} \qquad \text{Simplificar}$$

$$= \int \cos \theta \, d\theta \qquad \text{Identidad trigonométrica}$$

$$= \operatorname{sen} \theta + C \qquad \text{Aplicar la regla del coseno}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + C \qquad \text{Deshacer el cambio}$$ □

Para las integrales definidas suele ser preferible determinar los límites de integración en θ, lo cual evita tener que regresar a la variable x. Puede ser interesante repasar este procedimiento en los Ejemplos 8 y 9 de la Sección 4.5.

EJEMPLO 4 Transformación de los límites de integración

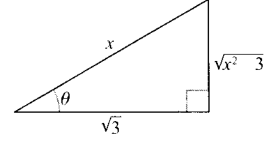


FIGURA 7.9
$\sec \theta = \frac{x}{\sqrt{3}}, \ \operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt{3}}$.

Calcular $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x} \, dx$.

Solución: Como $\sqrt{x^2 - 3}$ es de la forma $\sqrt{u^2 - a^2}$, hacemos $u = x$, $a = \sqrt{3}$, y hacer $x = \sqrt{3} \sec \theta$, como indica la Figura 7.9. Entonces,

$$dx = \sqrt{3} \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta \quad \text{y} \quad \sqrt{x^2 - 3} = \sqrt{3} \operatorname{tg} \theta$$

Para averiguar los límites de integración, hacemos uso de $x = \sqrt{3} \sec \theta$, como sigue.

Límite inferior	*Límite superior*
Cuando $x = \sqrt{3}$, $\sec \theta = 1$	Cuando $x = 2$, $\sec \theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$
y $\theta = 0$	y $\theta = \frac{\pi}{6}$

En consecuencia,

Límites de integración para x — Límites de integración para θ

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x} \, dx = \int_0^{\pi/6} \frac{(\sqrt{3} \operatorname{tg} \theta)(\sqrt{3} \sec \theta \operatorname{tg} \theta) \, d\theta}{\sqrt{3} \sec \theta}$$

$$= \int_0^{\pi/6} \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \theta \, d\theta$$

$$= \sqrt{3} \int_0^{\pi/6} (\sec^2 \theta - 1) \, d\theta$$

$$= \sqrt{3}\Big[\operatorname{tg}\theta - \theta\Big]_0^{\pi/6}$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

$$\approx 0{,}0931$$ □

Nota. En el Ejemplo 4, intente volver a la variable x y evaluar la primitiva en los límites de integración originales. Debe llegar a este resultado:

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x}\,dx = \sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt{3}} - \operatorname{arcsec}\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_{\sqrt{3}}^{2}$$

Cuando se calculan integrales definidas por un cambio de variable trigonométrico, hay que tener la precaución de comprobar que los valores de θ están en los intervalos indicados al comienzo de esta sección. Así, si en el Ejemplo 4 se hubiera pedido calcular la integral

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x}\,dx$$

al hacer $u = x$ y $a = \sqrt{3}$ en el intervalo $[-2, -\sqrt{3}]$ resultaría $u < -a$. Por tanto, al determinar los límites de integración tendríamos que haber elegido θ tal que $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$. En este caso, la integral se hubiera calculado de este modo.

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x}\,dx = \int_{5\pi/6}^{\pi} \frac{(-\sqrt{3}\operatorname{tg}\theta)(\sqrt{3}\sec\theta\operatorname{tg}\theta)\,d\theta}{\sqrt{3}\sec\theta}$$

$$= \int_{5\pi/6}^{\pi} -\sqrt{3}\operatorname{tg}^2\theta\,d\theta$$

$$= -\sqrt{3}\int_{5\pi/6}^{\pi} (\sec^2\theta - 1)\,d\theta$$

$$= -\sqrt{3}\Big[\operatorname{tg}\theta - \theta\Big]_{5\pi/6}^{\pi}$$

$$= -\sqrt{3}\left[(0 - \pi) - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

$$\approx -0{,}0931$$

En las sustituciones trigonométricas se puede proceder eventualmente a completar el cuadrado (véase Sección 5.9). Por ejemplo, intente calcular la integral

$$\int \sqrt{x^2 - 2x}\, dx$$

completando el cuadrado, antes de nada, de esta manera

$$\int \sqrt{(x-1)^2 - 1^2}\, dx$$

Las tres próximas familias de integrales, que aparecerán varias veces en adelante, se pueden hallar por sustituciones trigonométricas. Cuando las encontremos, nos limitaremos a citar este teorema. (En el Ejercicio 73 se pide verificar las fórmulas que contiene.)

TEOREMA 7.2 FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN ESPECIALES ($a > 0$)

1. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{2}\left(a^2 \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + u\sqrt{a^2 - u^2}\right) + C$
2. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 - a^2} - a^2 \ln \left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right|\right) + C,\ u > a$
3. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 + a^2} + a^2 \ln \left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right|\right) + C$

Aplicaciones

EJEMPLO 5 Cálculo de una longitud de arco

Calcular la longitud de arco de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$ (Figura 7.10).

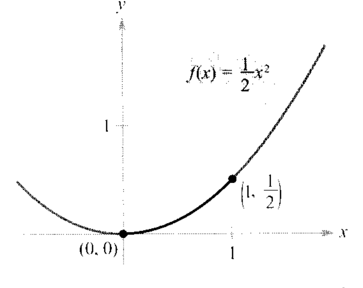
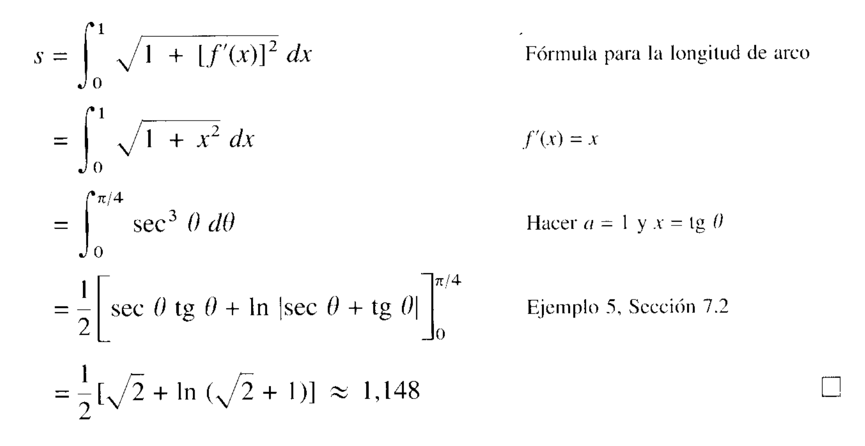


FIGURA 7.10
La longitud de arco de la curva entre (0, 0) y (1, 1/2) es aproximadamente 1,148.

Solución: Por la fórmula para la longitud de arco de la Sección 6.4,



$$\begin{aligned}
s &= \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx && \text{Fórmula para la longitud de arco}\\
&= \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx && f'(x) = x\\
&= \int_0^{\pi/4} \sec^3 \theta\, d\theta && \text{Hacer } a = 1 \text{ y } x = \operatorname{tg} \theta\\
&= \frac{1}{2}\left[\sec \theta \operatorname{tg} \theta + \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta|\right]_0^{\pi/4} && \text{Ejemplo 5, Sección 7.2}\\
&= \frac{1}{2}[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)] \approx 1{,}148
\end{aligned}$$

□

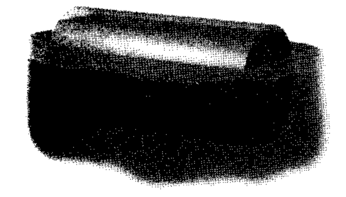


FIGURA 7.11
El barril no está completamente lleno. El petróleo deja sin ocupar los 0,2 pies de la parte superior.

EJEMPLO 6 Comparación de las fuerzas de dos fluidos

Un barril de petróleo, que pesa 48 libras/pie^3, está flotando, cerrado, en agua de mar, que pesa 64 libras/pie^3, como muestran las Figuras 7.11 y 7.12. (El barril no está del todo lleno de petróleo, sino sólo hasta 0,2 pies de su parte superior.) Comparar las fuerzas interior y exterior de los fluidos sobre una de las bases circulares del barril.

Solución: En la Figura 7.12 situamos el sistema de coordenadas con su origen en el centro del círculo de ecuación Para determinar la fuerza del fluido *interior*, integramos entre -1 y $0{,}8$ (tomando como peso $w = 48$).

$$F = w\int_c^d h(y)L(y)\,dy \qquad \text{Ecuación general}$$

$$F_{\text{interior}} = 48\int_{-1}^{0,8}(0{,}8 - y)(2)\sqrt{1 - y^2}\,dy$$

$$= 76{,}8\int_{-1}^{0,8}\sqrt{1 - y^2}\,dy - 96\int_{-1}^{0,8}y\sqrt{1 - y^2}\,dy$$

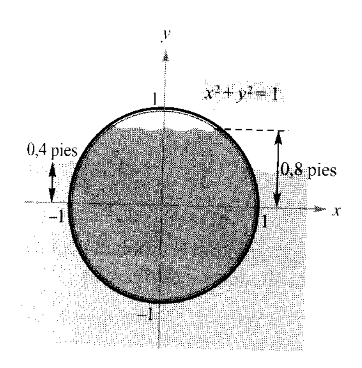


FIGURA 7.12

Y para calcular la fuerza del fluido *exterior*, integramos desde -1 hasta $0{,}4$ (tomando como peso $w = 64$).

$$F_{\text{exterior}} = 64\int_{-1}^{0,4}(0{,}4 - y)(2)\sqrt{1 - y^2}\,dy$$

$$= 51{,}2\int_{-1}^{0,4}\sqrt{1 - y^2}\,dy - 128\int_{-1}^{0,4}y\sqrt{1 - y^2}\,dy$$

Dejamos los detalles de la integración como ejercicio (véase Ejercicio 66). Intuitivamente, ¿cuál de las dos fuerzas diría que es mayor, la del petróleo (interior) o la del agua de mar (exterior)? Calculando las integrales se ve que

$$F_{\text{interior}} \approx 121{,}3 \text{ libras} \quad \text{y} \quad F_{\text{exterior}} \approx 93{,}0 \text{ libras}$$ □

Ejercicios de la Sección 7.4

En los Ejercicios 1-4, asociar cada integral con la primitiva correspondiente.

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{x}\,dx$

c) $\displaystyle\int \sqrt{7 + 6x - x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 16}}\,dx$

1. $4 \ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2 + 16} - 4}{x}\right| + \sqrt{x^2 + 16} + C$

2. $8 \ln\left|\sqrt{x^2 - 16} + x\right| + \dfrac{x\sqrt{x^2 - 16}}{2} + C$

3. $8 \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{4} - \dfrac{x\sqrt{16 - x^2}}{2} + C$

4. $8 \operatorname{arcsen}\dfrac{x - 3}{4} + \dfrac{(x - 3)\sqrt{7 + 6x - x^2}}{2} + C$

En los Ejercicios 5-8, hallar la integral haciendo la sustitución $x = 5 \text{ sen } \theta$.

5. $\displaystyle\int \frac{1}{(25 - x^2)^{3/2}}\,dx$ **6.** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{25 - x^2}}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x}\,dx$ **8.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{25 - x^2}}\,dx$

En los Ejercicios 9-12, hallar la integral haciendo la sustitución $x = 2 \sec \theta$.

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}\,dx$ **10.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}\,dx$

11. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2 - 4}\,dx$ **12.** $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 4}}\,dx$

En los Ejercicios 13-16, hallar la integral haciendo la sustitución $x = \operatorname{tg} \theta$.

13. $\displaystyle\int x\sqrt{1 + x^2}\,dx$ **14.** $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx$

15. $\displaystyle\int \frac{1}{(1 + x^2)^2}\,dx$ **16.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1 + x^2)^2}\,dx$

En los Ejercicios 17 y 18, hallar la integral utilizando el Teorema 7.2.

17. $\displaystyle\int \sqrt{4 + 9x^2}\,dx$ **18.** $\displaystyle\int \sqrt{1 +. x^2}\,dx$

En los Ejercicios 19-38, hallar la integral.

19. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}\,dx$ **20.** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}}\,dx$

21. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{16 - 4x^2}\,dx$ **22.** $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{16 - 4x^2}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}\,dx$ **24.** $\displaystyle\int \frac{t}{(1 - t^2)^{3/2}}\,dt$

25. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^4}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4x^2 + 9}}{x^4}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2 + 9}}\,dx$ **28.** $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2 + 3)^{3/2}}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2 + 3)^{3/2}}\,dx$ **30.** $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2 + 16}}\,dx$

31. $\displaystyle\int e^{2x}\sqrt{1 + e^{2x}}\,dx$ **32.** $\displaystyle\int (x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 2}\,dx$

33. $\displaystyle\int e^{x}\sqrt{1 - e^{2x}}\,dx$ **34.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 - x}}{\sqrt{x}}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{1}{4 + 4x^2 + x^4}\,dx$ **36.** $\displaystyle\int \frac{x^3 + x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}\,dx$

37. $\displaystyle\int \operatorname{arcsec} 2x\,dx$ **38.** $\displaystyle\int x \operatorname{arcsen} x\,dx$

En los Ejercicios 39-42, completar el cuadrado y hallar la integral.

39. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}}\,dx$ **40.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{2x - x^2}}\,dx$

41. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}}\,dx$ **42.** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}\,dx$

En los Ejercicios 43-46, calcular el valor de la integral usando *a*) los límites de integración dados y *b*) los límites de integración obtenidos por sustitución trigonométrica.

43. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{t^2}{(1 - t^2)^{3/2}}\,dt$ **44.** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{(1 - t^2)^{5/2}}\,dt$

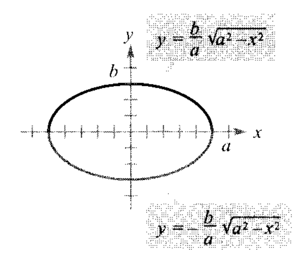
45. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}}\,dx$ **46.** $\displaystyle\int_0^{5/3} \sqrt{25 - 9x^2}\,dx$

En los Ejercicios 47-50, usar integración simbólica para hallar la integral. Verificar el resultado por derivación.

47. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 10x + 9}}\,dx$ **48.** $\displaystyle\int (x^2 + 2x + 11)^{3/2}\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$ **50.** $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2 - 4}\,dx$

51. ***Área*** Calcular el área de la región interior a la elipse de la figura.

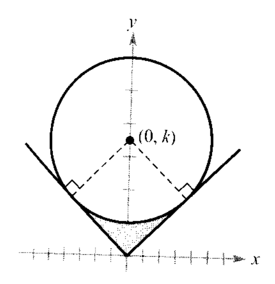


52. ***Diseño mecánico*** La superficie de una pieza de una máquina es la región entre las gráficas de $y = |x|$ y $x^2 + (y - k)^2 = 25$. (Véase figura en la página siguiente.)

a) Calcular k sabiendo que el círculo es tangente a la gráfica de $y = |x|$.

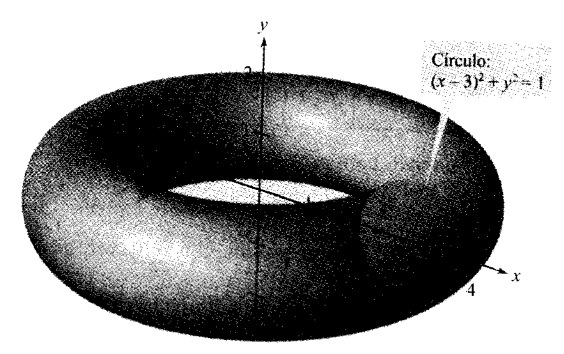
b) Calcular el área superficial de la pieza.

c) Determinar el área superficial de la pieza en función del radio r del círculo.



Volumen de un toro En los Ejercicios 53 y 54, calcular el volumen del toro generado por la región acotada por la gráfica del círculo al girar en torno al eje y.

53. $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ (véase figura)



54. $(x - h)^2 + y^2 = r^2,\ h > r$

Longitud de arco En los Ejercicios 55 y 56, calcular la longitud de arco de la curva plana en el intervalo que se indica.

	Función	*Intervalo*
55.	$y = \ln x$	$[1, 5]$
56.	$y = x^2$	$[0, 3]$

57. ***Longitud de arco*** Probar que la longitud de un arco de la función seno es igual a la de un arco de la función coseno.

58. ***Volumen*** El eje del depósito cilíndrico de la figura está horizontal.

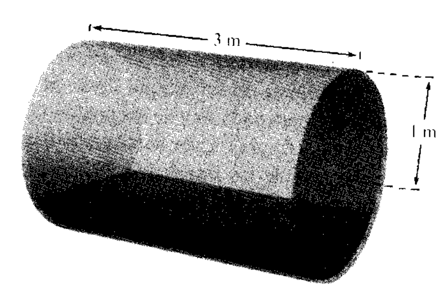
a) Expresar el volumen de líquido en el depósito en función de la profundidad d.

b) Representar esa función en la calculadora.

c) Diseñar una varilla de control de profundidad con marcas de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, y $\frac{3}{4}$.

d) Si entra líquido en el depósito a razón de m^3/min, calcular el ritmo de cambio de la profundidad como función de la profundidad d.

e) Representar esta función en la calculadora. ¿Cuándo es mínimo el ritmo de cambio de la profundidad? ¿Coincide el resultado con lo que dicta la intuición? Explicar la respuesta.



Movimiento de un proyectil En los Ejercicios 59 y 60, *a*) representar en la calculadora la trayectoria de un proyectil que sigue el camino dado por la ecuación, *b*) determinar el alcance del proyectil, y *c*) usar integración en la calculadora para hallar la distancia rcorrida por el proyectil.

59. $y = x - 0{,}005x^2$ **60.** $y = x - \dfrac{x^2}{72}$

61. ***Área de una superficie*** Calcular el área del sólido de revolución generado por la región acotada por las gráficas de $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, y $x = \sqrt{2}$ al girar en torno al eje x.

Centroide En los Ejercicios 62 y 63, hallar el centroide de la región limitada por las gráficas de las desigualdades.

62. $y \leqslant 3/\sqrt{x^2 + 9},\ y \geqslant 0,\ x \geqslant -4,\ x \leqslant 4$

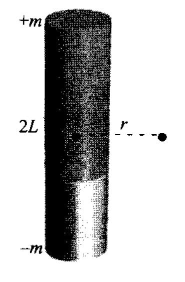
63. $y \leqslant \dfrac{1}{4}x^2,\ (x - 4)^2 + y^2 \leqslant 16,\ y \geqslant 0$

64. ***Intensidad de campo media*** La intensidad de campo H de un imán de longitud $2L$ sobre una partícula que dista r unidades de su centro es

$$H = \frac{2mL}{(r^2 + L^2)^{3/2}}$$

donde $\pm m$ son los polos del imán (véase figura). Hallar la intensidad de campo media cuando la partícula se desplaza desde 0 hasta R unidades de distancia del centro, calculando la integral

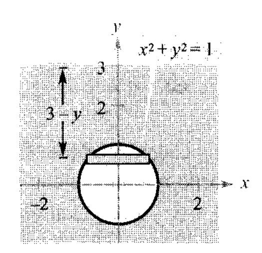
$$\frac{1}{R}\int_0^R \frac{2mL}{(r^2 + L^2)^{3/2}}\,dr$$



65. ***Fuerza de un fluido*** Hallar la fuerza de un fluido sobre una ventana vertical de observación circular de radio 1 pie, inmersa en un tanque lleno de agua de una piscifactoría, para cada una de las profundidades que se indican (véase figura). Usar sustitución trigonométrica al calcular una de las integrales. (Recordemos que en un problema similar en la Sección 6.7 evaluamos una de las integrales gracias a una fórmula geométrica y la otra obsevando que el integrando era impar.)

a) El centro de la ventana está 3 pies bajo la superficie del agua.

b) El centro de la ventana está d pies ($d > 1$) bajo la superficie del agua.



66. ***Fuerza de un fluido*** Calcular estas dos integrales, que proporcionan las fuerzas del fluido del Ejemplo 6.

a) $F_{\text{interior}} = 48\int_{-1}^{0,8} (0,8 - y)(2)\sqrt{1 - y^2}\, dy$

b) $F_{\text{exterior}} = 64\int_{-1}^{0,4} (0,4 - y)(2)\sqrt{1 - y^2}\, dy$

67. **Tractriz** Una persona parte del origen y camina por el semieje y positivo arrastrando un peso al final de una cuerda de 12 metros (véase figura). Inicialmente, el peso está situado en el punto (12, 0).

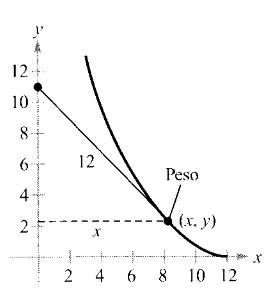
a) Probar que la pendiente de la tangente a la trayectoria del peso es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{144 - x^2}}{x}$$

b) Usar el resultado de *a*) para encontrar la ecuación del camino que sigue el peso. Representar el camino en la calculadora y compararlo con la figura.

c) Hallar las asíntotas verticales de la gráfica del apartado *b*).

d) En el momento en que la persona llega al punto (0, 12), ¿cuánta distancia ha recorrido el peso?



68. ***Un modelo matemático*** La tabla da el coste medio S (en miles de dólares) de las pólizas de seguros de vida vigentes en EE. UU entre 1988 y 1993. *(Fuente: American Council of Life Insurance.)*

Año	1988	1989	1990	1991	1992	1993
S	31,4	34,4	37,9	41,5	43,0	45,8

Un modelo para esos datos es

$$S = \sqrt{1.445,6 + 228,5t - 4,4t^2}$$

donde t es el tiempo en años, con $t = 0$ correspondiendo a 1990.

a) Representar ese modelo en la calculadora para $-2 \leqslant t \leqslant 3$.

b) Calcular el ritmo de crecimiento de S cuando $t = 1$.

c) Usando el modelo y la integración, predecir el valor medio de S entre los años 1998 y 2000.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 69-72, discutir si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

69. Si $x = \operatorname{sen}\theta$, entonces

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int d\theta$$

70. Si $x = \operatorname{sen}\theta$, entonces

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\, dx = \int \sec\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta$$

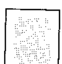
71. Si $x = \operatorname{tg}\theta$, entonces

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}} = \int_0^{4\pi/3} \cos\theta\, d\theta$$

72. Si $x = \operatorname{sen}\theta$, entonces

$$\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1 - x^2}\, dx = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta\, d\theta$$

73. Verificar, por sustitución trigonométrica, las fórmulas de integración expuestas en el Teorema 7.2.



7.5 Fracciones simples

CONTENIDO ▪
Fracciones simples ▪
Factores lineales ▪
Factores cuadráticos ▪

Fracciones simples

Esta sección presenta un método de descomposición de funciones racionales en otras funciones racionales más simples a las que se pueden aplicar ya las fórmulas básicas de integración. Para comprender las ventajas de este método, llamado **descomposición en fracciones simples**, consideremos la integral

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\, dx$$

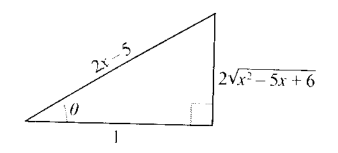


FIGURA 7.13
$\sec \theta = 2x - 5$.

Se puede resolver esta integral sin recurrir a la descomposición en fracciones simples completando el cuadrado y haciendo un cambio de variable trigonométrico (véase Figura 7.13), a saber:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\, dx &= \int \frac{dx}{(x - 5/2)^2 - (1/2)^2} && a = \frac{1}{2},\ x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}\sec\theta \\
&= \int \frac{(1/2)\sec\theta \operatorname{tg}\theta \, d\theta}{(1/4)\operatorname{tg}^2\theta} && da = \frac{1}{2}\sec\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta \\
&= 2\int \operatorname{cosec}\theta \, d\theta \\
&= 2 \ln |\operatorname{cosec}\theta - \operatorname{ctg}\theta| + C \\
&= 2 \ln \left| \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 6}} - \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 5x + 6}} \right| + C \\
&= 2 \ln \left| \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}} \right| + C \\
&= 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x - 3}}{\sqrt{x - 2}} \right| + C \\
&= \ln \left| \frac{x - 3}{x - 2} \right| + C \\
&= \ln |x - 3| - \ln |x - 2| + C
\end{aligned}$$



JOHN BERNOULLI (1667-1748)

El método de descomposición en fracciones simples fue introducido por John Bernoulli, un matemático suizo que jugó un papel fundamental en el desarrollo del Cálculo. Fue profesor en la Universidad de Basilea, donde contó con ilustres discípulos, entre ellos el más famoso Leonhard Euler.

Ahora bien, si nos hubiéramos dado cuenta de que

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x - 2} \qquad \text{Descomposición en fracciones simples}$$

la integral se hubiera resuelto de una forma bien sencilla:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\, dx &= \int \left(\frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x - 2} \right) dx \\
&= \ln |x - 3| - \ln |x - 2| + C
\end{aligned}$$

Este método es claramente preferible. No obstante, su eficacia depende de la habilidad para factorizar el denominador y encontrar así las fracciones simples

$$\frac{1}{x-3} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{x-2}$$

En esta sección aprenderemos a efectuar sistemáticamente esta descomposición.

ADVERTENCIA En cursos previos al Cálculo habrá aprendido a combinar funciones tales como

$$\frac{1}{x-2}+\frac{-1}{x+3}=\frac{5}{(x-2)(x+3)}$$

El método de las fracciones simples enseña cómo invertir el proceso.

$$\frac{5}{(x-2)(x+3)}=\frac{?}{x-2}+\frac{?}{x+3}$$

El Álgebra enseña que todo polinomio con coeficientes reales se puede descomponer (factorizar) en factores lineales y factores cuadráticos. Por ejemplo, el polinomio x^5+x^4-x-1 puede escribirse como

$$\begin{aligned} x^5+x^4-x-1 &= x^4(x+1)-(x+1)\\ &= (x^4-1)(x+1)\\ &= (x^2+1)(x^2-1)(x+1)\\ &= (x^2+1)(x+1)(x-1)(x+1)\\ &= (x-1)(x+1)^2(x^2+1)\end{aligned}$$

donde $(x-1)$ es un factor lineal, $(x+1)^2$ es un factor lineal repetido y (x^2+1) es un factor cuadrático irreducible. Gracias a esta factorización podemos escribir la descomposición en fracciones simples de la expresión racional

$$\frac{N(x)}{x^5+x^4-x+1}$$

donde $N(x)$ es un polinomio de grado menor que 5, en la forma

$$\frac{N(x)}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$$

DESCOMPOSICIÓN DE $N(x)/D(x)$ EN FRACCIONES SIMPLES

1. **Dividir en caso impropio**: Si $N(x)/D(x)$ es una fracción impropia (o sea, si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador) dividimos $N(x)$ por $D(x)$ para obtener

$$\frac{N(x)}{D(x)}=(\text{un polinomio})+\frac{N_1(x)}{D(x)}$$

donde el grado de $N_1(x)$ ya es menor que el de $D(x)$. A continuación, aplicamos los pasos 2, 3 y 4 a la expresión racional propia $N_1(x)/D(x)$.

2. **Factorizar el denominador**: Factorizamos completamente el denominador en factores de los tipos

$$(px+q)^m \qquad \text{y} \qquad (ax^2+bx+c)^n$$

donde ax^2+bx+c es irreducible.

3. **Factores lineales**: Por *cada* factor lineal $(px + q)^m$, la descomposición en fracciones simples debe contener la siguiente suma de m fracciones:

$$\frac{A_1}{(px + q)} + \frac{A_2}{(px + q)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(px + q)^m}$$

4. **Factores cuadráticos**: Por *cada* factor cuadrático $(ax^2 + bx + c)^n$, la descomposición en fracciones simples debe contener la siguiente suma de n fracciones:

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Factores lineales

Los Ejemplos 1 y 2 muestran cómo determinar las constantes de los numeradores de una descomposición en fracciones simples con factores lineales, repetidos o no.

EJEMPLO 1 Factores lineales distintos

Escribir la descomposición en fracciones simples de $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$

Solución: Como $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$, debemos incluir una fracción simple por cada factor, es decir

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2}$$

donde A y B han de ser determinados. Multiplicando esa ecuación por el mínimo común denominador $(x - 3)(x - 2)$ obtenemos la **ecuación básica**

$$1 = A(x - 2) + B(x - 3) \qquad \text{Ecuación básica}$$

Nota. Los valores sustituidos para x en el Ejemplo 1 se han elegido porque simplifican el cálculo de A y B. El valor $x = 2$ se ha elegido con el fin de eliminar el término $A(x-2)$, y el valor $x = 3$ para eliminar el término $B(x-3)$. Hay que intentar siempre hacer sustituciones convenientes de este tipo.

Ya que esta ecuación ha de ser cierta para todo x, podemos sustituir valores *astutos* de x para obtener ecuaciones en A y B. Los valores más convenientes son los que anulan algún factor.

Para hallar A hacemos $x = 3$, con lo que

$$1 = A(3 - 2) + B(3 - 3) \qquad \text{Hacemos } x = 3 \text{ en la ecuación básica}$$
$$1 = A(1) + B(0)$$
$$A = 1$$

Para calcular B, hacemos $x = 2$, con lo que

$$1 = A(2-2) + B(2-3) \qquad \text{Hacemos } x = 2 \text{ en la ecuación básica}$$
$$1 = A(0) + B(-1)$$
$$B = -1$$

En consecuencia, la descomposición es

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

como se había anunciado al comienzo de esta sección. □

PARA MÁS INFORMACIÓN Sobre un método distinto de hallar la descomposición en fracciones simples, llamado el método de Heavyside, véase el artículo «Calculus to Algebra Connections in Partial Fraction Decomposition» de Joseph Wiener y Will Watkins en *The AMATYC Review*, volumen 15, n.º 1.

Téngase bien presente que el método de las fracciones simples sólo es práctico si se puede factorizar el denominador de manera «sencilla». Por ejemplo, si el denominador del Ejemplo 1 se cambiase por $x^2 - 5x + 5$, su factorización como

$$x^2 - 5x + 5 = \left[x + \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right]\left[x - \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right]$$

sería demasiado engorrosa como para usar fracciones simples. En tales casos, es preferible completar el cuadrado o recurrir a integración simbólica en la calculadora. Si efectúa la integración por cualquiera de estos métodos debe llegar a la respuesta

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 5}\,dx = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln(2x - \sqrt{5} - 5) - \frac{\sqrt{5}}{5}\ln(2x + \sqrt{5} - 5) + C$$

EJEMPLO 2 Factores lineales repetidos

Hallar $\displaystyle\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}\,dx$

Solución: Como

$$x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1)$$
$$= x(x+1)^2$$

PARA MÁS INFORMACIÓN Un método alternativo de aplicación de las fracciones simples puede verse en el artículo «A Shortcut in Partial Fractions» de Xun-Cheng Huang en *The College Mathematics Journal*, noviembre 1991.

tenemos que incluir una fracción por *cada potencia* de x y de $(x + 1)$, es decir

$$\frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

Multiplicando por el mínimo común denominador $x(x + 1)^2$ obtenemos la *ecaución básica*

$$5x^2 + 20x + 6 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx \qquad \text{Ecuación básica}$$

Para hallar A, hacemos $x = 0$. de esa forma eliminamos los términos en B y C, con lo que queda

$$6 = A(1) + 0 + 0$$
$$A = 6$$

Para calcular C, hacemos $x = -1$, lo cual elimina los de A y C, dejando

$$5 - 20 + 6 = 0 + 0 - C$$
$$C = 9$$

Ya hemos aprovechado las elecciones más astutas para x, así que con el fin de determinar B, podemos usar *cualquier otro valor* de x, así como los valores ya conocidos de A y C. Tomando, por ejemplo, $x = 1$, y recordando que $A = 6$ y $C = 9$, vemos que

$$5 + 20 + 6 = A(4) + B(2) + C$$
$$31 = 6(4) + 2B + 9$$
$$-2 = 2B$$
$$B = -1$$

Por tanto,

$$\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x + 1)^2}\,dx = \int \left(\frac{6}{x} - \frac{1}{x + 1} + \frac{9}{(x + 1)^2}\right) dx$$
$$= 6 \ln |x| - \ln |x + 1| + 9\frac{(x + 1)^{-1}}{-1} + C$$
$$= \ln \left|\frac{x^6}{x + 1}\right| - \frac{9}{x + 1} + C$$

Pueden utilizarse programas como *Derive, Maple, Mathcad, Mathematica* o *TI-92* para efectuar la descomposición de una función racional en fracciones simples. A título de ejemplo, con *Maple* se obtiene

$$> \text{convert}\left(\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}, parfrac, x\right)$$
$$\frac{6}{x} + \frac{9}{(x + 1)^2} - \frac{1}{x + 1}$$

Compruebe este resultado por derivación, simplificando en lo posible la derivada hasta llegar al integrando en su forma original. □

Nota. Es necesario efectuar tantas sustituciones en x como coeficientes desconocidos (A, B, C, ...) haya que determinar. Así, en el Ejemplo 2 hemos hecho tres sustituciones ($x = -1$, $x = 0$, $x = 1$) para lograr calcular A, B y C.

Factores cuadráticos

Cuando se trata de factores lineales, cada elección conveniente de x proporciona uno de los coeficientes de la descomposición. Por el contrario, en el caso de factores cuadráticos hay que resolver un sistema de ecuaciones lineales, independientemente de la elección del valor de x sustituido.

EJEMPLO 3 Factores cuadráticos y lineales distintos

Hallar $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)}\,dx$

Solución: Al ser

$$(x^2 - x)(x^2 + 4) = x(x - 1)(x^2 + 4)$$

hemos de incluir una fracción simple por cada factor, así que debemos escribir

$$\frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x - 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$$

Multiplicando por el mínimo común denominador obtenemos la *ecuación básica* $x(x - 1)(x^2 + 4)$

$$2x^3 - 4x - 8 = A(x - 1)(x^2 + 4) + Bx(x^2 + 4) + (Cx + D)(x)(x - 1)$$

Para hallar A, hacemos $x = 0$ y obtenemos

$$-8 = A(-1)(4) + 0 + 0 \quad \Longrightarrow \quad A = 2$$

El valor de B se calcula haciendo $x = 1$, lo que lleva a

$$10 = 0 + B(5) + 0 \quad \Longrightarrow \quad B = -2$$

Todavía faltan por conocer C y D. Para determinarlos, sustituimos dos valores cualesquiera en x y resolvemos el sistema de ecuaciones lineales que resulta. Así, recordando que $A = 2$ y $B = -2$, al tomar $x = -1$ se obtiene

$$-6 = (2)(-2)(5) + (-2)(-1)(5) + (-C + D)(-1)(-2)$$

$$2 = -C + D$$

y con $x = 2$ resulta esta otra ecuación

$$0 = (2)(1)(8) + (-2)(2)(8) + (2C + D)(2)(1)$$

$$8 = 2C + D$$

Resolvemos el sistema lineal restando la primera ecuación de la segunda.

$$-C + D = 2$$

$$2C + D = 8$$

de modo que $C = 2$. En consecuencia, $D = 4$. Por tanto,

$$\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x - 1)(x^2 + 4)}\, dx =$$

$$= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x - 1} + \frac{2x}{x^2 + 4} + \frac{4}{x^2 + 4}\right) dx =$$

$$= 2 \ln |x| - 2 \ln |x - 1| + \ln (x^2 + 4) + 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$$

□

En los Ejemplos 1, 2 y 3, iniciamos la resolución de la ecuación básica sustituyendo valores de x que anulaban factores lineales. Ese procedimiento funciona bien cuando la descomposición en fracciones simples contiene factores lineales, pero en el caso de factores cuadráticos hay otro método más conveniente.

EJEMPLO 4 Factores cuadráticos repetidos

Hallar $\displaystyle\int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2}\,dx$

Solución: Incluimos una fracción simple por cada potencia de $(x^2 + 2)$ y escribimos

$$\frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2}$$

Multiplicando por el mínimo común denominador deducimos la ecuación básica $(x^2 + 2)^2$

$$8x^3 + 13x = (Ax + B)(x^2 + 2) + Cx + D$$

Tras desarrollarla y agrupar términos análogos se convierte en

$$8x^3 + 13x = Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx + D$$

$$8x^3 + 13x = Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + (2B + D)$$

Ahora igualamos los coeficientes de términos análogos en ambos lados de la ecuación.

$8 = A$ $\qquad$ $0 = 2B + D$

$$8x^3 + 0x^2 + 13x + 0 = Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + (2B + D)$$

$0 = B$

$13 = 2A + C$

Utilizando los valores ya conocidos $A = 8$ y $B = 0$, resulta

$$13 = 2A + C = 2(8) + C \quad \Rightarrow \quad C = -3$$

$$0 = 2B + D = 2(0) + D \quad \Rightarrow \quad D = 0$$

Finalmente concluimos que

$$\int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2}\,dx = \int \left(\frac{8x}{x^2 + 2} + \frac{-3x}{(x^2 + 2)^2} \right) dx$$

$$= 4 \ln (x^2 + 2) + \frac{3}{2(x^2 + 2)} + C$$

□

Si intenta hallar una integral en la calculadora, usando integración simbólica, quizás obtenga una expresión diferente para la primitiva de la obtenida en el libro. Así, para la integral del Ejemplo 4 la integración simbólica da

$$\int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2}\,dx = \ln (x^8 + 8x^6 + 24x^4 + 32x^2 + 16) + \frac{3}{2(x^2 + 2)} + C$$

¿Es equivalente esta primitiva a la del Ejemplo 4?

Al integrar funciones racionales debe recordarse que si se nos da una expresión racional impropia, tal como

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{2x^3 + x^2 - 7x + 7}{x^2 + x - 2}$$

hay que efectuar la división, para llegar a una expresión racional propia. En ese caso

$$\frac{N(x)}{D(x)} = 2x - 1 + \frac{-2x + 5}{x^2 + x - 2}$$

Y a continuación la expresión racional propia se descompone en fracciones simples por el procedimiento habitual. Las siguientes líneas de actuación servirán de ayuda a la hora de resolver la ecuación básica a que da lugar la descomposición en fracciones simples.

Estrategia para resolver la ecuación básica

Factores lineales

1. Sustituir en la ecuación básica las *raíces* de los distintos factores lineales.
2. Si hay factores lineales repetidos, usar los coeficientes determinados en el apartado 1 para reescribir la ecuación básica. A continuación, sustituir *otros* valores convenientes de x para obtener los restantes coeficientes.

Factores cuadráticos

1. Desarrollar la ecuación básica.
2. Agrupar términos atendiendo a las potencias de x.
3. Igualar los coeficientes de cada potencia para obtener un sistema de ecuaciones lineales en A, B, C, etc.
4. Resolver ese sistema de ecuaciones lineales.

Terminamos la sección insistiendo en varias cosas importantes. En primer lugar, no siempre es necesario descomponer una función racional en fracciones

simples. Sin ir más lejos, la siguiente integral se resuelve más fácilmente con la regla log.

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x-4}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+3}{x^3+3x-4}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+3x-4| + C$$

En segundo lugar, si el integrando no está en forma reducida, puede ocurrir que reduciéndolo evitemos tener que recurrir a la descomposición en fracciones simples, como muestra la integral

$$\int \frac{x^2-x-2}{x^3-2x-4}\,dx = \int \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+2)}\,dx$$
$$= \int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| + C$$

Finalmente, las fracciones simples pueden ser de utilidad incluso en algunos cocientes de funciones trascendentes. Así, la sustitución $u = \text{sen}\, x$ permite ver que

$$\int \frac{\cos x}{\text{sen}\, x\,(\text{sen}\, x - 1)}\,dx = \int \frac{du}{u(u-1)} \qquad u = \text{sen}\, x,\ du = \cos x\, dx$$

Ejercicios de la Sección 7.5

En los Ejercicios 1-6, escribir la forma que tiene la descomposición en fracciones simples. No se pide determinar las constantes.

1. $\dfrac{5}{x^2-10x}$

2. $\dfrac{4x^2+3}{(x-5)^3}$

3. $\dfrac{2x-3}{x^3+10x}$

4. $\dfrac{x-2}{x^2+4x+3}$

5. $\dfrac{16x}{x^3-10x^2}$

6. $\dfrac{2x-1}{x(x^2+1)^2}$

En los Ejercicios 7-18, hallar la integral mediante fracciones simples (factores lineales).

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2-9}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{3}{x^2+x-2}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4x+3}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{5-x}{2x^2+x-1}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{x^2+12x+12}{x^3-4x}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2}\,dx$

15. $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2-15x+5}{x^2-2x-8}\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-4x}\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{4x^2+2x-1}{x^3+x^2}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{(x-1)^2}\,dx$

En los Ejercicios 19-26, hallar la integral mediante fracciones simples (factores lineales y cuadráticos).

19. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^3+x}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-1}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4-2x^2-8}\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+8}{(x^2+4)^2}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{x}{16x^4-1}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+7}{x^3-x^2+x+3}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{x^2+5}{x^3-x^2+x+3}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+3}{x^4+6x^2+9}\,dx$

En los Ejercicios 27-30, calcular el valor de la integral definida y verificar el resultado en la calculadora.

27. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{2x^2 + 5x + 2}\,dx$

28. $\displaystyle\int_1^5 \frac{x - 1}{x^2(x + 1)}\,dx$

29. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x + 1}{x(x^2 + 1)}\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 - x}{x^2 + x + 1}\,dx$

En los Ejercicios 31-38, usar integración simbólica para encontrar la primitiva que pasa por el punto indicado. Representar la primitiva obtenida.

	Integral	*Punto*
31.	$\displaystyle\int \frac{3x}{x^2 - 6x + 9}\,dx$	(4, 0)
32.	$\displaystyle\int \frac{6x^2 + 1}{x^2(x - 1)^3}\,dx$	(2, 1)
33.	$\displaystyle\int \frac{x^2 + x + 2}{(x^2 + 2)^2}\,dx$	(0, 1)
34.	$\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2 - 4)^2}\,dx$	(3, 4)
35.	$\displaystyle\int \frac{2x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 - x - 2}\,dx$	(3, 10)
36.	$\displaystyle\int \frac{x(2x - 9)}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\,dx$	(3, 2)
37.	$\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1}\,dx$	(2, 6)
38.	$\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 4}\,dx$	(6, 4)

En los Ejercicios 39-44, hallar la integral por sustitución.

39. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x(\cos x - 1)}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos^2 x}\,dx$

41. $\displaystyle\int \frac{3 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2}\,dx$

42. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x + 1)}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x - 1)(e^x + 4)}\,dx$

44. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^{2x} + 1)(e^x - 1)}\,dx$

En los Ejercicios 45-48, verificar la fórmula de integración usando descomposición en fracciones simples.

45. $\displaystyle\int \frac{1}{x(a + bx)}\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a + bx}\right| + C$

46. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C$

47. $\displaystyle\int \frac{x}{(a + bx)^2}\,dx = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a + bx} + \ln|a + bx|\right) + C$

48. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(a + bx)}\,dx = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{x}{a + bx}\right| + C$

49. ***Aproximación*** Averiguar qué valor aproxima mejor al área de la región entre el eje x y la gráfica de la función $10/[x(x^2 + 1)]$en el intervalo [1, 3]. (Decidir atendiendo a un croquis de la región, no a cálculos detallados.)

a) −6 *b*) 6 *c*) 3 *d*) 5 *e*) 8

50. ***Área*** Calcular el área de la región acotada por las gráficas de $y = 7/(16 - x^2)$ e $y = 1$.

51. ***Volumen y centroide*** Consideremos la región acotada por las gráficas de $y = 2x/(x^2 + 1)$, $y = 0$, $x = 0$, y $x = 3$.

a) Calcular el volumen del sólido generado al hacerla girar en torno al eje x.

b) Localizar el centroide de la región.

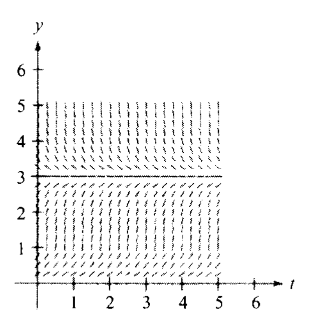
52. ***Crecimiento logístico*** En el Capítulo 5 dedujimos la ecuación del crecimiento exponencial a partir de la hipótesis de que el ritmo de crecimiento era, en cada momento, proporcional a la población existente. En la práctica suele haber una cota superior L que no es posible traspasar. En tales circunstancias, suponemos que el ritmo de crecimiento es proporcional, no sólo a la población existente, sino también a la diferencia entre ella y la cota superior L. Esto es,

$$\frac{dy}{dt} = ky(L - y)$$

Se puede expresar eso mismo en forma integral como

$$\int \frac{dy}{y(L - y)} = \int k\,dt$$

a) La figura muestra un campo de direcciones de la ecuación $dy/dt = y(3 - y)$. Dibujar una posible solución de esa ecuación diferencial con $y(0) = 5$ y otra con $y(0) = \frac{1}{2}$.



b) Donde $y(0)$ es mayor que 3, ¿cuál es el signo de la pendiente de la solución?

c) Para $y > 0$, calcular $\lim_{t \to \infty} y(t)$

d) Evaluar las dos integrales anteriores y expresar y en función de t, denotando por y_0 la cantidad inicial.

e) Usar el resultado de *d)* para hallar y representar las soluciones del apartado *a)*. Representar en la calculadora las soluciones y comparar los resultados con los de *a)*.

f) La gráfica de y es la llamada **curva logística**. Probar que el ritmo de crecimiento es máximo en el punto de inflexión, y que éste se encuentra localizado en $y = L/2$.

53. ***Un modelo para epidemias*** Un individuo infectado entra en una comunidad de n individuos sanos. Sea x el número de infectados en el instante t. Un modelo común para describir las epidemias supone que la enfermedad se extiende a un ritmo proporcional al producto del número de los ya afectados por el de los que todavía no han sido infectados. Así pues,

$$\frac{dx}{dt} = k(x + 1)(n - x)$$

y obtenemos

$$\int \frac{1}{(x + 1)(n - x)}\, dx = \int k\, dt$$

54. ***Reacciones químicas*** En una reacción química, una unidad del compuesto Y y una del compuesto Z se convierten en una sola unidad del compuesto X. Si x es la cantidad del compuesto X formada, y el ritmo de formación de X es proporcional al producto de las cantidades que quedan sin transformar de Y y de Z, entonces

$$\frac{dx}{dt} = k(y_0 - x)(z_0 - x)$$

donde y_0, z_0 son las cantidades iniciales de Y, Z respectivamente. De la ecuación anterior se deduce

$$\int \frac{1}{(y_0 - x)(z_0 - x)}\, dx = \int k\, dt$$

a) Efectuar las dos integraciones y despejar x en términos de t.

b) Usar el resultado de *a)* para hallar x cuando $t \to \infty$ si (1) $y_0 < z_0$, (2) $y_0 > z_0$ y (3) $y_0 = z_0$.

55. Usar fracciones simples para calcular

$$\int_0^1 \frac{x}{1 + x^4}\, dx$$

56. Supongamos que el denominador de una función racional se descompone en factores lineales distintos

$$D(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

para un cierto entero positivo n y números reales distintos $c_1, c_2, \cdots, c_n$. Si N es un polinomio de grado menor que n, probar que

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{P_1}{x - c_1} + \frac{P_2}{x - c_2} + \cdots + \frac{P_n}{x - c_n}$$

donde $P_k = N(c_k)/D'(c_k)$ para $k = 1, 2, ..., n$. Obsérvese que esto no es sino la descomposición en fracciones simples de $N(x)/D(x)$.

57. Usar los resultados del Ejercicio 56 para encontrar la descomposición en fracciones simples de

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^4 - 13x^2 + 12x}$$



7.6 Integración por tablas y otras técnicas de integración



CONTENIDO ▪
Integración por tablas ▪
Fórmulas de reducción ▪
Funciones racionales de seno y coseno ▪

Integración por tablas

Hasta este momento, hemos estudiado en el presente capítulo diversas técnicas de integración utilizables con ayuda de las reglas básicas. Ahora bien, saber *cómo* utilizarlas no es suficiente. Es preciso además saber *cuándo*. La integración es, por encima de todo, un problema de reconocimiento: hay que reconocer qué regla o técnica utilizar para encontrar una primitiva. Con frecuencia sucede que una ligera modificación de un integrando requiere una técnica totalmente distinta (o incluso puede llevar a una situación en la que la

primitiva no sea una función elemental), como ilustran los siguientes ejemplos.

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C \qquad \text{Integración por partes}$$

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C \qquad \text{Regla de las potencias}$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} \, dx = \ln |\ln x| + C \qquad \text{Regla log}$$

$$\int \frac{x}{\ln x} \, dx = ? \qquad \text{No es una función elemental}$$



En parte, una calculadora capaz de efectuar integración simbólica es una base de fórmulas de integración. La diferencia esencial entre una tabla de integrales y la calculadora es que ésta busca en su base de fórmulas la que ajuste adecuadamente, mientras que en la tabla hemos de ser nosotros quienes nos encarguemos del rastreo.

Las tablas de integrales constituyen un suplemento valioso de las reglas de integración discutidas en este capítulo. En el apéndice se incluyen tablas con integrales comunes. La **integración por tablas** no es una panacea universal que salve todos los escollos de la integración. Exige dosis notables de reflexión y de ingenio, e incluso, con frecuencia, recurrir a cambios de variable.

Cada una de las fórmulas de integración que figuran en el apéndice es alcanzable por las técnicas que ya conocemos. Intente verificar algunas de ellas. Por ejemplo, la Fórmula 4

$$\int \frac{u}{(a + bu)^2} \, du = \frac{1}{b^2} \left(\frac{a}{a + bu} + \ln |a + bu| \right) + C \qquad \text{Fórmula 4}$$

puede comprobarse usando descomposición en fracciones simples, a su vez, la fórmula 19

$$\int \frac{\sqrt{a + bu}}{u} \, du = 2\sqrt{a + bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}} \qquad \text{Fórmula 19}$$

se puede verificar integrando por partes. Las integrales del apéndice están clasificadas atendiendo a las expresiones que contienen, a saber:

u^n	$(a + bu)$
$(a + bu + cu^2)$	$\sqrt{a + bu}$
$(a^2 \pm u^2)$	$\sqrt{u^2 \pm a^2}$
$\sqrt{a^2 - u^2}$	Funciones trigonométricas
Funciones trigonométricas inversas	Funciones exponenciales
Funciones logarítmicas	

EXPLORACIÓN

Use las tablas de integrales del Apéndice y la sustitución

$$u = \sqrt{x - 1}$$

para hallar la integral del Ejemplo 1. Comprobará que se obtiene

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x - 1}} = \int \frac{2 \, du}{u^2 + 1}$$

¿Es el mismo resultado al que se ha llegado en el Ejemplo 1?

EJEMPLO 1 Integración por tablas

Hallar $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x - 1}}$.

Solución: Puesto que la expresión que está dentro del radical es lineal, consideramos las integrales del tipo $\sqrt{a + bu}$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a + bu}{-a}} + C \qquad \text{Fórmula 17 } (a < 0)$$

Con $a = -1$, $b = 1$ y $u = x$, se tiene $du = dx$ y por tanto

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x - 1}} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x - 1} + C$$

□

EJEMPLO 2 Integración por tablas

Hallar $\int x\sqrt{x^4 - 9}\, dx$.

Solución: El radical es de la forma $\sqrt{u^2 - a^2}$, así que utilizamos la fórmula 26.

$$\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 - a^2} - a^2 \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}|\right) + C$$

Hacemos $u = x^2$ y $a = 3$. En consecuencia, $du = 2x\, dx$, luego

$$\int x\sqrt{x^4 - 9}\, dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{(x^2)^2 - 3^2}\, (2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(x^2\sqrt{x^4 - 9} - 9 \ln |x^2 + \sqrt{x^4 - 9}|\right) + C$$

□

EJEMPLO 3 Integración por tablas

Hallar $\int \frac{x}{1 + e^{-x^2}}\, dx$

Solución: De las integrales que contienen e^u, elegimos

$$\int \frac{du}{1 + e^u} = u - \ln (1 + e^u) + C \qquad \text{Fórmula 84}$$

Hacemos $u = -x^2$. Entonces $du = -2x\, dx$ y concluimos que

$$\int \frac{x}{1 + e^{-x^2}}\, dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x\, dx}{1 + e^{-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}[-x^2 - \ln (1 + e^{-x^2})] + C$$

$$= \frac{1}{2}[x^2 + \ln (1 + e^{-x^2})] + C$$

□

El Ejemplo 3 pone de relieve la importancia de tener varias soluciones técnicas a nuestro alcance. Esta integral no es difícil de resolver con las tablas, pero cuando hemos intentado resolverla con un programa informático de integración simbólica muy conocido, la calculadora ha sido incapaz de encontrar su primitiva.

Nota. A veces, cuando se usa integración simbólica se obtienen resultados que, aun siendo equivalentes, parecen muy distintos. Para la integral del Ejemplo 5, varios programas de integración simbólica dan los siguientes resultados.

Maple

$$\int \frac{\sqrt{3-5x}}{2x}\,dx =$$
$$= \sqrt{3-5x} -$$
$$= \sqrt{3}\ \text{arctgh}\left(\frac{1}{3}\sqrt{3-5x}\sqrt{3}\right)$$

Derive

$$\int \frac{\sqrt{3-5x}}{2x}\,dx =$$
$$= \sqrt{3}\ \ln\left[\frac{\sqrt{(3-5x)}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}}\right] +$$
$$+ \sqrt{(3-5x)}$$

Matematica

$$\int \frac{\sqrt{3-5x}}{2x}\,dx =$$
= Sqrt [3 − 5x] − Sqrt [3] arctgh
$$\left[\frac{\text{Sqrt }[3-5x]}{\text{Sqrt }[3]}\right]$$

Mathcad

$$\int \frac{\sqrt{3-5x}}{2x}\,dx =$$
$$= \sqrt{3-5x} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$\ln\left[-\frac{1}{5}\frac{(-6+5x+2\sqrt{3}\sqrt{3-5x}}{x}\right]$$

Nótese además que estos programas no incluyen la constante de integración en su respuesta.

Fórmulas de reducción

Algunas integrales de las tablas tienen la forma $\int f(x)\,dx = g(x) + \int h(x)\,dx$. Tales fórmulas de integración se llaman **fórmulas de reducción**, ya que reducen una integral dada a la suma de una función y otra integral más sencilla.

EJEMPLO 4 Aplicación de una fórmula de reducción

Hallar $\displaystyle\int x^3 \text{ sen } x\,dx$.

Solución: Consideremos las tres fórmulas siguientes.

$$\int u \text{ sen } u\,du = \text{sen } u - u\cos u + C \qquad \text{Fórmula 52}$$

$$\int u^n \text{ sen } u\,du = -u^n\cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du \qquad \text{Fórmula 54}$$

$$\int u^n \cos u\,du = u^n \text{ sen } u - n\int u^{n-1} \text{ sen } u\,du \qquad \text{Fórmula 55}$$

Usando la fórmula 54, después la 55 y finalmente la 52, se obtiene

$$\int x^3 \text{ sen } x\,dx = -x^3\cos x + 3\int x^2\cos x\,dx$$
$$= -x^3\cos x + 3\left(x^2 \text{ sen } x - 2\int x \text{ sen } x\,dx\right)$$
$$= -x^3\cos x + 3x^2 \text{ sen } x + 6x\cos x - 6 \text{ sen } x + C$$ □

EJEMPLO 5 Aplicación de una fórmula de reducción

Hallar $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3-5x}}{2x}\,dx$.

Solución: Consideremos las dos fórmulas siguientes.

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C \qquad \text{Fórmula 17 } (a>0)$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} \qquad \text{Fórmula 19}$$

De la Fórmula 19, con $a = 3$, $b = -5$, y $u = x$, se obtiene

$$\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{3-5x}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{3-5x} + 3\int \frac{dx}{x\sqrt{3-5x}}\right)$$

$$= \sqrt{3-5x} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{3-5x}}$$

Usando ahora la fórmula 17, con $a = 3$, $b = -5$, y $u = x$, se obtiene

$$\int \frac{\sqrt{3-5x}}{2x}\,dx = \sqrt{3-5x} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3-5x}-\sqrt{3}}{\sqrt{3-5x}+\sqrt{3}}\right|\right) + C$$

$$= \sqrt{3-5x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{3-5x}-\sqrt{3}}{\sqrt{3-5x}+\sqrt{3}}\right| + C \qquad \square$$

Funciones racionales de seno y coseno

EJEMPLO 6 Integración por tablas

Hallar $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{2+\cos x}\,dx$.

Solución: Poniendo $2 \operatorname{sen} x \cos x$ en lugar de $\operatorname{sen} 2x$ obtenemos

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{2+\cos x}\,dx = 2\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2+\cos x}\,dx$$

Basta una mirada a las formas que contienen $\operatorname{sen} u$ y $\cos u$ en el apéndice para convencerse de que ninguna de ellas es aplicable. Por tanto, volvemos la vista hacia las formas que contienen $a + bu$. Por ejemplo,

$$\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}(bu - a\ln|a+bu|) + C \qquad \text{Fórmula 3}$$

Sea $a = 2$, $b = 1$, y $u = \cos x$. Entonces $du = -\operatorname{sen} x\,dx$, y obtenemos

$$2\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2+\cos x}\,dx = -2\int \frac{\cos x(-\operatorname{sen} x\,dx)}{2+\cos x}$$

$$= -2(\cos x - 2\ln|2+\cos x|) + C$$

$$= -2\cos x + 4\ln|2+\cos x| + C \qquad \square$$

El Ejemplo 6 se refería a una expresión racional en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Si no se consigue encontrar una integral de esta forma en las tablas, hay que intentar la siguiente sustitución especial con el fin de convertirla en una expresión racional usual.

SUSTITUCIÓN PARA FUNCIONES RACIONALES DE SENO Y COSENO

Para funciones racionales de seno y coseno, la sustitución

$$u = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

hace que

$$\cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \ \operatorname{sen} x = \frac{2u}{1 + u^2}, \ \text{y } dx = \frac{2\,du}{1 + u^2}$$

Demostración: Del cambio de variable propuesto se deduce que

$$u^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

Despejando $\cos x$ vemos que $\cos x = (1 - u^2)/(1 + u^2)$. Para hallar $\operatorname{sen} x$, escribimos $u = \operatorname{sen} x/(1 + \cos x)$ como

$$\operatorname{sen} x = u(1 + \cos x) = u\left(1 + \frac{1 - u^2}{1 + u^2}\right) = \frac{2u}{1 + u^2}$$

Además, de $u = \operatorname{tg}(x/2)$ se sigue que $\operatorname{arctg} u = x/2$, y de ahí finalmente obtenemos $dx = (2\,du)/(1 + u^2)$ □

Ejercicios de la Sección 7.6

En los Ejercicios 1 y 2, hallar la integral consultando en las tablas las formas que contienen $a + bu$.

1. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1 + x}\,dx$ **2.** $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2(2x - 1)^2}\,dx$

En los Ejercicios 3 y 4, hallar la integral consultando en las tablas las formas que contienen $\sqrt{u^2 \pm a^2}$.

3. $\displaystyle\int e^x\sqrt{1 + e^{2x}}\,dx$ **4.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}\,dx$

En los Ejercicios 5 y 6, hallar la integral consultando en las tablas las formas que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$.

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1 - x^2}}\,dx$ **6.** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9 - x^4}}\,dx$

En los Ejercicios 7-10, usar una tabla de integrales con formas que contengan funciones trigonométricas para hallar la integral.

7. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 2x\,dx$ **8.** $\displaystyle\int \frac{\cos^3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 - \cos\sqrt{x})}\,dx$ **10.** $\displaystyle\int \frac{1}{1 - \operatorname{tg} 5x}\,dx$

En los Ejercicios 11 y 12, hallar la integral consultando en las tablas las formas que contienen e^u.

11. $\displaystyle\int \frac{1}{1 + e^{2x}}\,dx$ **12.** $\displaystyle\int e^{-2x}\cos 3x\,dx$

En los Ejercicios 13 y 14, hallar la integral consultando en las tablas las formas que contienen $\ln u$.

13. $\displaystyle\int x^3 \ln x\,dx$ **14.** $\displaystyle\int (\ln x)^3\,dx$

En los Ejercicios 15-18, hallar la integral indefinida *a*) con ayuda de tablas y *b*) por el método indicado.

	Integral	*Método*
15.	$\int x^2 e^x \, dx$	Integración por partes
16.	$\int x^4 \ln x \, dx$	Integración por partes
17.	$\int \frac{1}{x^2(x+1)} \, dx$	Fracciones simples
18.	$\int \frac{1}{x^2 - 75} \, dx$	Fracciones simples

En los Ejercicios 19-50, hallar la integral con ayuda de tablas.

19. $\int x e^{x^2} \, dx$

20. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} \, dx$

21. $\int x \operatorname{arcsec} (x^2 + 1) \, dx$

22. $\int \operatorname{arcsec} 2x \, dx$

23. $\int x^2 \ln x \, dx$

24. $\int x \operatorname{sen} x \, dx$

25. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 4}} \, dx$

26. $\int \frac{x^2}{(3x - 5)^2} \, dx$

27. $\int \frac{2x}{(1 - 3x)^2} \, dx$

28. $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \, dx$

29. $\int e^x \arccos e^x \, dx$

30. $\int \frac{\theta^2}{1 - \operatorname{sen} \theta^3} \, d\theta$

31. $\int \frac{x}{1 - \sec x^2} \, dx$

32. $\int \frac{e^x}{1 - \operatorname{tg} e^x} \, dx$

33. $\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} \, dx$

34. $\int \frac{1}{t[1 + (\ln t)^2]} \, dt$

35. $\int \frac{\cos \theta}{3 + 2 \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2 \theta} \, d\theta$

36. $\int \sqrt{3 + x^2} \, dx$

37. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{2 + 9x^2}} \, dx$

38. $\int x^2\sqrt{2 + 9x^2} \, dx$

39. $\int t^4 \cos t \, dt$

40. $\int \sqrt{x} \operatorname{arctg} x^{3/2} \, dx$

41. $\int \frac{\ln x}{x(3 + 2 \ln x)} \, dx$

42. $\int \frac{e^x}{(1 - e^{2x})^{3/2}} \, dx$

43. $\int \frac{x}{(x^2 - 6x + 10)^2} \, dx$

44. $\int (2x - 3)^2\sqrt{(2x - 3)^2 + 4} \, dx$

45. $\int \frac{x}{\sqrt{x^4 - 6x^2 + 5}} \, dx$

46. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + 1}} \, dx$

47. $\int \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} \, dx$

48. $\int \sqrt{\frac{3 - x}{3 + x}} \, dx$

49. $\int \frac{e^{3x}}{(1 + e^x)^3} \, dx$

50. $\int \sec^5 \theta \, d\theta$

En los Ejercicios 51-56, verificar la fórmula de integración.

51. $$\int \frac{u^2}{(a + bu)^2} \, du = \frac{1}{b^3}\left(bu - \frac{a^2}{a + bu} - 2a \ln |a + bu|\right) + C$$

52. $$\int \frac{u^n}{\sqrt{a + bu}} \, du = \frac{2}{(2n + 1)b}\left(u^n\sqrt{a + bu} - na \int \frac{u^{n-1}}{\sqrt{a + bu}} \, du\right)$$

53. $$\int \frac{1}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} \, du = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$$

54. $$\int u^n \cos u \, du = u^n \operatorname{sen} u - n \int u^{n-1} \operatorname{sen} u \, du$$

55. $$\int \operatorname{arctg} u \, du = u \operatorname{arctg} u - \ln \sqrt{1 + u^2} + C$$

56. $$\int (\ln u)^n \, du = u(\ln u)^n - n \int (\ln u)^{n-1} \, du$$

En los Ejercicios 57-62, usar integración simbólica en la calculadora para encontrar la primitiva que pasa por el punto que se especifica y representar su gráfica.

	Integral	*Punto*
57.	$\int \frac{1}{x^{3/2}\sqrt{1 - x}} \, dx$	$\left(\frac{1}{2}, 5\right)$
58.	$\int x\sqrt{x^2 + 2x} \, dx$	$(0, 0)$
59.	$\int \frac{\sqrt{2 - 2x - x^2}}{x + 1} \, dx$	$(0, \sqrt{2})$
60.	$\int \frac{1}{(x^2 - 6 + 10)^2} \, dx$	$(3, 0)$

61. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}\,\theta\,\operatorname{tg}\,\theta}\,d\theta$ $\quad\left(\dfrac{\pi}{4}, 2\right)$

62. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\,\theta}{(\cos\,\theta)(1+\operatorname{sen}\,\theta)}\,d\theta$ $\quad(0, 1)$

En los Ejercicios 63-70, calcular la integral.

63. $\displaystyle\int \frac{1}{2-3\,\operatorname{sen}\,\theta}\,d\theta$

64. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\,\theta}{1+\cos^2\theta}\,d\theta$

65. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\operatorname{sen}\,\theta\,\cos\,\theta}\,d\theta$

66. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3-2\cos\,\theta}\,d\theta$

67. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\,\theta}{3-2\cos\,\theta}\,d\theta$

68. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\,\theta}{1+\operatorname{sen}\,\theta}\,d\theta$

69. $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}}\,d\theta$

70. $\displaystyle\int \frac{1}{\sec\,\theta-\operatorname{tg}\,\theta}\,d\theta$

Área En los Ejercicios 71 y 72, calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

71. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$, $y = 0$, $x = 8$

72. $y = \dfrac{x}{1+e^{x^2}}$, $y = 0$, $x = 2$

73. ***Trabajo*** Un cilindro hidráulico de una máquina industrial empuja un bloque de hierro una distancia de x pies ($0 \leqslant x \leqslant 5$). La fuerza variable requerida para ello es

$$F(x) = 2.000\,xe^{-x} \text{ libras}$$

Determinar cuánto trabajo se ha realizado al desplazar el bloque 5 pies.

74. ***Trabajo*** Repetir el Ejercicio 73 usando una fuerza

$$F(x) = \frac{500x}{\sqrt{26-x^2}} \text{ libras}$$

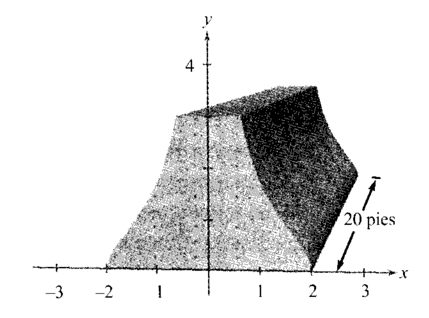
75. ***Diseño arquitectónico*** La sección de un soporte de cemento de 20 pies de largo (véase figura) está acotada por las gráficas de las ecuaciones

$$x = \frac{2}{\sqrt{1+y^2}},\quad x = \frac{-2}{\sqrt{1+y^2}},\quad y = 0 \text{ e } y = 3$$

donde x e y se miden en pies.

a) Calcular el volumen V y el peso W de ese soporte, supuesto que el cemento pesa 148 libras/pie^3.

b) Localizar el centroide de la sección.



76. ***Población media*** Una población crece siguiendo el modelo logístico

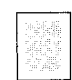
$$N = \frac{5.000}{1+e^{4{,}8-1{,}9t}}$$

donde t es el tiempo en días. Calcular la población media en el intervalo [0, 2].

En los Ejercicios 77 y 78, usar la calculadora para *a*) despejar la constante k en la ecuación integral, y *b*) representar la región cuya área viene dada por esa integral.

77. $\displaystyle\int_0^4 \frac{k}{2+3x}\,dx = 10$

78. $\displaystyle\int_0^k 6x^2e^{-x/2}\,dx = 50$



7.7 Formas indeterminadas y la regla de L'Hôpital

Formas indeterminadas

Ya se dijo en los Capítulos 1 y 3 que las formas 0/0 y ∞/∞ se llaman *indeterminadas*, porque ni garantizan que exista el límite ni, en caso de que exista, determinan cuál es su valor. Cuando nos hemos encontrado con ellas hemos intentado reescribir la expresión recurriendo a técnicas algebraicas.

Forma Indeterminada	*Límite*	*Técnicas algebraicas*
$\frac{0}{0}$	$\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x^2 - 2}{x + 1} = \lim\limits_{x\to -1} 2(x - 1) = -4$	Dividir numerador y denominador por $(x + 1)$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1} = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{3 - (1/x^2)}{2 + (1/x^2)} = \frac{3}{2}$	Dividir numerador y denominador por x^2

Ocasionalmente, se pueden extender estas manipulaciones algebraicas al cálculo de límites de funciones trascendentes. Así, el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$$

produce la forma indeterminada 0/0, pero factorizando y efectuando la división vemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x + 1)(e^x - 1)}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} (e^x + 1) = 2$$

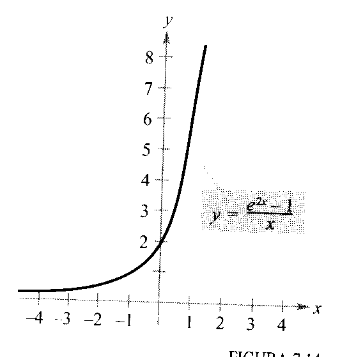


FIGURA 7.14
El límite cuando x tiende a 0 parece ser 2.

Sin embargo, no todas las formas indeterminadas se resuelven por manipulaciones algebraicas. Esto es especialmente cierto cuando aparecen mezcladas funciones algebraicas y funciones trascendentes. Por ejemplo, el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

produce una forma indeterminada 0/0. Reescribiendo la expresión como

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{x}\right)$$

sólo hemos logrado cambiar su forma indeterminada, que ahora es $\infty - \infty$. Naturalmente, la calculadora ayuda a adivinar cuál es el valor de ese límite, como ilustran la Figura 7.14 y la tabla. A la vista de ambas, se tiene la impresión de que el límite es 2. (Verificaremos esto en el Ejemplo 1.)

x	−1	−0,1	−0,01	−0,001	0	0,001	0,01	0,1	1
$\frac{e^{2x} - 1}{x}$	0,865	1,813	1,980	1,998	?	2,002	2,020	2,214	6,389

La regla de L'Hôpital



GUILLAUME L'HÔPITAL (1661-1704)

La regla de L'Hôpital debe su nombre al matemático francés Guillaume François Antoine de L'Hôpital, autor del primer libro sobre Cálculo diferencial (en 1696), en el que aparece la citada regla. Se ha descubierto recientemente que tanto la regla como su demostración estaban contenidas en una carta de John Bernoulli a L'Hôpital. «... Reconozco que debo mucho a las mentes brillantes de los hermanos Bernoulli . . . He hecho libre uso de sus hallazgos...», escribió L'Hôpital.

Para calcular el límite ilustrado en la Figura 7.14 es útil un teorema conocido como la **regla de L'Hôpital**. Establece que, bajo ciertas condiciones, el límite del cociente de dos funciones $f(x)/g(x)$ coincide con el límite del cociente de sus derivadas

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Su demostración utiliza el resultado conocido como **teorema general del valor medio**.

TEOREMA 7.3 EL TEOREMA GENERAL DEL VALOR MEDIO

Si f y g son derivables en un intervalo abierto (a, b) y continuas en $[a, b]$, y si además $g'(x) \neq 0$ para todo x en (a, b), existe algún punto c en (a, b) tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

| Nota. Para comprender por qué se llama teorema general del valor medio, basta observar que en el caso especial $g(x) = x$, se reduce al teorema del valor medio de la Sección 3.2.

El teorema general del valor medio y la regla de L'Hôpital se demuestran en el apéndice.

TEOREMA 7.4 LA REGLA DE L'HÔPITAL

Sean f y g funciones derivables en un intervalo abierto (a, b) que contiene a c, excepto posiblemente en el propio c. Supongamos que $g'(x) \neq 0$ para todo x en (a, b), excepto posiblemente en el propio c. Si el límite de $f(x)/g(x)$ cuando x tiende a c produce la forma indeterminada 0/0, entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

supuesto que el límite de la derecha existe o es infinito. Este resultado es válido también si el límite de $f(x)/g(x)$ produce cualquiera de las formas indeterminadas ∞/∞, $(-\infty)/\infty$, $\infty/(-\infty)$, o $(-\infty)/(-\infty)$.

| Nota. Un error muy frecuente al calcular un límite mediante la regla de L'Hôpital consiste en aplicar la regla del cociente a $f(x)/g(x)$. Recuerde siempre que la regla de L'Hôpital utiliza el cociente $f'(x)/g'(x)$ de las derivadas, no la derivada del cociente $f(x)/g(x)$.

PARA MÁS INFORMACIÓN
Sobre la necesidad de exigir $g'(x) \neq 0$ para todo x en (a, b) salvo en c, véase el artículo «Counterexamples to L'Hôpital Rule», de R. P. Boas, en *The American Mathematical Monthly*, octubre 1986.

La regla de L'Hôpital puede aplicarse también a límites laterales. Por ejemplo, si el límite de $f(x)/g(x)$ cuando x tiende a c *por la derecha* produce la forma indeterminada 0/0, entonces

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

supuesto que este último límite existe (o es infinito).

EXPLORACIÓN

Métodos numéricos y gráficos
Estimar, por métodos numéricos y gráficos, los valores de estos límites:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{2^{2x} - 1}{x}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{3^{2x} - 1}{x}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{4^{2x} - 1}{x}$

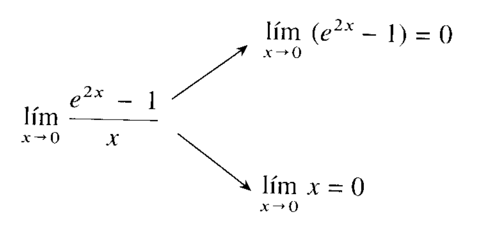
d) $\lim_{x \to 0} \frac{5^{2x} - 1}{x}$

¿Qué pautas se observan? ¿Presenta alguna ventaja un método analítico en estos casos? Si es así, explicar por qué.

EJEMPLO 1 Forma indeterminada 0/0

Evaluar $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

Solución: La sustitución directa lleva a una forma indeterminada 0/0



así que podemos aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}[e^{2x} - 1]}{\frac{d}{dx}[x]} \qquad \text{Aplicar la regla de L'Hôpital}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x}}{1} \qquad \text{Derivar numerador y denominador}$$

$$= 2 \qquad \text{Evaluar el límite}$$

□

Nota. Al escribir la cadena de igualdades del Ejemplo 1, no sabemos realmente que el primer límite es igual al segundo mientras no sepamos que este segundo existe. En otras palabras, si el segundo límite no hubiera existido, no hubiera sido legítima la aplicación de la regla de L'Hôpital.

Otra formulación de la regla de L'Hôpital establece que si el límite de $f(x)/g(x)$ cuando x tiende a ∞ (o a $-\infty$) produce una forma indeterminada 0/0 o ∞/∞, entonces

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

supuesto que el límite de la derecha existe.

EJEMPLO 2 Forma indeterminada ∞/∞

Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$

Solución: Por sustitución directa llegamos a una forma indeterminada ∞/∞, así que aplicamos la regla de L'Hôpital.

Nota. Intente dibujar $y_1 = \ln x$ e $y_2 = x$ en una misma pantalla de la calculadora. ¿Qué función crece más deprisa cuando x tiende a ∞? ¿Qué relación tiene esta observación con el Ejemplo 2?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}[\ln x]}{\frac{d}{dx}[x]} \qquad \text{Aplicar la regla de L'Hôpital}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \qquad \text{Derivar numerador y denominador}$$

$$= 0. \qquad \text{Evaluar el límite}$$

□

En ocasiones es necesario aplicar varias veces seguidas la regla de L'Hôpital para eliminar la indeterminación, como sucede en el Ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Aplicación repetida de la regla de L'Hôpital

Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}}$

Solución: Puesto que la sustitución directa produce la forma indeterminada ∞/∞, utilizamos la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{d}{dx}[x^2]}{\frac{d}{dx}[e^{-x}]} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}}$$

Este límite vuelve a producir una forma indeterminada, −∞/−∞, así que volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{d}{dx}[2x]}{\frac{d}{dx}[-e^{-x}]} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

□

Aparte de 0/0 y ∞/∞, hay otras formas indeterminadas, tales como $0 \cdot \infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0, y $\infty - \infty$. Por ejemplo, consideremos los cuatro límites siguientes, cada uno de los cuales produce una indeterminación de la forma $0 \cdot \infty$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0} (x)\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{El límite es 1}}, \quad \underbrace{\lim_{x\to 0} (x)\left(\frac{2}{x}\right)}_{\text{El límite es 2}}, \quad \underbrace{\lim_{x\to\infty} (x)\left(\frac{1}{e^x}\right)}_{\text{El límite es 0}}, \quad \underbrace{\lim_{x\to\infty} (e^x)\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{El límite es }\infty},$$

Como cada límite es diferente, queda claro que la forma $0 \cdot \infty$ es indeterminada, en el sentido de que no determina el valor del límite (ni siquiera asegura su existencia).

Los próximos ejemplos indican métodos de evaluación de tales formas indeterminadas. Consisten esencialmente en transformarlas a los tipos 0/0 o ∞/∞, con el objetivo de que la regla de L'Hôpital sea ya aplicable.

EJEMPLO 4 Forma indeterminada $0 \cdot \infty$

Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x}\sqrt{x}$

Solución: Como por sustitución directa se llega a la forma indeterminada $0 \cdot \infty$, hemos de intentar reescribir el límite en alguna de las formas 0/0 o ∞/∞. Este caso concreto se ajusta a la segunda de ellas.

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x}\sqrt{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x}$$

Por consiguiente, la regla de L'Hôpital permite concluir que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/(2\sqrt{x})}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2\sqrt{x}e^x} = 0 \qquad \square$$

Si no se consigue transformar en alguno de los tipos 0/0 o ∞/∞, debe intentarse convertir el límite dado en algún otro tipo. Así, en el Ejemplo 4 se puede escribir

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x}\sqrt{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{x^{-1/2}}$$

lo que da una forma indeterminada 0/0. De hecho, al aplicar la regla de L'Hôpital a este límite se obtiene

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{x^{-1/2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-e^{-x}}{-1/(2x^{3/2})}$$

que vuelve a ser de la forma indeterminada 0/0.

Las formas indeterminadas 1^∞, ∞^0, y 0^0 provienen de límites de funciones con bases y exponentes variables ambos. Cuando nos encontramos ante esta situación en la Sección 5.5 recurrimos a la derivación logarítmica para hallar la derivada. El mismo procedimiento sirve para calcular límites, como ilustra el próximo ejemplo. (Nótese que este ejemplo proporciona una demostración alternativa del Teorema 5.15.)

EJEMPLO 5 Forma indeterminada 1^∞

Evaluar $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Solución: Puesto que la sustitución directa conduce a una forma indeterminada 1^{∞}, procedemos como sigue. En primer lugar, supongamos que el límite existe y es igual a y.

$$y = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Tomando logaritmos naturales en los dos miembros de esa ecuación obtenemos

$$\ln y = \ln \left[\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]$$

Como la función logaritmo natural es continua, podemos escribir

$$\ln y = \lim_{x \to \infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] \qquad \text{Forma indeterminada } \infty \cdot 0$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\ln\,[1 + (1/x)]}{1/x}\right) \qquad \text{Forma indeterminada } 0/0$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{(-1/x^2)\{1/[1 + (1/x)]\}}{-1/x^2}\right) \qquad \text{Regla de L'Hôpital}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + (1/x)}$$

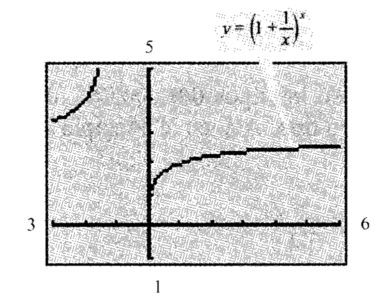


FIGURA 7.15
El límite de $[1 + (1/x)]^x$ cuando x tiende a infinito es e.

Ahora bien, eso prueba que $\ln y = 1$, y por tanto $y = e$, luego

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

La Figura 7.15, obtenida en una calculadora, confirma este resultado. □

Los Ejemplos 6 y 7 ilustran la aplicación de la regla de L'Hôpital a la evaluación de límites laterales.

EJEMPLO 6 Forma indeterminada 0^0

Calcular $\lim_{x \to 0^+} (\text{sen } x)^x$

Solución: La sustitución directa produce una indeterminación de la forma 0^0, así que procedemos como sigue. Suponemos que el límite existe con valor y.

$$y = \lim_{x \to 0^+} (\text{sen } x)^x \qquad \text{Forma indeterminada } 0^0$$

$$\ln y = \ln \left[\lim_{x \to 0^+} (\text{sen } x)^x\right] \qquad \text{Tomar logaritmos}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} [\ln (\text{sen } x)^x] \qquad \text{Continuidad}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} [x \ln (\text{sen } x)] \qquad \text{Forma indeterminada } 0 \cdot (-\infty)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln (\text{sen } x)}{1/x} \qquad \text{Forma indeterminada } -\infty/\infty$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\text{ctg } x}{-1/x^2} \qquad \text{Regla de L'Hôpital}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2}{\text{tg } x} \qquad \text{Forma indeterminada } 0/0$$

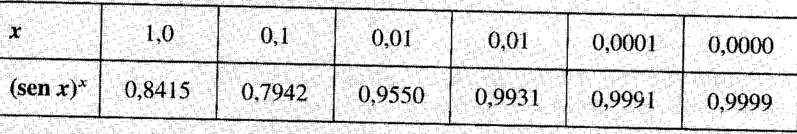
$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-2x}{\sec^2 x} = 0 \qquad \text{Regla de L'Hôpital}$$

Ahora, de $\ln y = 0$ deducimos que $y = e^0 = 1$, y en consecuencia

$$\lim_{x \to 0^+} (\text{sen } x)^x = 1$$

□

Cuando se calculan límites complicados como el del Ejemplo 6 conviene comprobar con una calculadora, numérica o gráficamente, si la solución es razonable. Por ejemplo, los cálculos de la tabla adjunta y la gráfica de la Figura 7.16 son consistentes con la conclusión de que $(\text{sen } x)^x$ tiende a 1 cuando x tiende a 0 por la derecha.



x	1,0	0,1	0,01	0,01	0,0001	0,0000
$(\text{sen } x)^x$	0,8415	0,7942	0,9550	0,9931	0,9991	0,9999

Intente estimar, numérica y gráficamente, los límites

$$\lim_{x \to 0} (1 - \cos x)^x$$

y

$$\lim_{x \to 0^+} (\text{tg } x)^x$$

A continuación, trate de hallarlos analíticamente.

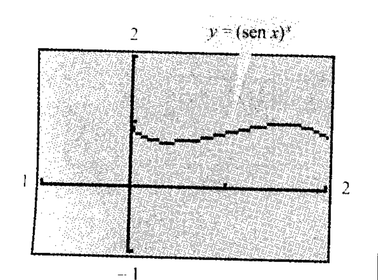


FIGURA 7.16
El límite de $(\text{sen } x)^x$ cuando x tiende a 0 por la derecha es 1.

EJEMPLO 7 Forma indeterminada $\infty - \infty$

Calcular $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

Solución: Puesto que la sustitución directa produce una forma indeterminada $\infty - \infty$, intentamos reescribir la expresión en una forma a la que sea aplica-

ADVERTENCIA En todos los ejemplos de esta sección, la regla de L'Hôpital se ha usado para calcular límites que existen. Puede utilizarse también para demostrar que un límite no existe. Como ejemplo, intente usarla para probar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$$

ble la regla de L'Hôpital. En este caso, combinando las dos fracciones obtenemos

$$\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1^+} \left[\frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)\ln x}\right]$$

Aquí, la sustitución directa lleva a una forma indeterminada 0/0, de manera que ya podemos usar la regla de L'Hôpital.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\dfrac{d}{dx}[x - 1 - \ln x]}{\dfrac{d}{dx}[(x-1)\ln x]} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \left[\frac{1 - (1/x)}{(x-1)(1/x) + \ln x}\right] \\ &= \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x-1}{x - 1 + x\ln x}\right)\end{aligned}$$

También este límite lleva a una indeterminación 0/0, así que aplicamos de nuevo la regla de L'Hôpital, con lo que obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1^+} \left[\frac{1}{1 + x(1/x) + \ln x}\right] \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

Hemos identificado las formas $0/0$, ∞/∞, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, 1^∞ y ∞^0 como *indeterminadas*. Pues bien, hay formas de aspecto muy parecido que, por el contrario, son «determinadas».

$\infty + \infty \to \infty$	El límite es infinito y positivo
$-\infty - \infty \to -\infty$	El límite es infinito y negativo
$0^\infty \to 0$	El límite es cero
$0^{-\infty} \to \infty$	El límite es infinito y positivo

(Se pide verificar estas afirmaciones en los Ejercicios 83 y 84.)

Como comentario final, recordemos que la regla de L'Hôpital sólo se puede aplicar a cocientes que produzcan formas indeterminadas 0/0 o ∞/∞. Por ejemplo, la siguiente utilización de la regla de L'Hôpital es *incorrecta*.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x} \;(=)\; \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1 \qquad \text{Uso incorrecto de la regla de L'Hôpital}$$

La razón para que este cálculo sea incorrecto consiste en que aunque el límite del denominador es 0, el del numerador es 1, lo cual significa que las hipótesis de la regla de L'Hôpital no se satisfacen.

Ejercicios de la Sección 7.7

Investigación numérica y gráfica En los Ejercicios 1-4, completar la tabla y usarla para estimar el valor del límite. Representar la gráfica de la función en la calculadora para corroborar el resultado.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 5x}{\text{sen } 2x}$

x	−0,1	−0,01	−0,001	0,001	0,01	0,1
$f(x)$						

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - e^x}{x}$

x	−0,1	−0,01	−0,001	0,001	0,01	0,1
$f(x)$						

3. $\lim\limits_{x\to \infty} x^5 e^{-x/100}$

x	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$f(x)$						

4. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{6x}{\sqrt{3x^2 - 2x}}$

x	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$f(x)$						

En los Ejercicios 5-10, calcular el límite usando *a*) las técnicas de los Capítulos 1 y 3, y *b*) la regla de L'Hôpital.

5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2(x - 3)}{x^2 - 9}$

6. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x + 1}$

7. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 4x}{2x}$

9. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 5}$

10. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x + 1}{4x^2 + x}$

En los Ejercicios 11-30, calcular el límite, usando la regla de L'Hôpital si fuera necesario. (En el Ejercicio 17, n es un entero positivo.)

11. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

12. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4 - x^2} - 2}{x}$

14. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - (1 - x)}{x}$

16. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - (1 + x)}{x^3}$

17. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - (1 + x)}{x^n}$

18. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{\text{sen } 3x}$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx}$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{arcsen } x}{x}$

22. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\text{arctg } x - (\pi/4)}{x - 1}$

23. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{2x^2 + 3}$

24. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x - 1}{x^2 + 2x + 3}$

25. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x - 1}$

26. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2}{e^x}$

27. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

28. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\text{sen } x}{x - \pi}$

29. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x}$

30. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x}$

En los Ejercicios 31-44, *a*) describir el tipo de forma indeterminada (si la hay) que se obtiene por sustitución directa, *b*) calcular el límite, con ayuda de la regla de L'Hôpital si es necesario, *c*) comprobar el resultado representando la gráfica de la función en la calculadora. (Puede verse un enfoque geométrico del Ejercicio 31 en el artículo de John H. Mathews en *The College Mathematics Journal*, mayo 1992.)

31. $\lim\limits_{x\to 0^+} (-x \ln x)$

32. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \text{ ctg } x$

33. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x \text{ sen } \dfrac{1}{x}\right)$

34. $\lim\limits_{x\to \infty} x \text{ tg } \dfrac{1}{x}$

35. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/x}$

36. $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^x + x)^{1/x}$

37. $\lim\limits_{x\to \infty} x^{1/x}$

38. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

39. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + x)^{1/x}$

40. $\lim\limits_{x\to \infty} (1 + x)^{1/x}$

41. $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{8}{x^2 - 4} - \dfrac{x}{x - 2}\right)$

42. $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{1}{x^2 - 4} - \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x^2 - 4}\right)$

43. $\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{3}{\ln x} - \frac{2}{x-1}\right)$

44. $\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

En los Ejercicios 45-48, usar la calculadora para *a*) representar la función y *b*) determinar el límite (si existe).

45. $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\ln(2x-5)}$

46. $\lim_{x\to 0^+} (\text{sen } x)^x$

47. $\lim_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+5x+2} - x)$

48. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3}{e^{2x}}$

49. ***Para pensar*** Encontrar funciones f y g que satisfagan las condiciones especificadas y tales que $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$

a) $\lim_{x\to 5} \frac{f(x)}{g(x)} = 10$ *b*) $\lim_{x\to 5} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ *c*) $\lim_{x\to 5} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

(*Nota:* Hay muchas respuestas correctas.)

50. ***Para pensar*** Encontrar funciones derivables f y g tales que

$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} g(x) = \infty$

$\lim_{x\to \infty} [f(x) - g(x)] = 25$

(*Nota:* Hay muchas respuestas correctas.)

Comparación de funciones En los Ejercicios 51-56, usar la regla de L'Hôpital para comparar los ritmos de crecimiento de las funciones

51. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{e^{5x}}$

52. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3}{e^{2x}}$

53. $\lim_{x\to \infty} \frac{(\ln x)^3}{x}$

54. $\lim_{x\to \infty} \frac{(\ln x)^2}{x^3}$

55. $\lim_{x\to \infty} \frac{(\ln x)^n}{x^m}$

56. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^m}{e^{nx}}$

57. ***Estimación numérica*** Completar la tabla para mostrar que, para valores suficientemente grandes de x, la función x domina a $(\ln x)^4$

x	10	10^2	10^4	10^6	108	10^{10}
$\frac{(\ln x)^4}{x}$						

58. ***Estimación numérica*** Completar la tabla para mostrar que para valores suficientemente grandes de x, la función e^x domina a x^5

x	1	5	10	20	30	40	50	60
$\frac{e^x}{x^5}$								

En los Ejercicios 59-62, hallar las asíntotas y extremos relativos de la función y representarla en la calculadora. (*Ayuda:* Algunos de los límites requeridos para localizar las asíntotas han sido calculados en ejercicios anteriores.)

59. $y = x^{1/x}, x > 0$

60. $y = x^x, x > 0$

61. $y = 2xe^{-x}$

62. $y = \frac{\ln x}{x}$

Para pensar En los Ejercicios 63-66, explicar por qué la aplicación de la regla de L'Hôpital es incorrecta.

63. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{e^x} = \lim_{x\to 0} 2e^x = 2$

64. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } \pi x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\pi \cos \pi x}{1} = \pi$

65. $\lim_{x\to \infty} x \cos \frac{1}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{\cos(1/x)}{1/x}$

$= \lim_{x\to \infty} \frac{[-\text{sen}(1/x)](1/x^2)}{-1/x^2}$

$= 0$

66. $\lim_{x\to \infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \lim_{x\to \infty} \frac{-e^{-x}}{-e^{-x}} = \lim_{x\to \infty} 1 = 1$

67. ***Método analítico*** Consideremos $\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

a) Calcular analíticamente el límite sin utilizar la regla de L'Hôpital.

b) Demostrar que la regla de L'Hôpital no sirve en este caso.

c) Representar la función en la calculadora y estimar el valor del límite a la vista de la gráfica. Comparar el resultado con el obtenido en *a*).

68. ***Interés compuesto*** La fórmula para el capital producido por una inversión inicial P a una tasa r de interés compuesto n veces al año, tras t años, es

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Probar, con la regla de L'Hôpital, que la fórmula límite cuando n tiende a infinito es

$$A = Pe^{rt}$$

69. ***Velocidad en un medio resistente*** La velocidad de un objeto que cae a través de un medio resistente (aire o agua, por ejemplo) es

$$v = \frac{32}{k}\left(1 - e^{-kt} + \frac{v_0 k e^{-kt}}{32}\right)$$

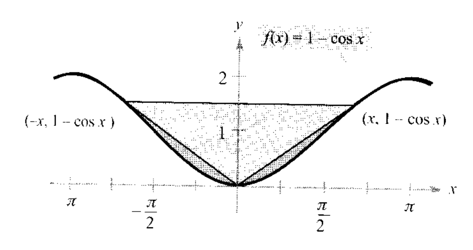
donde v_0 es la velocidad inicial, t el tiempo en segundos y k una constante relacionada con la resistencia del medio. Usar la regla de L'Hôpital para hallar la fórmula de la velocidad de un cuerpo que cae en el vacío, haciendo k tender k a cero, con v_0 y t fijos. (Tómese como positiva la dirección vertical hacia abajo.)

70. ***La función gamma*** La función gamma $\Gamma(n)$ se define en términos de la integral de la función

$$f(x) = x^{n-1}e^{-x},\ n > 0$$

Probar que, para cualquier valor fijado de n, el límite de $f(x)$, cuando x tiende a infinito, es cero.

71. ***Área*** Hallar el límite, cuando x tiende a cero, del cociente entre el área del triángulo y el área de la región sombreada de la figura.



72. Representar en la calculadora

$$f(x) = \frac{x^k - 1}{k}$$

para $k = 1$, 0,1 y 0,01. A continuación, calcular el límite

$$\lim_{k\to 0^+} \frac{x^k - 1}{k}$$

En los Ejercicios 73-76, aplicar el teorema general del valor medio a las funciones f y g en el intervalo indicado. Encontrar todos los valores c en el intervalo (a, b) tales que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

	Funciones	*Intervalo*
73.	$f(x) = x^3$ $g(x) = x^2 + 1$	$[0, 1]$
74.	$f(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = x^2 - 4$	$[1, 2]$
75.	$f(x) = \operatorname{sen} x$ $g(x) = \cos x$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
76.	$f(x) = \ln x$ $g(x) = x^3$	$[1, 4]$

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 77-80, averiguar si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

77. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2 + x + 1}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2x + 1}{1}\right] = 1$

78. Si $y = e^x/x^2$, entonces $y' = e^x/2x$

79. Si $p(x)$ es un polinomio, entonces $\lim_{x\to\infty} [p(x)/e^x] = 0$

80. Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, entonces $\lim_{x\to\infty} [f(x) - g(x)] = 0$

81. En el Capítulo 1 dimos un argumento geométrico (véase figura) para demostrar que

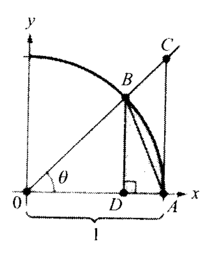
$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\,\theta}{\theta} = 1$$

a) Expresar el área del triángulo ΔABD en términos de θ.

b) Expresar el área de la región sombreada en términos de θ.

c) Escribir el cociente R entre el área de ΔABD y el área de la región sombreada.

d) Calcular $\lim_{\theta\to 0} R$.



82. Dibujar un esbozo de la gráfica de

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

y determinar $g'(0)$.

83. Probar que si $f(x) \geq 0$, $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0$.

84. Probar que si $f(x) \geqslant 0$, $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, y $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$, entonces $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \infty$.

85. Demostrar la siguiente generalización del teorema del valor medio: si f es dos veces derivable en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$f(b) - f(a) = f'(a)(b - a) - \int_a^b f''(t)(t - b)\, dt$$

86. Probar que la forma indeterminada 0^0 no es siempre igual a 1, calculando

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\ln 2/(1 + \ln x)}$$

7.8 Integrales impropias

CONTENIDO ▪
Integrales impropias con límites de integración infinitos ▪
Integrales impropias con discontinuidades infinitas ▪

Integrales impropias con límites de integración infinitos

En la definición de una integral definida

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

se exigió que el intervalo $[a, b]$ fuese finito. Por su parte, el teorema fundamental del Cálculo, al que hemos recurrido tantas veces para calcular integrales, requiere que f sea continua en $[a, b]$. En esta sección analizaremos aquellas integrales que no satisfacen uno o ambos de los requisitos citados. Son integrales en las que o bien el intervalo de integración es infinito, o la función f tiene una o varias discontinuidades infinitas en el intervalo $[a, b]$. Tales integrales se llaman **integrales impropias**. Recordemos que una función tiene una **discontinuidad infinita** en c si por la derecha o por la izquierda,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

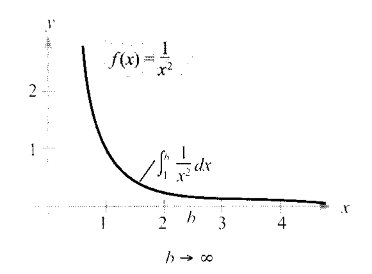


FIGURA 7.17
La región no acotada tiene área 1.

Para tener idea de cómo evaluar una integral impropia, consideremos la integral

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg]_1^b = -\frac{1}{b} + 1 = 1 - \frac{1}{b}$$

que puede ser interpretada como el área de la región sombreada en la Figura 7.17. Tomando el límite cuando $b \to \infty$ resulta

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to \infty} \left(\int_1^b \frac{dx}{x^2} \right) = \lim_{b \to \infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1$$

Esta integral impropia puede interpretarse como el área de la región *no acotada* comprendida entre la gráfica de $f(x) = 1/x^2$ y el eje x, a la derecha de $x = 1$.

DEFINICIÓN DE INTEGRALES IMPROPIAS CON LÍMITES DE INTEGRACIÓN INFINITOS

1. Si f es continua en el intervalo $[a, \infty)$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

2. Si f es continua en el intervalo $(-\infty, b]$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

3. Si f es continua en el intervalo $(-\infty, \infty)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$$

donde c es cualquier número real.

En los dos primeros casos, la integral impropia converge si el límite existe; en caso contrario, la integral impropia diverge. En el tercer caso, la integral impropia de la izquierda diverge si cualquiera de las integrales impropias de la derecha diverge.

EJEMPLO 1 Una integral impropia divergente

Calcular $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$

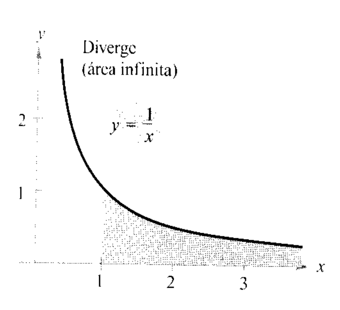


FIGURA 7.18
Esta región no acotada tiene área infinita.

Solución:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x}$$ Tomar el límite para $b \to \infty$

$$= \lim_{b\to\infty} \Big[\ln x\Big]_1^b$$ Aplicar la regla log

$$= \lim_{b\to\infty} (\ln b - 0)$$ Aplicar el teorema fundamental del Cálculo

$$= \infty$$ Evaluar el límite □

Nota. Compare las regiones de las Figuras 7.17 y 7.18. Parecen similares. Sin embargo, la de la Figura 7.17 tiene área finita, igual a 1, mientras que la de la Figura 7.18 tiene área infinita.

EJEMPLO 2 Integrales impropias convergentes

Calcular las siguientes integrales impropias

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

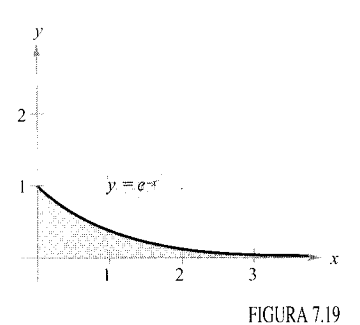


FIGURA 7.19
El área de la región no acotada es 1.

Solución:

$$a)\quad \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} (-e^{-b} + 1)$$

$$= 1$$

(Véase Figura 7.19.)

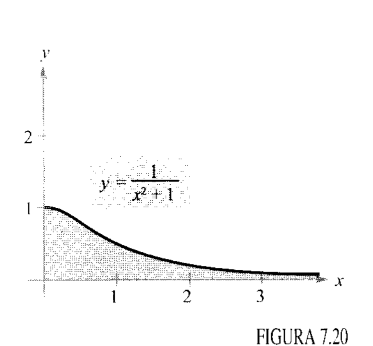


FIGURA 7.20
El área de la región no acotada es $\pi/2$.

$$b)\quad \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} b$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

(Véase Figura 7.20.) □

En el próximo ejemplo se utiliza la regla de L'Hôpital para calcular una integral impropia.

EJEMPLO 3 Cálculo de una integral impropia utilizando la regla de L'Hôpital

Calcular $\int_1^{\infty} (1 - x)e^{-x}\,dx$

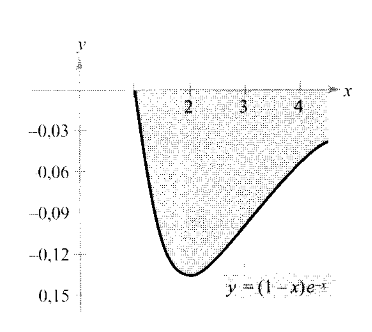


FIGURA 7.21
El área de la región no acotada es $|-1/e|$.

Solución:

Integramos por partes con $dv = e^{-x}\,dx$ y $u = (1 - x)$

$$\int (1 - x)e^{-x}\,dx = -e^{-x}(1 - x) - \int e^{-x}\,dx$$

$$= -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} + C$$

$$= xe^{-x} + C$$

De la definición de integral impropia se sigue que

$$\int_1^{\infty} (1 - x)e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[xe^{-x}\right]_1^b = \left(\lim_{b\to\infty} \frac{b}{e^b} - \frac{1}{e}\right)$$

Finalmente, aplicando la regla de L'Hôpital en la derecha se obtiene

$$\lim_{b\to\infty} \frac{b}{e^b} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^b} = 0$$

y finalmente de ahí se llega a la conclusión de que

$$\int_1^{\infty} (1 - x)e^{-x}\, dx = -\frac{1}{e}$$

(Véase Figura 7.21.) □

EJEMPLO 4 Límites de integración superior e inferior infinitos

Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx$

Solución: Nótese que el integrando es continuo en toda la recta real. Para evaluar la integral podemos descomponerla en dos, eligiendo $c = 0$ por conveniencia.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx \\
&= \lim_{b \to -\infty} \Big[\operatorname{arctg} e^x\Big]_b^0 + \lim_{b \to \infty} \Big[\operatorname{arctg} e^x\Big]_0^b \\
&= \lim_{b \to -\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} e^b\right) + \lim_{b \to \infty} \left(\operatorname{arctg} e^b - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

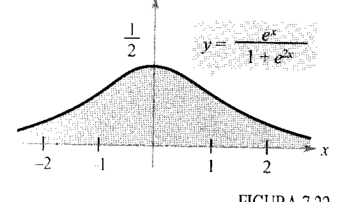


FIGURA 7.22
El área de la región no acotada es $\pi/2$.

(Véase Figura 7.22.) □

EJEMPLO 5 Propulsión de un módulo espacial

En el Ejemplo 3 de la Sección 6.5 vimos que se requieren 10.000 toneladas de trabajo para poner en órbita, a 800 millas de altura sobre la superficie de la Tierra, un módulo espacial de 15 toneladas. ¿Cuánto trabajo sería necesario para propulsarlo a distancia infinita de la Tierra?

Solución: A primera vista puede parecer que se necesitaría una cantidad infinita de trabajo. Pero si eso fuera cierto sería imposible enviar cohetes al espacio exterior. Como esto se ha hecho, el trabajo exigido ha de ser finito. Puede calcularse de la siguiente manera. En la integral del Ejemplo 3 de la Sección 6.5, sustituimos el límite superior de integración, que allí era 4.800 millas, por ∞, con lo que se obtiene

$$W = \int_{4.000}^{\infty} \frac{240.000.000}{x^2}\, dx$$

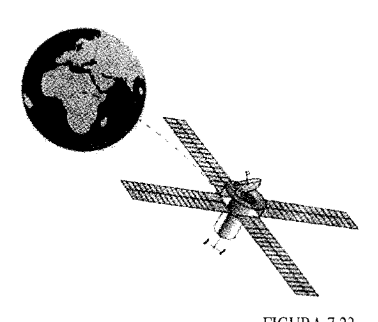


FIGURA 7.23
El trabajo requerido para propulsar un módulo espacial hasta una distancia infinita de la Tierra es aproximadamente $6{,}336 \times 10^{11}$ libras-pies.

$$= \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{240.000.000}{x} \right]_{4.000}^{b}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{240.000.000}{b} + \frac{240.000.000}{4.000} \right)$$

$$= 60.000 \text{ toneladas-millas}$$

$$\approx 6{,}336 \times 10^{11} \text{ libras-pies}$$

(Véase Figura 7.23.) □

Integrales impropias con discontinuidades infinitas

El segundo tipo básico de integrales impropias es el constituido por aquellas que contienen alguna discontinuidad infinita *en* o *entre* los límites de integración.

DEFINICIÓN DE INTEGRALES IMPROPIAS CON DISCONTINUIDADES INFINITAS

1. Si f es continua en el intervalo $[a, b)$ y tiene una discontinuidad infinita en b, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

2. Si f es continua en el intervalo $(a, b]$ y tiene una discontinuidad infinita en a, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

3. Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ excepto en algún c en (a, b), en el que f tiene una discontinuidad infinita, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

En los dos primeros casos, la integral impropia converge si el límite existe y diverge en caso contrario. En el tercer caso, la integral impropia de la izquierda diverge si cualquiera de las integrales impropias de la derecha diverge.

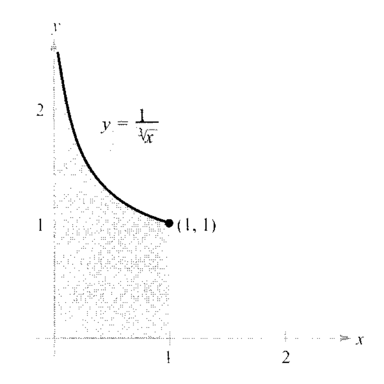


FIGURA 7.24
El área de la región no acotada es 3/2.

EJEMPLO 6 Una integral impropia con una discontinuidad infinita

Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

Solución: El integrando tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, como muestra la Figura 7.24. Podemos calcular la integral así:

$$\int_0^1 x^{-1/3}\,dx = \lim_{b\to 0^+}\left[\frac{x^{2/3}}{2/3}\right]_b^1$$
$$= \lim_{b\to 0^+}\frac{3}{2}(1 - b^{2/3})$$
$$= \frac{3}{2}$$
□

EJEMPLO 7 Una integral impropia divergente

Calcular $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^3}$

Solución: Como el integrando tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, escribimos

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to 0^+}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_b^2 = \lim_{b\to 0^+}\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2b^2}\right) = \infty$$

Por tanto, concluimos que la integral impropia es divergente. □

EJEMPLO 8 Una integral impropia con una discontinuidad interior

Calcular $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3}$

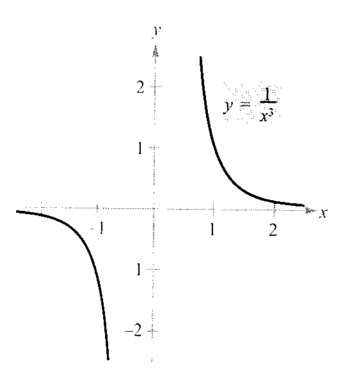


FIGURA 7.25
La integral impropia $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3}\,dx$ diverge.

Solución: Esta integral es impropia porque el integrando tiene una discontinuidad infinita en el punto interior $x = 0$ (véase Figura 7.25). Así pues, descomponemos la integral en dos.

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3} + \int_0^2 \frac{dx}{x^3}$$

En el Ejemplo 7 hemos demostrado que la segunda integral es divergente. Por consiguiente, la integral impropia propuesta es también divergente. □

Nota. Recuérdese que al estudiar si una integral es o no impropia hay que ver si tiene discontinuidad infinita en un punto terminal o en un punto interior del intervalo de integración. Por ejemplo, si no nos hubiéramos dado cuenta de que la integral del Ejemplo 8 era impropia, hubiéramos llegado a un resultado incorrecto:

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3} \;\overset{?}{=}\; \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_{-1}^2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Evaluación incorrecta

La integral del próximo ejemplo es impropia por dos razones: uno de los límites de integración es infinito y además el integrando presenta una discontinuidad infinita en el límite superior de integración (véase Figura 7.26).

EJEMPLO 9 Una integral doblemente impropia

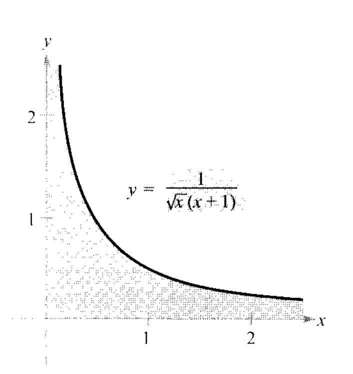


FIGURA 7.26
El área de la región no acotada es π.

Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$

Solución: Para calcular esta integral la descomponemos en dos, eligiendo para ello un punto conveniente, digamos $x = 1$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} &= \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \\
&= \lim_{b\to 0^+} \Big[2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} \Big]_b^1 + \lim_{c\to\infty} \Big[2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} \Big]_1^c \\
&= 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0 + 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 10 Una aplicación relativa a la longitud de arco

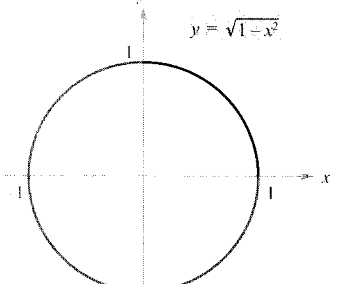


FIGURA 7.27
La circunferencia tiene longitud 2π.

Usando la fórmula para la longitud de arco, demostrar que la circunferencia del círculo $x^2 + y^2 = 1$ es 2π.

Solución: Con el fin de simplificar la tarea, consideremos el cuarto de círculo dado por $y = \sqrt{1 - x^2}$, donde $0 \leqslant x \leqslant 1$. La función y es derivable en todo x de ese intervalo excepto en $x = 1$. Por tanto, la longitud de arco del cuarto de círculo viene dada por la integral

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\, dx \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Esta integral es impropia porque su integrando presenta una discontinuidad infinita en $x = 1$. Así pues, tenemos

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \lim_{b\to -1^-} \Big[\operatorname{arcsen} x \Big]_0^b \\
&= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Finalmente, multiplicando por 4 llegamos a la conclusión de que la circunferencia del círculo es $4s = 2\pi$. □

Cerramos esta sección con un interesante teorema que decide la convergencia o divergencia de una clase de integrales impropias muy común. Su demostración se deja como ejercicio (véase Ejercicio 35).

TEOREMA 7.5 UN TIPO ESPECIAL DE INTEGRALES IMPROPIAS

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & \text{si } p > 1 \\ \text{diverge}, & \text{si } p \leqslant 1 \end{cases}$$

EJEMPLO 11 Aplicación a un sólido de revolución

Se llama **trompeta de Gabriel** al sólido de revolución engendrado, al girar en torno al eje x, por la región *no acotada* comprendida entre la gráfica de $f(x) = 1/x$ y el eje x ($x \geqslant 1$) (véase Figura 7.28). Probar que este sólido tiene volumen finito y área superficial infinita.

PARA MÁS INFORMACIÓN
Sobre sólidos de volumen finito y área infinita, véase el artículo «Supersolids: Solids Having Finite Volume and Infinite Surfaces» de William P. Love en *Mathematics Teacher*, enero 1989.

Solución: El método de los discos y el Teorema 7.5 permiten hallar

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx \qquad \text{Teorema 7.5, } p = 2 > 1 \\ &= \pi\left(\frac{1}{2-1}\right) \\ &= \pi \end{aligned}$$

El área viene dada por

$$S = 2\pi \int_1^{\infty} f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$

Al ser

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} > 4$$

FIGURA 7.28
La trompeta de Gabriel tiene volumen finito y área infinita.

en el intervalo $[1, \infty)$, y la integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

divergente, concluimos que la integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$

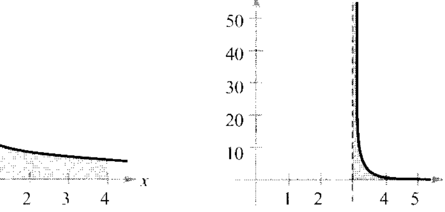
es asimismo divergente (véase Ejercicio 38). En consecuencia, el área es infinita. □

Ejercicios de la Sección 7.8

En los Ejercicios 1-6, explicar por qué es impropia la integral y discutir si es convergente o divergente. Calcular las que sean convergentes.

1. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

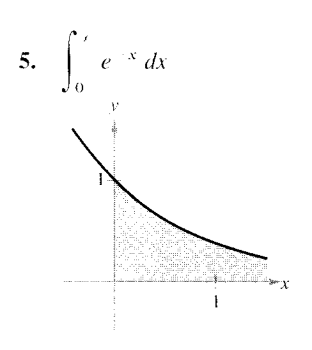
2. $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{(x-3)^{3/2}}\, dx$



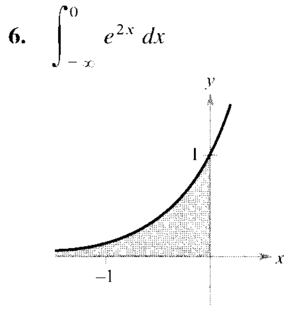
3. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$

4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\, dx$

5. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx$



6. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{2x}\, dx$



Redacción En los Ejercicios 7 y 8, explicar por qué es *incorrecto* el cálculo del valor de la integral. Usar integración en la calculadora para intentar hallar su valor. Discutir si la respuesta de la calculadora es correcta.

7. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\, dx = -2$

8. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = 0$

En los Ejercicios 9-22, averiguar si la integral, con intervalo de integración infinito, es convergente o divergente. En caso de convergencia, calcular su valor.

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{-2x}\, dx$

10. $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}\, dx$

11. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2e^{-x}\, dx$

12. $\displaystyle\int_0^{\infty} (x-1)e^{-x}\, dx$

13. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$

14. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

15. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x\, dx$

16. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\,\text{sen}\, bx\, dx,\ a > 0$

17. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$

18. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\, dx$

19. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$

20. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^x}{1+e^x}\, dx$

21. $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos \pi x\, dx$

22. $\displaystyle\int_0^{\infty} \text{sen}\, \frac{x}{2}\, dx$

En los Ejercicios 23-34, determinar si la integral es convergente. Si lo es, calcularla y comprobar el resultado usando integración en la calculadora.

23. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx$

24. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$

25. $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}}\,dx$ **26.** $\int_0^e \ln x\,dx$

27. $\int_0^1 x \ln x\,dx$ **28.** $\int_0^{\pi/2} \sec\theta\,d\theta$

29. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}\theta\,d\theta$ **30.** $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

31. $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$ **32.** $\int_0^2 \frac{1}{4-x^2}\,dx$

33. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$ **34.** $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\,dx$

En los Ejercicios 35 y 36, hallar todos los valores de p para los que la integral impropia converge.

35. $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ **36.** $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$

37. Probar por inducción que la integral siguiente converge para todo entero $n > 0$.

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$$

38. Dadas dos funciones continuas f y g tales que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ en el interval $[a, \infty)$, demostrar que:

a) Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge.

b) Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge.

En los Ejercicios 39-48, usar los resultados de los Ejercicios 35-38 para decidir si la integral converge o no.

39. $\int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx$ **40.** $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

41. $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ **42.** $\int_0^\infty x^4 e^{-x}\,dx$

43. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+5}\,dx$ **44.** $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

45. $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)}}\,dx$ **46.** $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\,dx$

47. $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ **48.** $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\,dx$

Transformadas de Laplace Sea $f(t)$ una función definida para todo t positivo. Su transformada de Laplace se define como

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

si la integral impropia existe. Las transformadas de Laplace se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales. En los Ejercicios 49-56, hallar la transformada de Laplace de la función.

49. $f(t) = 1$ **50.** $f(t) = t$

51. $f(t) = t^2$ **52.** $f(t) = e^{at}$

53. $f(t) = \cos at$ **54.** $f(t) = \operatorname{sen} at$

55. $f(t) = \operatorname{ch} at$ **56.** $f(t) = \operatorname{sh} at$

Área y volumen En los Ejercicios 57 y 58, consideremos la región que satisface las desigualdades. Calcular *a)* su área, *b)* el volumen del sólido que genera al girar en torno al eje x, y *c)* el volumen del sólido que genera al girar en torno al eje y.

57. $y \leqslant e^{-x}, y \geqslant 0, x \geqslant 0$ **58.** $y \leqslant 1/x^2, y \geqslant 0, x \geqslant 1$

59. ***Longitud de arco*** Dibujar un esbozo de la hipocicloide de cuatro cúspides

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

y calcular su perímetro.

60. ***Área de una superficie*** Calcular el área del toro engendrado al hacer girar, en torno al eje y, la región acotada por $(x-2)^2 + y^2 = 1$

61. ***La función gamma*** La función gamma $\Gamma(n)$ se define como

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx,\ n > 0$$

a) Calcular $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$, y $\Gamma(3)$.
b) Probar, integrando por partes, que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.
c) Expresar $\Gamma(n)$ en términos de la notación factorial, para n entero positivo.

62. ***Trabajo*** Se lanza al espacio exterior, desde la superficie terrestre, un cohete de 5 toneladas.
a) ¿Cuánto trabajo requiere vencer la gravedad terrestre?
b) ¿Cuánto ha recorrido el cohete en el momento en que se ha realizado la mitad de ese trabajo?

Probabilidad Una función f se dice que es una *función de densidad de probabilidad* si es no negativa y además

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1$$

La *probabilidad* de que x esté entre a y b viene dada, en tal caso, por

$$P(a \leqslant x \leqslant b) = \int_a^b f(t)\, dt$$

El valor esperado de x es

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\, dt$$

En los Ejercicios 63 y 64, *a*) probar que la función dada es una función de densidad de probabilidad, *b*) calcular $P(0 \leqslant x \leqslant 4)$, y *c*) hallar $E(x)$.

63. $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{7}e^{-t/7}, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

64. $f(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{5}e^{-2t/5}, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

Coste capitalizado En los Ejercicios 65 y 66 calcular el coste capitalizado C de una posesión *a*) en $n = 5$ años, *b*) en $n = 10$ años, y *c*) a perpetuidad. El coste C viene dado por

$$C = C_0 + \int_0^n c(t)e^{-rt}\, dt$$

donde C_0 es la inversión original, t el tiempo en años, r la tasa de interés anual compuesto continuamente, y $c(t)$ el coste anual de mantenimiento.

65. $C_0 = \$650.000$
$c(t) = \$25.000$
$r = 0{,}06$

66. $C_0 = \$650.000$
$c(t) = \$25.000(1 + 0{,}08t)$
$r = 0{,}06$

67. ***Electromagnetismo*** Calcular el valor de la siguiente integral, utilizada en la teoría electromagnética.

$$P = k\int_1^{\infty} \frac{1}{(a^2 + x^2)^{3/2}}\, dx$$

68. ***Redacción***

a) Las integrales impropias

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx \quad \text{y} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

son, respectivamente, divergente y convergente. Describir qué diferencia esencial entre sus integrandos provoca ese distinto comportamiento.

b) Dibujar la gráfica de la función $y = (\text{sen } x)/x$ en el intervalo $(1, \infty)$. Con los conocimientos sobre integrales definidas de que dispone, explique razonadamente por qué cree que la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x}\, dx$$

es convergente o divergente, según su parecer.

c) Integrando por partes repetidamente en la integral del apartado *b*), analizar si converge o diverge.

69. Sea $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(x^2 + 1)^{n+3}}\, dx,\ n \geqslant 1$

Probar que $I_n = \left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)I_{n-1}$

y calcular, a continuación:

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)^4}\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^3}{(x^2 + 1)^5}\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^5}{(x^2 + 1)^6}\, dx$

70. ***Probabilidad normal*** En 1992 la altura media de los varones en EE.UU., con edades comprendidas entre 18 y 24 años, era de 70 pulgadas con una desviación típica de 3 pulgadas. Si se toma al azar un varón en esa franja de edad, la probabilidad de que mida 6 pies de altura o más viene dada por

$$P(72 \leqslant x < \infty) = \int_{72}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-(x-70)^2/18}\, dx$$

Utilice la calculadora para

a) Representar la función del integrando y convencerse de que el área entre el integrando y el eje x es 1.

b) Estimar $P(72 \leqslant x < \infty)$.

c) Aproximar $0{,}5 - P(70 \leqslant x \leqslant 72)$. Explicar, utilizando la gráfica del apartado *a*) por qué este resultado coincide con el de *b*).

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 71-74, averiguar si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar por qué o dar un ejemplo que confirme su falsedad.

71. Si f es continua en $[0, \infty)$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, entonces $\int_0^\infty f(x)\,dx$ es convergente.

72. Si f es continua en $[0, \infty)$ y $\int_0^\infty f(x)\,dx$ diverge, entonces $\lim_{x \to \infty} f(x) \neq 0$

73. Si f' es continua en $[0, \infty)$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, entonces $\int_0^\infty f'(x)\,dx = -f(0)$.

74. Si la gráfica de f es simétrica respecto del origen o respecto del eje y, entonces $\int_0^\infty f(x)\,dx$ converge si y sólo si $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ converge.

Ejercicios de repaso del Capítulo 7

En los Ejercicios 1 y 2, hallar la integral utilizando integración por partes.

1. $\int e^{2x} \operatorname{sen} 3x\,dx$ **2.** $\int (x^2 - 1)e^x\,dx$

En los Ejercicios 3-6, hallar la integral trigonométrica dada.

3. $\int \cos^3(\pi x - 1)\,dx$ **4.** $\int \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{2}\,dx$

5. $\int \sec^4 \frac{x}{2}\,dx$ **6.** $\int \operatorname{tg} \theta \sec^4 \theta\,d\theta$

En los Ejercicios 7 y 8, hallar la integral mediante sustitución trigonométrica.

7. $\int \frac{-12}{x^2\sqrt{4 - x^2}}\,dx$ **8.** $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}\,dx,\ x > 3$

En los Ejercicios 9 y 10, hallar la integral utilizando descomposición en fracciones simples.

9. $\int \frac{x^2 + 2x}{x^3 - x^2 + x - 1}\,dx$ **10.** $\int \frac{4x - 2}{3(x - 1)^2}\,dx$

En los Ejercicios 11-36, hallar la integral.

11. $\int \frac{x^2}{x^2 + 2x - 15}\,dx$ **12.** $\int \frac{3}{2x\sqrt{9x^2 - 1}}\,dx,\ x > \frac{1}{3}$

13. $\int \frac{1}{1 - \operatorname{sen} \theta}\,d\theta$ **14.** $\int x^2 \operatorname{sen} 2x\,dx$

15. $\int \frac{\ln (2x)}{x^2}\,dx$ **16.** $\int 2x\sqrt{2x - 3}\,dx$

17. $\int \sqrt{4 - x^2}\,dx$ **18.** $\int \frac{\sec^2 \theta}{\operatorname{tg} \theta\,(\operatorname{tg} \theta - 1)}\,d\theta$

19. $\int \frac{3x^3 + 4x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$ **20.** $\int \sqrt{\frac{x - 2}{x + 2}}\,dx$

21. $\int \frac{16}{\sqrt{16 - x^2}}\,dx$ **22.** $\int \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 + 2\cos^2 \theta}\,d\theta$

23. $\int \frac{x}{x^2 + 4x + 8}\,dx$ **24.** $\int \frac{x}{x^2 - 4x + 8}\,dx$

25. $\int \theta \operatorname{sen} \theta \cos \theta\,d\theta$ **26.** $\int \frac{\operatorname{cosec} \sqrt{2x}}{\sqrt{x}}\,dx$

27. $\int (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)^2\,d\theta$

28. $\int \cos 2\theta\,(\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)^2\,d\theta$

29. $\int \sqrt{1 + \cos x}\,dx$ **30.** $\int \ln \sqrt{x^2 - 1}\,dx$

31. $\int \cos x \ln (\operatorname{sen} x)\,dx$ **32.** $\int \frac{x^4 + 2x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

33. $\int x \operatorname{arcsen} 2x\,dx$ **34.** $\int e^x \operatorname{arctg} e^x\,dx$

35. $\int \frac{x^{1/4}}{1 + x^{1/2}}\,dx$ **36.** $\int \sqrt{1 + \sqrt{x}}\,dx$

En los Ejercicios 37-46, usar integración simbólica para hallar la primitiva que pasa por el punto indicado. Representar la primitiva obtenida.

	Integral	*Punto*
37.	$\int \frac{x^4}{(x - 1)^3}\,dx$	$(2, 4)$
38.	$\int \frac{4x^2 - 1}{(2x)(x^2 + 2x + 1)}\,dx$	$(1, 0)$
39.	$\int \frac{6x^2 - 3x + 14}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}\,dx$	$(3, 2)$

Integral	*Punto*
40. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + x - 4}{1 - x^4}\,dx$	(4, 1)
41. $\int \frac{1}{2 - 3\,\text{sen}\,\theta}\,d\theta$	(1, 1)
42. $\int \frac{1}{\sec\theta - \text{tg}\,\theta}\,d\theta$	$(\pi, 2)$
43. $\int \frac{1}{1 + \text{sen}\,\theta + \cos\theta}\,d\theta$	(0, 0)
44. $\int \frac{1}{3 - 2\cos\theta}\,d\theta$	(0, 0)
45. $\int \frac{\text{sen}\,\theta}{3 - 2\cos\theta}\,d\theta$	(0, 0)
46. $\int \frac{\text{sen}\,\theta}{1 + \text{sen}\,\theta}\,d\theta$	(0, 1)

En los Ejercicios 47-50, resolver la ecuación diferencial.

47. $\frac{dy}{dx} = \frac{9}{x^2 - 9}$ **48.** $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2x}$

49. $y' = \ln(x^2 + x)$ **50.** $y' = \sqrt{1 - \cos\theta}$

En los Ejercicios 51-54, hallar la integral por el método que se especifica.

51. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4 + x^2}}\,dx$

a) Sustitución trigonométrica
b) Sustitución: $x = 2/u$

52. $\int \frac{1}{x\sqrt{4 + x^2}}\,dx$

a) Sustitución trigonométrica
b) Sustitución: $u^2 = 4 + x^2$

53. $\int \frac{x^3}{\sqrt{4 + x^2}}\,dx$

a) Sustitución trigonométrica
b) Sustitución: $u^2 = 4\,x^2$
c) Integración por partes: $dv = (x/\sqrt{4 + x^2})\,dx$

54. $\int x\sqrt{4 + x}\,dx$

a) Sustitución trigonométrica
b) Sustitución: $u^2 = 4 + x$
c) Sustitución: $u = 4 + x$
d) Integración por partes: $dv = \sqrt{4 + x}\,dx$

En los Ejercicios 55-60, calcular la integral definida y verificar el resultado usando integración en la calculadora.

55. $\int_2^{\sqrt{5}} x(x^2 - 4)^{3/2}\,dx$ **56.** $\int_0^1 \frac{x}{(x - 2)(x - 4)}\,dx$

57. $\int_1^4 \frac{\ln x}{x}\,dx$ **58.** $\int_0^2 xe^{3x}\,dx$

59. $\int_0^{\pi} x\,\text{sen}\,x\,dx$ **60.** $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1 + x}}\,dx$

Área En los Ejercicios 61 y 62, calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

61. $y = x\sqrt{4 - x},\ y = 0$

62. $y = \frac{1}{25 - x^2},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 4$

En los Ejercicios 63 y 64, localizar el centroide de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

63. $y = \sqrt{1 - x^2},\ y = 0$

64. $(x - 1)^2 + y^2 = 1,\ (x - 4)^2 + y^2 = 4$

En los Ejercicios 65 y 66, calcular la integral definida con dos cifras decimales exactas. ¿Cuáles requieren un método numérico o una calculadora para su evaluación?

65. *a*) $\int_0^1 e^x\,dx$ *b*) $\int_0^1 xe^x\,dx$

c) $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$ *d*) $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$

66. *a*) $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$ *b*) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$

c) $\int_0^{\pi/2} \cos x^2\,dx$ *d*) $\int_0^{\pi/2} \cos\sqrt{x}\,dx$

Longitud de arco En los Ejercicios 67 y 68, aproximar con dos cifras decimales la longitud de arco de la curva en el intervalo que se indica.

Función	*Intervalo*
67. $y = \text{sen}\,x$	$[0, \pi]$
68. $y = \text{sen}^2\,x$	$[0, \pi]$

En los Ejercicios 69-76, calcular el límite aplicando la regla de L'Hôpital.

69. $\lim_{x\to 1} \dfrac{(\ln x)^2}{x-1}$

70. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \pi x}{\operatorname{sen} 2\pi x}$

71. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2}$

72. $\lim_{x\to \infty} xe^{-x^2}$

73. $\lim_{x\to \infty} (\ln x)^{2/x}$

74. $\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{\ln x}$

75. $\lim_{x\to \infty} 1.000\left(1+\dfrac{0{,}09}{n}\right)^n$

76. $\lim_{x\to 1^+} \left(\dfrac{2}{\ln x} - \dfrac{2}{x-1}\right)$

En los Ejercicios 77-80, analizar si es convergente la integral impropia y calcular las que lo sean.

77. $\displaystyle\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\, dx$

78. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{6}{x-1}\, dx$

79. $\displaystyle\int_1^{\infty} x^2 \ln x\, dx$

80. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2}\, dx$

81. ***Valor presente*** El consejo de administración de una empresa está calculando el precio a pagar por un negocio que se estima producirá un flujo continuo de beneficios de \$500.000 anuales. Si el dinero produce un 5 por 100 anual compuesto continuamente, ¿cuál es el valor presente de ese negocio

a) en 20 años?

b) a perpetuidad?

(*Nota:* El valor presente para t_0 años es

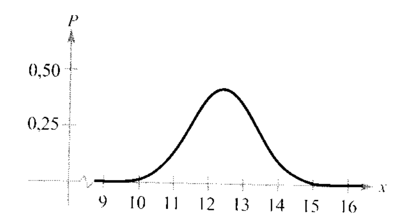
$$\int_0^{t_0} 500.000e^{-0{,}05}\, dt.)$$

82. ***Volumen*** Calcular el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de $y = xe^{-x}$, $y = 0$ y $x = 0$, al girar en torno al eje x.

83. ***Probabilidad*** La longitud media de varias especies de pájaros de la familia *Parulidae* en el este de los EE.UU. está distribuida normalmente, con buena aproximación, con una media de 12,9 cm y una desviación media de 0,95 cm (véase figura). La probabilidad de que uno de ellos, elegido al azar, mida entre a y b cm es

$$P(a \leqslant x \leqslant b) = \frac{1}{0{,}95\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-(x-12{,}9)^2/2(0{,}95)^2}\, dx$$

Estimar con la calculadora la probabilidad de que uno de esos pájaros, escogido al azar, mida *a)* 13 cm o más, *b)* 15 cm o más. *(Fuente: Peterson's Field Guide: Eastern Birds.)*



84. ***Usando la desigualdad***

$$\frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^{10}} + \frac{1}{x^{15}} < \frac{1}{x^5 - 1} < \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^{10}} + \frac{2}{x^{15}}$$

para $x \geqslant 2$, aproximar $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^5 - 1}\, dx$

85. Verificar la fórmula de reducción

$$\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\, dx$$

86. Verificar la fórmula de reducción

$$\int \operatorname{tg}^n x\, dx = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\, dx$$

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 87-90, averiguar si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar la razón o exhibir un ejemplo que muestre su falsedad.

87. $\displaystyle\int \frac{\ln x^2}{x}\, dx = \int u\, du,\ u = \ln x^2$

88. Si $u = \sqrt[3]{3x+1}$, entonces $dx = u^2\, du$

89. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 - x^3}\, dx = \int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x}\, dx$

90. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ converge si $p > 1$

91. Probar que

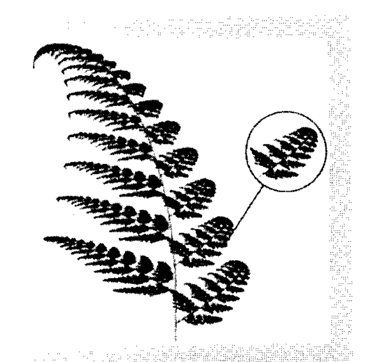
$$\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2}\, dx$$

calculando cada una de las integrales y utilizando después la identidad

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},\ x > 0$$

Capítulo 8

MOTIVACIÓN DEL CAPÍTULO



UN FRACTAL EN FORMA DE HELECHO

Los fractales son *autosimilares*, como se aprecia en un modelo fractal del helecho. Al ampliar una pequeña porción de un fractal se ve una imagen similar al fractal original.

El copo de nieve de Koch: ¿perímetro infinito?

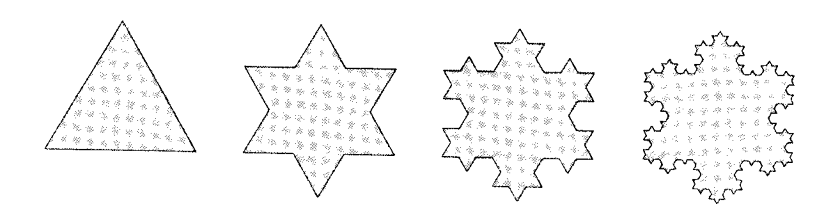
¿Por qué se suele decir que la Geometría es «fría» y «áspera»? En parte, por su incapacidad para describir la forma de una nube, de una montaña, de una costa o de un árbol. Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, la corteza de un árbol no es suave, ni la luz viaja en línea recta ... No es ya que la Naturaleza exhiba un grado mayor de complejidad, sino que presenta un nivel completamente diferente de complejidad.

Benoit Mandelbrot (1924-)

Con el propósito de crear una geometría capaz de describir la Naturaleza, Mandelbrot desarrolló la geometría *fractal*. Los conjuntos fractales aparecen bajo formas diversas. Algunos son curvas, otros son «polvo» inconexo e incluso otros presentan formas tan extrañas que no hay términos geométricos clásicos para describirlos.

Uno de los fractales «clásicos» es el copo de nieve de Koch, llamado así en honor del matemático sueco Helge von Koch (1870-1924). Es clasificado a veces como una «línea de costa», a causa de la creciente complejidad que exhibe una línea costera bajo ampliaciones sucesivas. Para describir el copo de nieve de Koch, Mandelbrot acuñó el término *teragon*, que traslada del griego el significado de «curva monstruosa».

La construcción del copo de nieve de Koch comienza con un triángulo equilátero de lado 1. En una primera iteración, se añade en el tercio central de cada uno de sus lados un triángulo equilátero de lado 1/3. En la segunda iteración se añade un triángulo equilátero de lado 1/9 en el tercio central de cada uno de los lados anteriores, y así sucesivamente hasta el infinito. (Véase figura en la página siguiente.)



CUESTIONES

1. Escribir una fórmula que describa la longitud de los lados de los triángulos que se añaden en la n-ésima iteración.

2. Elaborar una tabla con las longitudes del triángulo inicial y de las tres primeras iteraciones del teragon (figura adjunta). Escribir una fórmula para el perímetro del teragon tras n iteraciones. ¿Qué espera que ocurra con el perímetro cuando n tienda a infinito?

3. Construya una tabla con las áreas del teragon en las primeras cuatro iteraciones. Escriba una fórmula para el área del teragon tras n iteraciones. ¿Qué espera que suceda con el área cuando n tienda a infinito?

4. ¿Es posible que una región plana cerrada y acotada tenga área finita y perímetro infinito? Explique su respuesta.

8

Series

CONTENIDO ▪
Sucesiones ▪
Límite de una sucesión ▪
Reconocimiento de pautas en las sucesiones ▪
Sucesiones monótonas y sucesiones acotadas ▪

EXPLORACIÓN

Buscando pautas Describir una pauta para cada una de las sucesiones siguientes y usarlas para escribir una fórmula para el término n-ésimo de cada sucesión. Cuando n crece, ¿parecen tender los términos hacia un límite? Explique el argumento.

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \cdots$

c) $10, \frac{10}{3}, \frac{10}{6}, \frac{10}{10}, \frac{10}{15}, \cdots$

d) $\frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, \frac{16}{25}, \frac{25}{36}, \cdots$

e) $\frac{3}{7}, \frac{5}{10}, \frac{7}{13}, \frac{9}{16}, \frac{11}{19}, \cdots$

8.1 Sucesiones

Sucesiones

En Matemáticas, la palabra «sucesión» se usa en un sentido muy parecido al del lenguaje usual. Decir que una colección de objetos o de sucesos está *en sucesión* significa que están ordenados de modo que alguno de ellos se identifica como el primero, otro como el segundo, etc.

Matemáticamente, una **sucesión** se define como una función cuyo dominio lo constituyen los números enteros positivos. Aunque una sucesión es una función, suelen denotarse las sucesiones mediante una notación de subíndices en lugar de con la notación habitual de las funciones.

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots, & n, & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \cdots, & a_n, & \cdots \end{array} \quad \text{Sucesión}$$

Al 1 le corresponde a_1, al 2 le corresponde a_2, y así sucesivamente. Los números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ son los **términos** de la sucesión. El número a_n es el **término** n-ésimo (o **término general**) de la sucesión y la sucesión completa se denota por $\{a_n\}$.

Nota. Ocasionalmente conviene comenzar una sucesión por a_0, de manera que sus términos sean

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

EJEMPLO 1 Listado de los términos de una sucesión

a) Los términos de la sucesión $\{a_n\} = \{3 + (-1)^n\}$ son

$$3 + (-1)^1, 3 + (-1)^2, 3 + (-1)^3, 3 + (-1)^4, \cdots$$

$$2, 4, 2, 4, \cdots$$

b) Los términos de la sucesión $\{b_n\} = \left\{\dfrac{2n}{1+n}\right\}$ son

$$\frac{2\cdot 1}{1+1}, \frac{2\cdot 2}{1+2}, \frac{2\cdot 3}{1+3}, \frac{2\cdot 4}{1+4}, \ldots$$

$$\frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \ldots$$

c) Los términos de la sucesión $\{c_n\} = \left\{\dfrac{n^2}{2^n - 1}\right\}$ son

$$\frac{1^2}{2^1-1}, \frac{2^2}{2^2-1}, \frac{3^2}{2^3-1}, \frac{4^2}{2^4-1}, \ldots$$

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{9}{7}, \frac{16}{15}, \ldots$$

□

Límite de una sucesión

El principal interés de este capítulo se centra en sucesiones cuyos términos tienden a un valor límite. Tales sucesiones se llaman **convergentes**. Por ejemplo, la sucesión $\{1/2^n\}$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$$

converge a 0, de acuerdo con la siguiente definición.

DEFINICIÓN DEL LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Sea L un número real. Se dice que L es el **límite** de una sucesión $\{a_n\}$, lo cual se denota

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $M > 0$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ siempre que $n > M$. Las sucesiones que tienen límite se llaman **convergentes** y las demás **divergentes**.

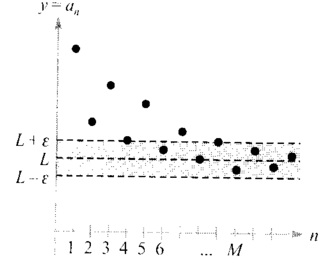
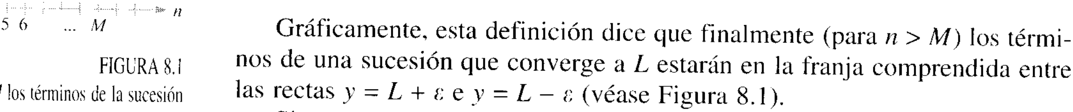


FIGURA 8.1
Para $n > M$ los términos de la sucesión distan de L menos de ε unidades.


Gráficamente, esta definición dice que finalmente (para $n > M$) los términos de una sucesión que converge a L estarán en la franja comprendida entre las rectas $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$ (véase Figura 8.1).

Si una sucesión $\{a_n\}$ coincide con una función f en todo entero positivo, y si $f(x)$ tiende a un límite L cuando $x \to \infty$, la sucesión debe converger al mismo límite L.

TEOREMA 8.1 LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Sea f una función de una variable real tal que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Si es una sucesión tal que $f(n) = a_n$ para todo entero positivo n, entonces

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

EJEMPLO 2 Cálculo del límite de una sucesión

Hallar el límite de la sucesión cuyo término general es $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Solución: Por el Teorema 5.15 sabemos que

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Por tanto, del Teorema 8.1 se deduce que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$ □

Las siguientes propiedades de los límites de sucesiones imitan las expuestas para los límites de funciones de una variable real en la página 216.

TEOREMA 8.2 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES DE SUCESIONES

Sean $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ y $\lim_{n \to \infty} b_n = K$.

1. $\lim_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = L \pm K$
2. $\lim_{n \to \infty} ca_n = cL$, c es cualquier número real
3. $\lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = LK$
4. $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{K}$, $b_n \neq 0$ y $K \neq 0$

EJEMPLO 3 Análisis de la convergencia

a) Como la sucesión $\{a_n\} = \{3 + (-1)^n\}$ tiene términos

$$2, 4, 2, 4, \cdots$$

que alternan valores 2 y 4, el límite

$$\lim_{n \to \infty} a_n$$

no existe. Por tanto, la sucesión es divergente.

b) Para $\{b_n\} = \left\{\frac{n}{1 - 2n}\right\}$, podemos dividir numerador y denominador por n para obtener

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{1 - 2n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(1/n) - 2} = -\frac{1}{2}$$

lo cual implica que la sucesión converge a $-\frac{1}{2}$ □

EJEMPLO 4 Análisis de la convergencia usando la regla de L'Hôpital

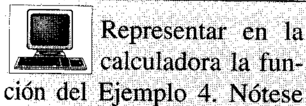
Probar que la sucesión de término general es convergente. $a_n = \dfrac{n^2}{2^n - 1}$

Solución: Consideremos la función de una variable real

$$f(x) = \frac{x^2}{2^x - 1}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital dos veces se ve que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2^x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{(\ln 2)2^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{(\ln 2)^2 2^x} = 0$$


Representar en la calculadora la función del Ejemplo 4. Nótese que cuando x tiende a infinito, el valor de la función se acerca más y más a cero. Intente representar los 20 primeros términos de la sucesión del Ejemplo 4 para poder apreciar que la sucesión converge a 0.

Como $f(n) = a_n$ para todo entero positivo n, el Teorema 8.2 nos lleva a concluir que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{2^n - 1} = 0$$

Así pues, la sucesión converge a 0. □

Para simplificar algunas de las fórmulas desarrolladas en este capítulo, usaremos el símbolo $n!$ (se lee «n factorial»). Si n es un entero positivo, se define ***n* factorial** (o el factorial de n) como

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n - 1) \cdot n$$

Cero factorial se define como $0! = 1$. Vemos en esta definición que $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, y así sucesivamente. Los factoriales obedecen las

mismas reglas operacionales que los exponentes. Esto es, así como $2x^3$ y $(2x)^3$ implican distintos órdenes en las operaciones, $2n!$ y $(2n)!$ significan

$$2n! = 2(n!) = 2(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n)$$

y

$$(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n \cdot (n + 1) \cdots 2n$$

Otro resultado interesante sobre límites que admite traducción en términos de sucesiones es el teorema del encaje de la Sección 1.3.

TEOREMA 8.3 TEOREMA DEL ENCAJE PARA SUCESIONES

Si

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L = \lim_{n \to \infty} b_n$$

y existe un entero N tal que $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ para todo $n > N$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} c_n = L$$

EJEMPLO 5 Aplicación del teorema del encaje

Probar que la sucesión $\{c_n\} = \left\{(-1)^n \dfrac{1}{n!}\right\}$ converge y hallar su límite.

Solución: Para aplicar el teorema del encaje hemos de encontrar dos sucesiones convergentes relacionadas de forma sencilla con la dada. Dos posibilidades son $a_n = -1/2^n$ y $b_n = 1/2^n$, ambas convergentes a 0. Comparando $n!$ con 2^n vemos que

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots n = 24 \cdot \underbrace{5 \cdot 6 \cdots n}_{n - 4 \text{ factores}} \qquad (n \geqslant 4)$$

y

$$2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 16 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n - 4 \text{ factores}} \qquad (n \geqslant 4)$$

Esto implica que para $n \geqslant 4$, $2^n < n!$, luego

$$\frac{-1}{2^n} \leqslant (-1)^n \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^n}, \qquad n \geqslant 4$$

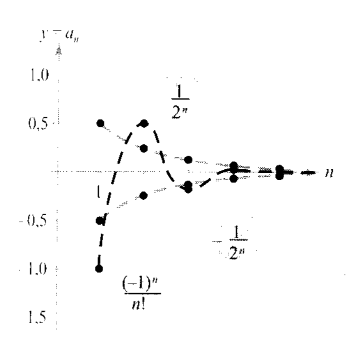


FIGURA 8.2
Para $n \geq 4$, $(-1)^n/n!$ está encajado entre $-1/2^n$ y $1/2^n$.

Nota. El Ejemplo 5 sugiere algo acerca del ritmo de crecimiento de $n!$ cuando $n \to \infty$. En la Figura 8.2 se aprecia que tanto $1/2^n$ como $1/n!$ tienden a cero cuando $n \to \infty$. Sin embargo, $1/n!$ tiende hacia 0 mucho más deprisa que $1/2^n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n!}{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

De hecho, se puede demostrar que para cualquier número fijado k, es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{n!} = 0$$

Esto significa que *la función factorial crece más rápidamente que todas las funciones exponenciales.*

como se muestra en la Figura 8.2. Por tanto, el teorema del encaje asegura que

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} = 0 \qquad \square$$

En el Ejemplo 5, la sucesión $\{c_n\}$ tiene términos positivos y negativos. Para esta sucesión sucede que también tiende a cero la sucesión $\{|c_n|\}$ de valores absolutos. Podemos demostrar que es así usando el teorema el encaje y la desigualdad

$$0 \leqslant \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^n}, \qquad n \geqslant 4$$

En tales casos, es conveniente considerar la sucesión de los valores absolutos y aplicar el Teorema 8.4, según el cual si la sucesión de valores absolutos converge a cero, la sucesión con signos original también converge a 0.

TEOREMA 8.4 TEOREMA DEL VALOR ABSOLUTO

Dada una sucesión $\{a_n\}$, si

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \quad \text{entonces} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Demostración: Consideremos las dos sucesiones $\{|a_n|\}$ y $\{-|a_n|\}$. Como ambas convergen a cero y

$$-|a_n| \leqslant a_n \leqslant |a_n|$$

concluimos del teorema del encaje que $\{a_n\}$ converge a 0. $\square$

Reconocimiento de pautas en las sucesiones

A veces, los términos de una sucesión se generan por medio de alguna regla que no identifica explícitamente el término general. En esos casos, puede ser necesario descubrir un cierto esquema, una pauta que permita describir el término general. Una vez especificado el término general, ya se podrá investigar la convergencia o divergencia de la sucesión.

EJEMPLO 6 Cálculo del término general de una sucesión

Hallar una sucesión $\{a_n\}$ cuyos cinco primeros términos sean

$$\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{8}{5}, \frac{16}{7}, \frac{32}{9}, \ldots$$

y determinar, a continuación, si la sucesión particular construida es convergente.

Solución: En primer lugar observamos que los numeradores son potencias sucesivas de 2 y los denominadores forman la sucesión de los enteros impares positivos. Comparando a_n con n, tenemos el siguiente esquema

$$\frac{2^1}{1}, \frac{2^2}{3}, \frac{2^3}{5}, \frac{2^4}{7}, \frac{2^5}{9}, \ldots, \frac{2^n}{2n-1}$$

Usando la regla de L'Hôpital para calcular el límite de $f(x) = 2^x/(2x - 1)$, obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{2x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x(\ln 2)}{2} = \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2n-1} = \infty$$

En consecuencia, la sucesión es divergente. □

Sin una regla específica para generar los términos de una sucesión o algún conocimiento del contexto del que provienen, no es posible averiguar si la sucesión es convergente o no, a la vista de sólo unos cuantos primeros términos. Así, aunque los tres primeros términos de las sucesiones siguientes son iguales, las dos primeras convergen a 0, la tercera converge a 1/9 y la cuarta diverge.

$$\{a_n\} : \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$
$$\{b_n\} : \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{15}, \ldots, \frac{6}{(n+1)(n^2-n+6)}, \ldots$$
$$\{c_n\} : \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{62}, \ldots, \frac{n^2-3n+3}{9n^2-25n+18}, \ldots$$
$$\{d_n\} : \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 0, \ldots, \frac{-n(n+1)(n-4)}{6(n^2+3n-2)}, \ldots$$

El proceso de determinar un n-ésimo término mediante una pauta observada en los primeros términos es un ejemplo de *razonamiento inductivo*.

EJEMPLO 7 *Cálculo del n-ésimo término de una sucesión*

Determinar un n-ésimo término para una sucesión cuyos cinco primeros términos son

$$-\frac{2}{1}, \frac{8}{2}, -\frac{26}{6}, \frac{80}{24}, -\frac{242}{120}, \ldots$$

y decidir entonces si la sucesión construida es convergente.

Solución: Nótese que los numeradores son $3^n - 1$. Factorizando los denominadores se obtiene

$$1 = 1$$
$$2 = 1 \cdot 2$$
$$6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$
$$24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$
$$120 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Esto sugiere que los denominadores vienen dados por $n!$ Finalmente, como los signos son alternados, escribimos el término n-ésimo como

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{3^n - 1}{n!}\right)$$

De la discusión sobre el crecimiento de $n!$ se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 1}{n!} = 0$$

Aplicando el Teorema 8.4 se llega a la conclusión de que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Así pues, la sucesión $\{a_n\}$ converge a 0. □

Sucesiones monótonas y sucesiones acotadas

Hasta ahora hemos decidido la convergencia de una sucesión calculando su límite. Ahora bien, incluso cuando no se sabe hallar el límite, sigue siendo importante conocer si la sucesión es convergente o divergente. El Teorema 8.5 proporciona un criterio que permite averiguar si la sucesión converge, sin necesidad de tener que hallar el límite. Antes, enunciamos algunas definiciones.

DEFINICIÓN DE SUCESIONES MONÓTONAS

Una sucesión $\{a_n\}$ es monótona si sus términos son no decrecientes

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots$$

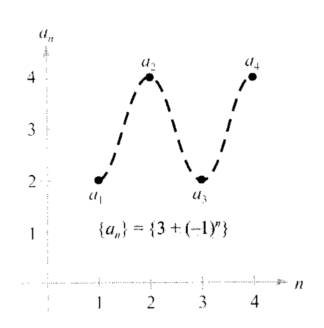
o no crecientes

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots$$

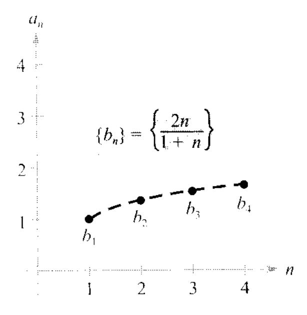
EJEMPLO 8 Investigando si una sucesión es monótona

Averiguar si las sucesiones cuyos términos generales se indican son monótonas.

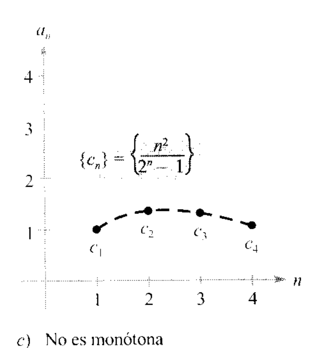
a) $a_n = 3 + (-1)^n$ *b)* $b_n = \dfrac{2n}{1+n}$ *c)* $c_n = \dfrac{n^2}{2^n - 1}$



a) No es monótona



b) Monótona



c) No es monótona

FIGURA 8.3

| Nota. Las tres sucesiones que se ilustran en la Figura 8.3 son acotadas. Para verificarlo, basta darse cuenta de que

$$2 \leqslant a_n \leqslant 4$$
$$1 \leqslant b_n \leqslant 2$$
$$0 \leqslant c_n \leqslant \frac{4}{3}$$

Solución:

a) Esta sucesión alterna entre 2 y 4, luego no es monótona

b) Esta sucesión es monótona, ya que cada término es mayor que el anterior. En efecto, comparemos los términos b_n y b_{n+1}. [Nótese que, al ser n positivo, podemos multiplicar ambos miembros de la desigualdad por $(1 + n)$ y $(2 + n)$ sin invertir el signo de la desigualdad.]

$$b_n = \frac{2n}{1+n} \overset{?}{<} \frac{2(n+1)}{1+(n+1)} = b_{n+1}$$
$$2n(2+n) \overset{?}{<} (1+n)(2n+2)$$
$$4n + 2n^2 \overset{?}{<} 2 + 4n + 2n^2$$
$$0 < 2$$

Partiendo de la desigualdad final, que es válida, podemos invertir los pasos de este argumento para concluir que la desigualdad original era correcta.

c) Esta sucesión no es monótona, porque el segundo término es mayor que el primero y el tercero. (Nótese que si se suprimiera el primer término, la sucesión resultante ya sería monótona.)

La Figura 8.3 ilustra esas tres sucesiones. □

| Nota. En el Ejemplo 8*b*, otra forma de ver que la sucesión es monótona consiste en argumentar que la derivada de la correspondiente función derivable $f(x) = 2x/(1 + x)$ es positiva para todo x. Eso implica que f es creciente, luego también $\{a_n\}$ es creciente.

DEFINICIÓN DE SUCESIONES ACOTADAS

1. Una sucesión $\{a_n\}$ es **acotada superiormente** si existe un número real M tal que $a_n \leqslant M$ para todo n. El número M es una **cota superior** de la sucesión.
2. Una sucesión $\{a_n\}$ es **acotada inferiormente** si existe un número real N tal que $N \leqslant a_n$ para todo n. El número N es una **cota inferior** de la sucesión.
3. Una sucesión $\{a_n\}$ es **acotada** si es acotada superiormente e inferiormente.

El sistema de los números reales es **completo**. Esta importante propiedad significa, en términos coloquiales, que no hay huecos en la recta real. (El conjunto de los racionales no es completo.) El carácter completo de los números reales permite asegurar que si una sucesión tiene una cota superior, debe tener necesariamente una **cota superior mínima** (una cota superior que es menor que todas las demás cotas superiores de esa sucesión). Por ejemplo, la cota superior mínima de la sucesión $\{a_n\} = \{n/(n + 1)\}$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

es 1. En la demostración del próximo teorema utilizamos el carácter completo de los números reales.

TEOREMA 8.5 SUCESIONES MONÓTONAS ACOTADAS

Si una sucesión $\{a_n\}$ es monótona y acotada, entonces es convergente.

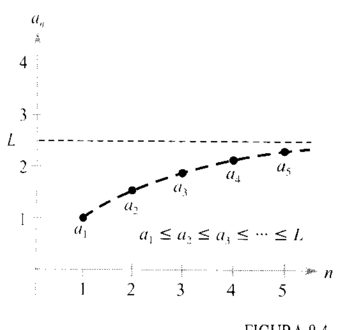


FIGURA 8.4
Toda sucesión acotada no decreciente converge.

Demostración: Supongamos que la sucesión es no decreciente, como muestra la Figura 8.4. Con el fin de simplificar, suponemos además que todos sus términos son positivos. Por ser acotada la sucesión, debe existir una cota superior M tal que

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \leqslant M$$

Por el carácter completo de los reales, existe una cota superior mínima L tal que

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \leqslant L$$

Dado $\varepsilon > 0$, es $L - \varepsilon < L$, luego $L - \varepsilon$ no puede ser cota superior de la sucesión. En consecuencia, al menos un término de $\{a_n\}$ es mayor que $L - \varepsilon$. Es decir, $L - \varepsilon < a_N$ para algún entero positivo N. Como los términos son no decrecientes, es $a_N \leqslant a_n$ para todo $n > N$. Ahora sabemos que $L - \varepsilon < a_N \leqslant a_n \leqslant L < L + \varepsilon$ para todo $n > N$. Se sigue que $|a_n - L| < \varepsilon$ para $n > N$, lo cual significa, por definición, que $\{a_n\}$ converge a L. La demostración para una sucesión no creciente es análoga. □

EJEMPLO 9 Sucesiones monótonas acotadas

a) La sucesión $\{a_n\}$ es monótona y también acotada, luego, por el Teorema 8.5, convergente.
b) La sucesión divergente $\{b_n\} = \{n^2/(n+1)\}$ es monótona, pero no acotada. (Es acotada sólo inferiormente.)
c) La sucesión divergente $\{c_n\} = \{(-1)^n\}$ es acotada, pero no monótona. □

Ejercicios de la Sección 8.1

En los Ejercicios 1-8, escribir los cinco primeros términos de la sucesión.

1. $a_n = 2^n$

2. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

3. $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$

4. $a_n = \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{2}$

5. $a_n = \dfrac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n^2}$

6. $a_n = 5 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$

7. $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$

8. $a_n = \dfrac{3n!}{(n-1)!}$

En los Ejercicios 9-12, escribir los cinco primeros términos de la sucesión definida por recurrencia.

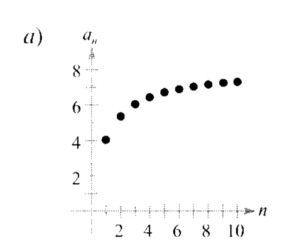
9. $a_1 = 3, a_{k+1} = 2(a_k - 1)$

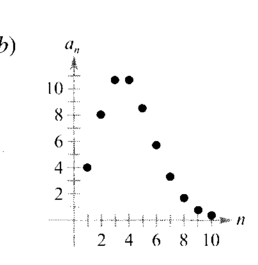
10. $a_1 = 4, a_{k+1} = \left(\dfrac{k+1}{2}\right)a_k$

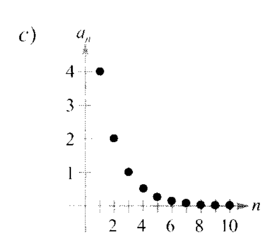
11. $a_1 = 32, a_{k+1} = \dfrac{1}{2}a_k$

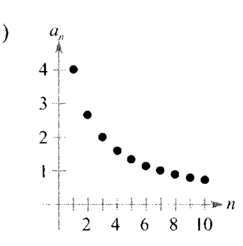
12. $a_1 = 6, a_{k+1} = \dfrac{1}{3}a_k^2$

En los Ejercicios 13-16, asociar a cada sucesión la gráfica que le corresponde.

a)


b)


c)


d)


13. $a_n = \dfrac{8}{n+1}$

14. $a_n = \dfrac{8n}{n+1}$

15. $a_n = 4(0{,}5)^{n-1}$

16. $a_n = \dfrac{4^n}{n!}$

En los Ejercicios 17-22, representar en la calculadora los primeros diez términos de la sucesión.

17. $a_n = \dfrac{2}{3}n$

18. $a_n = 2 - \dfrac{4}{n}$

19. $a_n = 16(-0{,}5)^{n-1}$

20. $a_n = 8(0{,}75)^{n-1}$

21. $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$

22. $a_n = \dfrac{3n^2}{n^2+1}$

En los Ejercicios 23-26, escribir los dos téminos que parecen seguir a los indicados. Describir la pauta observada.

23. $2, 5, 8, 11, \cdots$

24. $\dfrac{7}{2}, 4, \dfrac{9}{2}, 5, \cdots$

25. $3, -\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{4}, -\dfrac{3}{8}, \cdots$

26. $5, 10, 20, 40, \cdots$

En los Ejercicios 27-32, simplificar el cociente de factoriales.

27. $\dfrac{10!}{8!}$

28. $\dfrac{25!}{23!}$

29. $\dfrac{(n+1)!}{n!}$

30. $\dfrac{(n+2)!}{n!}$

31. $\dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$

32. $\dfrac{(2n+2)!}{(2n)!}$

En los Ejercicios 33-46, dar una expresión para el término n-ésimo de la sucesión. (Hay más de una respuesta correcta posible.)

33. $1, 4, 7, 10, \cdots$

34. $3, 7, 11, 15, \cdots$

35. $-1, 2, 7, 14, 23, \cdots$

36. $1, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{16}, \cdots$

37. $\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \cdots$

38. $2, \dfrac{3}{3}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{7}, \dfrac{6}{9}, \cdots$

39. $2, -1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \cdots$

40. $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{9}, \dfrac{4}{27}, -\dfrac{8}{81}, \cdots$

41. $2, 1 + \dfrac{1}{2}, 1 + \dfrac{1}{3}, 1 + \dfrac{1}{4}, 1 + \dfrac{1}{5}, \cdots$

42. $1 + \dfrac{1}{2}, 1 + \dfrac{3}{4}, 1 + \dfrac{7}{8}, 1 + \dfrac{15}{16}, 1 + \dfrac{31}{32}, \cdots$

43. $\dfrac{1}{2 \cdot 3}, \dfrac{2}{3 \cdot 4}, \dfrac{3}{4 \cdot 5}, \dfrac{4}{5 \cdot 6}, \cdots$

44. $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{24}, \dfrac{1}{120}, \cdots$

45. $1, -\dfrac{1}{1 \cdot 3}, \dfrac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5}, \dfrac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}, \cdots$

46. $1, x, \dfrac{x^2}{2}, \dfrac{x^3}{6}, \dfrac{x^4}{24}, \dfrac{x^5}{120}, \cdots$

En los Ejercicios 47-50, representar en la calculadora los diez primeros términos de la sucesión y, a continuación, intentar adivinar si converge o no. Verificar la conjetura analíticamente y, en caso de convergencia, hallar el límite.

47. $a_n = \dfrac{n+1}{n}$

48. $a_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$

49. $a_n = \cos \dfrac{n\pi}{2}$

50. $a_n = 3 - \dfrac{1}{2^n}$

En los Ejercicios 51-66, averiguar si la sucesión, cuyo término general se especifica, es convergente o no. Hallar el límite

51. $a_n = (-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)$ **52.** $a_n = 1 + (-1)^n$

53. $a_n = \frac{3n^2 - n + 4}{2n^2 + 1}$ **54.** $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 1}$

55. $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$ **56.** $a_n = \frac{\ln (n^2)}{n}$

57. $a_n = \frac{3^n}{4^n}$ **58.** $a_n = (0{,}5)^n$

59. $a_n = \frac{(n+1)!}{n!}$ **60.** $a_n = \frac{(n-2)!}{n!}$

61. $a_n = \frac{n-1}{n} - \frac{n}{n-1}$ **62.** $a_n = \frac{n^2}{2n+1} - \frac{n^2}{2n-1}$

63. $a_n = \frac{n^p}{e^n}\ (p > 0,\ n \geqslant 2)$ **64.** $a_n = n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

65. $a_n = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$ **66.** $a_n = 2^{1/n}$

En los Ejercicios 67-76, averiguar si la sucesión con el término general dado es monótona. Discutir si es acotada o no. Confirmar los resultados con ayuda de la calculadora.

67. $a_n = 4 - \frac{1}{n}$ **68.** $a_n = \frac{4n}{n+1}$

69. $a_n = \frac{\cos n}{n}$ **70.** $a_n = ne^{-n/2}$

71. $a_n = (-1)^n\left(\frac{1}{n}\right)$ **72.** $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

73. $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ **74.** $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

75. $a_n = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{6}$ **76.** $a_n = \frac{n}{2^{n+2}}$

En los Ejercicios 77-80, *a*) usar el Teorema 8.5 para demostrar que la sucesión cuyo término general se especifica es convergente, y *b*) representar en una calculadora los diez primeros términos de la sucesión y determinar su límite.

77. $a_n = 5 + \frac{1}{n}$ **78.** $a_n = 3 - \frac{4}{n}$

79. $a_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$ **80.** $a_n = 4 + \frac{1}{2^n}$

81. ***Para pensar*** Dar un ejemplo de sucesión que satisfaga la condición propuesta o justificar por qué no existe tal sucesión. (Hay más de una respuesta correcta.)
a) Una sucesión monótona creciente que converge a 10.
b) Una sucesión monótona creciente acotada que no es convergente.
c) Una sucesión que converge a $\frac{3}{4}$.
d) Una sucesión no acotada que converge a 100.

82. Encontrar una sucesión que converja a 3/8. (La respuesta no es única.) ¿Cuál es el primer término de esa sucesión que dista del límite menos de 0,001?

83. ***Interés compuesto*** Consideremos la sucesión de término general

$$A_n = P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^n$$

donde P es el capital invertido, A_n el balance tras n meses de interés compuesto y r la tasa anual de interés.
a) La sucesión $\{A_n\}$ ¿es covergente? Explicar la respuesta.
b) Hallar los primeros diez términos de esa sucesión para P = \$9.000 y r = 0,115.

84. ***Inversión*** Se depositan \$100 al comienzo de cada mes a una tasa anual de interés del 12 por 100 compuesto mensualmente. El balance después de n meses es

$$A_n = 100(101)[(1{,}01)^n - 1]$$

a) Calcular los seis primeros términos de la sucesión.
b) Hallar el balance tras 5 años, calculando para ello el término A_{60}.
c) Calcular el balance a los 20 años, calculando el término A_{240}.

85. ***Inversiones estatales*** Un programa del gobierno que ha costado a los contribuyente 2.500 millones de dólares este año se va a recortar un 20 por 100 anual en los años venideros.
a) Escribir una expresión para el montante de ese programa tras n años.
b) Calcular los presupuestos de los 4 primeros años.
c) Determinar la convergencia o divergencia de la sucesión de esos presupuestos recortados. Si la sucesión converge, hallar su límite.

86. ***Inflación*** Si la tasa anual de inflación es $4\frac{1}{2}$ por 100 y el precio medio de una automóvil es hoy de \$16.000, el precio medio dentro de n años será

$$P_n = \$16.000(1{,}045)^n$$

Calcular el precio medio en los próximos 5 años.

87. ***Un modelo matemático*** El coste medio de la estancia diaria en un hospital entre 1988 y 1993 viene dada en la tabla, donde a_n es el coste medio en dólares y n el año, con $n = 0$ correspondiendo a 1990. *(Fuente: American Hospital Association.)*

n	−2	−1	0	1	2	3
a_n	586	637	687	752	820	881

a) Usar regresión en la calculadora para hallar un modelo de la forma

$$a_n = kn + b, \qquad n = -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

que ajuste esos datos. Representar en la calculadora los puntos y el modelo.

b) Predecir, con ese modelo, el coste en el año 2000.

88. ***Los ingresos netos*** a_n, en millones de dólares, de Wal-Mart entre 1987 y 1996 vienen dados en la tabla como pares ordenados (n, a_n), donde n es el año, con $n = 0$ correspondiendo a 1990. *(Fuente: 1996 Wal-Mart Annual Report.)*

(−3, 451), (−2, 628), (−1, 838), (0, 1.076), (1, 1.291)

(2, 1.609), (3, 1.995), (4, 2.333), (5, 2.681), (6, 2.740)

a) Usar regresión en la calculadora para hallar un modelo de la forma

$$a_n = bn^2 + cn + d, \quad n = -3, -1, \cdots, 6$$

para esos datos. Comparar gráficamente los puntos y el modelo.

b) Predecir, con ese modelo, los ingresos netos para el año 2000.

89. ***Crecimiento de poblaciones*** Consideremos una población imaginaria en la que cada habitante tiene un hijo al final de cada cierto período de tiempo. Si cada individuo vive tres períodos y la población comienza con 10 miembros recién nacidos, la población en los cinco primeros años es la que se muestra en la tabla.

Edad	Tiempo 1	2	3	4	5
0-1	10	10	20	40	70
1-2		10	10	20	40
2-3			10	10	10
Total	10	20	40	70	130

La secuencia de la población tiene la propiedad

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}, \qquad n > 3$$

Calcular la población al final de cada uno de los cinco años siguientes.

90. ***Deuda federal*** EE.UU. tardó más de 200 años en acumular una deuda de 1 billón de dólares. Pero a continuación tardó sólo 8 años en alcanzar los 3 billones. Durante la década de los ochenta, la deuda federal siguió aproximadamente el modelo

$$a_n = 0{,}905e^{0{,}134n}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, 10$$

donde a_n es la deuda en billones y n el año, con $n = 0$ correspondiendo a 1980. Calcular los términos de esta sucesión finita y construir un diagrama de barras que la represente. *(Fuente: U.S. Treasury Department.)*

91. ***Comparación de los crecimientos factorial y exponencial*** Consideremos la sucesión $a_n = 10^n/n!$

a) Hallar dos términos consecutivos que sean iguales.

b) Los términos que siguen a esos dos, ¿crecen o decrecen?

c) En los Ejercicios 51-56 de la Sección 7.7 se demostró que para valores «grandes» de la variable independiente, una función exponencial crece más rápidamente que una función polinómica. Del resultado del apartado *b*), ¿qué parece deducirse acerca del ritmo de crecimiento de una función exponencial en relación al de una factorial para valores «grandes» de n?

92. Calcular los seis primeros términos de la sucesión

$$\{a_n\} = \{(1 + 1/n)^n\}$$

Si la sucesión converge, hallar su límite.

93. Calcular los seis primeros términos de la sucesión $\{a_n\} = \{\sqrt[n]{n}\}$. Si la sucesión converge, hallar su límite.

94. Demostrar que si $\{s_n\}$ converge a L y $L > 0$, existe un número N tal que $s_n > 0$ para todo $n > N$.

95. ***Sucesión de Fibonacci*** Al estudiar la procreación de los conejos, Fibonacci (hacia 1175-1250) encontró la sucesión que hoy lleva su nombre, definida por recurrencia así:

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, \quad \text{donde } a_1 = 1 \text{ y } a_2 = 1$$

a) Escribir sus 12 primeros términos.

b) Escribir los diez primeros términos de la sucesión definida por

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \text{para } n \geqslant 1$$

c) Usando la definición del apartado *b*), probar que

$$b_n = 1 + \frac{1}{b_{n+1}}$$

d) La **razón áurea** ρ se define como $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \rho$.

Probar que

$$\rho = 1 + 1/\rho$$

y resolver esta ecuación.

96. Completar la demostración del Teorema 8.5.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 97-100, averiguar si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

97. Si $\{a_n\}$ converge a 3 y $\{b_n\}$ converge a 2, entonces $\{a_n + b_n\}$ converge a 5.

98. Si $\{a_n\}$ converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a_{n-1}) = 0$.

99. Si $n > 1$, entonces $n! = n(n-1)!$

100. Si $\{a_n\}$ converge, entonces $\{a_n/n\}$ converge a 0.

101. Consideremos la sucesión

$$\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

donde $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ para $n \geqslant 2$. Calcular sus cinco primeros términos y hallar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

102. ***Conjetura*** Sea $x_0 = 1$ y consideremos la sucesión x_n dada por

$$x_n = -\frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

Determinar, con una calculadora, los diez primeros términos y enunciar una conjetura acerca del límite de esa sucesión.



8.2 Series y convergencia

CONTENIDO ▪
Series ▪
Series geométricas ▪
Criterio del término general para la divergencia ▪

Series

Una importante aplicación de las sucesiones consiste en representar «sumas infinitas». Dicho brevemente, si $\{a_n\}$ es una sucesión, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

es una **serie**. Los números $a_1, a_2, a_3, \cdots$ son los términos de la serie. A veces conviene comenzar en el índice $n = 0$ (o en algún otro entero). Un convenio frecuente, para aliviar la escritura, consiste en escribir la serie simplemente como $\Sigma\, a_n$. En tal caso, el valor inicial del índice debe deducirse del contexto.

Para hallar la suma de una serie, consideremos la **sucesión de sumas parciales**.

SERIES

El estudio de las series constituyó toda una novedad en el siglo XIV. El lógico Richard Suiseth, cuyo sobrenombre era Calculador, resolvió este problema.

Si durante la primera mitad de un intervalo de tiempo una variación continúa a cierta intensidad, en el siguiente cuarto a intensidad doble, en el siguiente octavo a intensidad triple, y así ad infinitum, entonces la intensidad media para todo el intervalo será la intensidad de la variación durante el segundo subintervalo.

Esto equivale a decir que la suma de la serie

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots$$

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Si esta sucesión de sumas parciales converge, diremos que la serie converge y que su suma es la indicada en la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE SERIES CONVERGENTES Y DIVERGENTES

La ***n*-ésima suma parcial** de la serie $\Sigma\, a_n$ viene dada por

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge a S, se dice que la serie $\Sigma\, a_n$ **converge**. El límite S se llama **suma de la serie**.

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Si $\{S_n\}$ diverge, se dice que la serie **diverge**.

ADVERTENCIA Conforme avance en este capítulo verá que hay dos cuestiones básicas referentes a las series. La serie ¿converge o diverge? Y, en caso de que converja, ¿cuál es su suma? No siempre es fácil contestar estas cuestiones, especialmente la segunda.

EXPLORACIÓN

Sumas de series Hallar la suma de las series siguientes, explicando cómo se han encontrado.

a) $0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \cdots$

b) $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1.000}+\frac{3}{10.000}+\cdots$

c) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$

d) $\frac{15}{100}+\frac{15}{10.000}+\frac{15}{1.000.000}+\cdots$

EJEMPLO 1 Series convergentes y divergentes

a) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

tiene las siguientes sumas parciales

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

La Figura 8.5 muestra las primeras 15 sumas parciales de la serie del Ejemplo 1*a*. Observamos que sus valores parecen tender hacia la recta $y = 1$.

FIGURA 8.5

De

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = 1$$

se sigue que la serie es convergente con suma 1.

b) La n-ésima suma parcial de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$$

viene dada por

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Como el límite de S_n es 1, la serie converge y tiene suma 1.

c) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$$

diverge, ya que $S_n = n$, así que la sucesión de sumas parciales es divergente. □

Nota. Se pueden calcular geométricamente las sumas parciales de la serie del Ejemplo 1*a* usando la Figura 8.6.

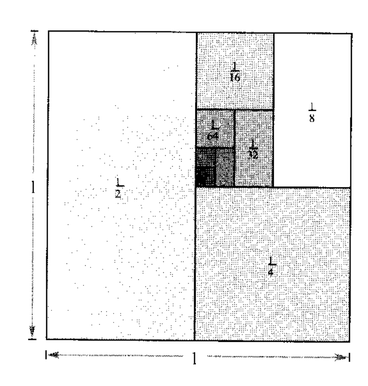


FIGURA 8.6

La serie del Ejemplo 1*b* es una **serie telescópica**, o sea, de la forma

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + (b_4 - b_5) + \cdots$$

Serie telescópica

Nótese que b_2 queda cancelado por el segundo término, b_3 por el tercero, etcétera. Puesto que la suma parcial n-ésima de esta serie es

$$S_n = b_1 - b_{n+1}$$

PARA MÁS INFORMACIÓN
Sobre sumas parciales de series, véase el artículo «Six Ways to Sum a Series», de Dan Kalmon, en *The College Mathematics Journal*, noviembre 1993.

se sigue que una serie telescópica converge si y sólo si b_n tiende a un número finito cuando $n \to \infty$. Además, si la serie converge, su suma será

$$S = b_1 - \lim_{n \to \infty} b_{n+1}$$

EJEMPLO 2 Expresando una serie en forma telescópica

Calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 1}$

Solución: Usando fracciones simples, escribimos

$$a_n = \frac{2}{4n^2 - 1} = \frac{2}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1}$$

De esta forma telescópica se desprende que la n-ésima suma parcial es

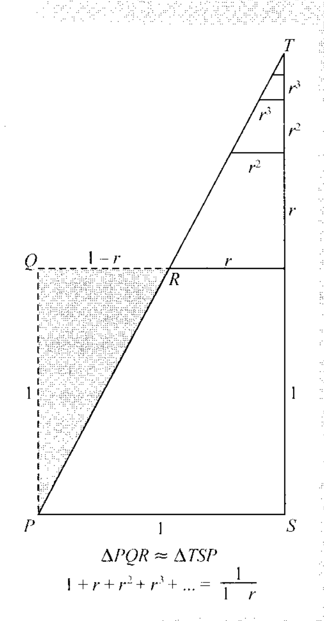
$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1}\right) = 1 - \frac{1}{2n + 1}$$

Así pues, la serie converge y su suma es 1. Esto es,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2n + 1}\right) = 1 \qquad \square$$

EXPLORACIÓN

En «Proof Without Words», de Benjamin G. Klein y Irl C. Bivens, los autores presentan el siguiente diagrama. Explicar por qué la afirmación final bajo el diagrama es correcta. ¿Cómo se relaciona este resultado con el Teorema 8.6?



Ejercicio tomado de «Proof Without Words» de Benjamin G. Klein y Irl C. Bivens, *Mathematics Magazine*, octubre 1988, con permiso de sus autores.

Series geométricas

La serie del Ejemplo 1a es una **serie geométrica**. En general, la serie dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots, \quad a \neq 0 \qquad \text{Serie geométrica}$$

es una **serie geométrica** de razón r.

TEOREMA 8.6 CONVERGENCIA DE SERIES GEOMÉTRICAS

Una serie geométrica de razón r diverge si $|r| \geq 1$. Si $0 < |r| < 1$, entonces la serie converge a la suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1 - r}, \qquad 0 < |r| < 1$$

Demostración: Es fácil ver que la serie diverge cuando $r = \pm 1$. Si $r \neq \pm 1$, entonces $S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$. Multiplicando por r obtenemos

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$$

Restando la segunda ecuación de la primera resulta $S_n - rS_n = a - ar^n$. Por tanto, $S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$, y la n-ésima suma parcial es

$$S_n = \frac{a}{1 - r}(1 - r^n)$$

Si $0 < |r| < 1$, entonces $r^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, luego

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a}{1 - r}(1 - r^n)\right] = \frac{a}{1 - r}\left[\lim_{n\to\infty} (1 - r^n)\right] = \frac{a}{1 - r}$$

lo cual significa que la serie es *convergente* y que su suma es $a/(1 - r)$. Dejamos al lector la demostración de que la serie diverge cuando $|r| > 1$. □

EJEMPLO 3 Series geométricas convergentes y divergentes

> Intente calcular la suma de los 20 primeros términos de la serie del Ejemplo 3*a* en una calculadora. Debe obtener como suma aproximada 5,999997.

a) La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = 3(1) + 3\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots$$

tiene razón $r = 1/2$ y $a = 3$. Como $0 < |r| < 1$, la serie converge y su suma es

$$S = \frac{a}{1 - r} = \frac{3}{1 - (1/2)} = 6$$

b) La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \cdots$$

tiene razón $r = \frac{3}{2}$. Como $|r| \geqslant 1$, la serie diverge. □

La fórmula para la suma de una serie geométrica sirve para expresar un decimal periódico como cociente de enteros, como muestra el próximo ejemplo.

EJEMPLO 4 Una serie geométrica para un decimal periódico

Expresar 0,080808 como cociente de dos enteros, usando una serie geométrica.

Solución: Dado $0{,}0808\overline{08}$, podemos escribir

$$0{,}080808... = \frac{8}{10^2} + \frac{8}{10^4} + \frac{8}{10^6} + \frac{8}{10^8} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{10^2}\right)\left(\frac{1}{10^2}\right)^n$$

En esta serie, $a = \frac{8}{10^2}$ y $r = \frac{1}{10^2}$. Así pues,

$$0{,}080808... = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{8}{10^2}}{1 - \left(\frac{1}{10^2}\right)} = \frac{8}{99}$$

Divida 8 por 99 para ver que, en efecto, el resultado es 0,080808. □

La convergencia de una serie no se ve afectada por la eliminación de un número finito de sus términos iniciales. Por ejemplo, las series geométricas

$$\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

convergen ambas. Además, puesto que la suma de la segunda serie es $a/(1 - r) = 2$, concluimos que la suma de la primera serie es

$$\begin{aligned} S &= 2 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] \\ &= 2 - \frac{15}{8} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Las propiedades que se citan a continuación son consecuencia directa de las correspondientes para los límites de sucesiones.

TEOREMA 8.7 PROPIEDADES DE LAS SERIES

Si $\Sigma\, a_n = A$, $\Sigma\, b_n = B$, y c es un número real, las series siguientes convergen a las sumas indicadas.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cA$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$ 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = A - B$

Criterio del término general para la divergencia

El próximo teorema establece que si una serie converge, el límite de su término n-ésimo ha de ser necesariamente 0.

TEOREMA 8.8 LÍMITE DEL TÉRMINO GENERAL DE UNA SERIE CONVERGENTE

Si la serie $\Sigma\, a_n$ converge, la sucesión $\{a_n\}$ converge a 0.

ADVERTENCIA Al estudiar este capítulo es muy importante distinguir entre series y sucesiones. Una sucesión es una colección ordenada de números

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

mientras que una serie es una suma infinita de los términos de una sucesión

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Demostración: Supongamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n = L$$

Entonces, como $S_n = S_{n-1} + a_n$ y

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} S_{n-1} = L$$

resulta que

$$\begin{aligned} L = \lim_{n \to \infty} S_n &= \lim_{n \to \infty} (S_{n-1} + a_n) = \lim_{n \to \infty} S_{n-1} + \lim_{n \to \infty} a_n \\ &= L + \lim_{n \to \infty} a_n \end{aligned}$$

lo cual implica que $\{a_n\}$ converge a 0. □

El contrarrecíproco del Teorema 8.8 proporciona un criterio eficaz para demostrar la *divergencia* de muchas series. Este **criterio del término general** (o del término n-ésimo) afirma que si el límite del término general de una serie no tiende a cero, la serie diverge necesariamente.

TEOREMA 8.9 CRITERIO DEL TÉRMINO GENERAL PARA LA DIVERGENCIA

Si la sucesión $\{a_n\}$ no converge a 0, la serie Σa_n es divergente.

Nota. ¡Cuidado! Este teorema no dice que si $\{a_n\}$ converge a 0 la serie $\Sigma\, a_n$ tenga que ser necesariamente convergente.

EJEMPLO 5 Aplicación del criterio del término general

a) Para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$, se tiene

$$\lim_{n \to \infty} 2^n = \infty$$

Así pues, el límite del término n-ésimo no es 0, luego la serie diverge.

b) Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n! + 1}$, es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2n! + 1} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, el límite del término n-ésimo no es 0, y la serie diverge.

c) Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Como el límite del término general es 0, el criterio del término general no es aplicable, luego no podemos sacar conclusiones sobre si la serie converge o diverge. (En la próxima sección veremos que esta serie es divergente.) □

ADVERTENCIA La serie del Ejemplo 5*c* jugará un papel relevante en este capítulo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Tendremos ocasión de probar que esta serie diverge, a pesar de que su término general tiende a 0 cuando n tiende a infinito.

EJEMPLO 6 Una pelota que bota

Se deja caer una pelota desde 6 pies de altura y comienza a botar, como muestra la Figura 8.7. Cada vez rebota 3/4 de la altura desde la que cae del bote anterior. Calcular la distancia vertical total recorrida por la pelota.

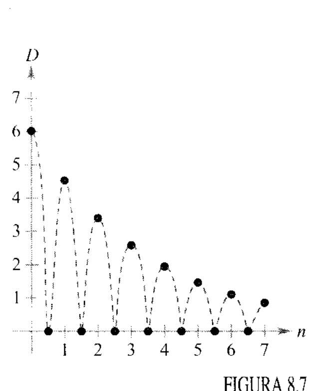


FIGURA 8.7
La altura en cada bote es 3/4 de la altura del bote anterior.

Solución: Cuando la pelota toca por primera vez el suelo ha recorrido una distancia $D_1 = 6$. Sea D_n la distancia de subida y bajada en el n-ésimo bote subsiguiente. Por ejemplo, D_2 y D_3 son



$$D_2 = \underbrace{6\left(\frac{3}{4}\right)}_{\text{Sube}} + \underbrace{6\left(\frac{3}{4}\right)}_{\text{Baja}} = 12\left(\frac{3}{4}\right) \qquad D_3 = \underbrace{6\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)}_{\text{Sube}} + \underbrace{6\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)}_{\text{Baja}} = 12\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

Continuando con este proceso, encontramos que la distancia vertical total recorrida es

$$\begin{aligned} D &= 6 + 12\left(\frac{3}{4}\right) + 12\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 12\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots \\ &= 6 + 12 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \\ &= 6 + 12\left(\frac{3}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ &= 6 + 9\left(\frac{1}{1 - \frac{3}{4}}\right) = 6 + 9(4) \\ &= 42 \text{ pies} \end{aligned}$$

□

Ejercicios de la Sección 8.2

En los Ejercicios 1-6, calcular los cinco primeros términos de la sucesión de sumas parciales.

1. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$

2. $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 6} + \frac{5}{6 \cdot 7} + \cdots$

3. $3 - \frac{9}{2} + \frac{27}{4} - \frac{81}{8} + \frac{243}{16} - \cdots$

4. $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$

En los Ejercicios 7-16, verificar que la serie dada es divergente.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+3} = \frac{1}{5} + \frac{2}{7} + \frac{3}{9} + \frac{4}{11} + \cdots$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{3}{2}\right)^n$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} 1.000(1{,}055)^n$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} 2(-1{,}03)^n$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}}$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

En los Ejercicios 17-22, comprobar que la serie propuesta es convergente.

17. $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{3}{4}\right)^n = 2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \frac{81}{128} + \cdots$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \cdots$

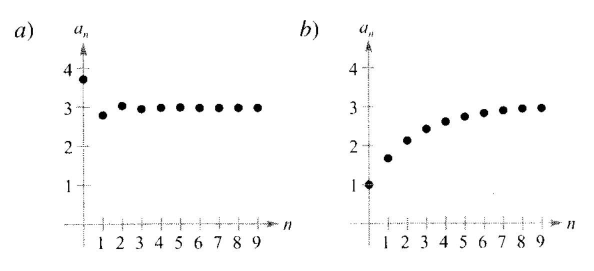
19. $\sum_{n=0}^{\infty} (0{,}9)^n = 1 + 0{,}9 + 0{,}81 + 0{,}729 + \cdots$

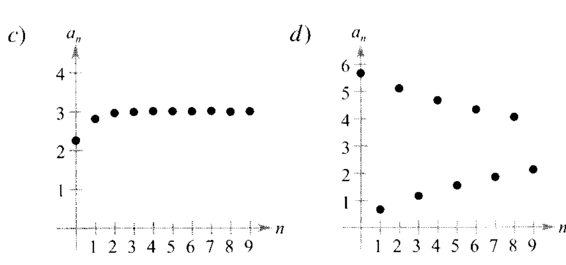
20. $\sum_{n=0}^{\infty} (-0{,}6)^n = 1 - 0{,}6 + 0{,}36 - 0{,}216 + \cdots$

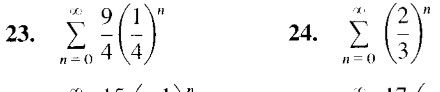
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ Usar descomposición en fracciones simples

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ Usar descomposición en fracciones simples

En los Ejercicios 23-26, asociar cada serie con la gráfica correspondiente de su sucesión de sumas parciales. Estimar la suma a la vista de la gráfica.







23. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

24. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

25. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$

26. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{17}{3}\left(-\frac{8}{9}\right)^n$

Investigación numérica, gráfica y analítica En los Ejercicios 27-30, *a*) calcular la suma de la serie, *b*) hallar la suma parcial S_n indicada, con ayuda de la calculadora, y completar la tabla, *c*) representar en la calculadora las diez primeras sumas parciales y una recta horizontal que represente la suma, y *d*) explicar la relación entre la magnitud de los términos de la serie y el ritmo al que la sucesión de sumas parciales tiende a la suma de la serie.

n	5	10	20	50	100
S_n					

27. $\sum_{n=1}^{\infty} 2(0{,}9)^{n-1}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+4)}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} 10(0{,}25)^{n-1}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

En los Ejercicios 31-44, determinar la suma de la serie.

31. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

32. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

33. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

34. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

35. $1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \cdots$

36. $8 + 6 + \dfrac{9}{2} + \dfrac{27}{8} + \cdots$

37. $3 - 1 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} + \cdots$

38. $4 - 2 + 1 - \dfrac{1}{2} + \cdots$

39. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + 1)}$

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n + 2)}$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)(2n + 3)}$

43. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$

44. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [(0{,}7)^n + (0{,}9)^n]$

En los Ejercicios 45-48, expresar el decimal periódico como una serie geométrica y expresar su valor como cociente de dos enteros.

45. $0{,}4$

46. $0{,}2323$

46. $0{,}075\overline{75}$

48. $0{,}215\overline{15}$

En los Ejercicios 49-60, estudiar si la serie es convergente o divergente.

49. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 10}{10n + 1}$

50. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{2n - 1}$

51. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + 2}\right)$

52. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + 3)}$

53. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n - 1}{2n + 1}$

54. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

55. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n}$

56. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

57. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1{,}075)^n$

58. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{100}$

59. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n}$

60. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$

En los Ejercicios 61 y 62, *a*) hallar la razón de la serie geométrica, *b*) escribir la función que da la suma de la serie, y *c*) representar en la calculadora la función y la suma parcial S_2.

61. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

62. $1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^3}{8} + \cdots$

En los Ejercicios 63 y 64, representar la función en la calculadora. Identificar la asíntota horizontal de la gráfica y explicar su relación con la suma de la serie.

	Función	*Serie*
63.	$f(x) = 3\left[\dfrac{1 - (0{,}5)^x}{1 - 0{,}5}\right]$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$
64.	$f(x) = 2\left[\dfrac{1 - (0{,}8)^x}{1 - 0{,}8}\right]$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{4}{5}\right)^n$

Redacción En los Ejercicios 65 y 66, usar la calculadora para hallar el primer término menor que 0,0001 en cada una de las series convergentes especificadas. Nótese que las respuestas son muy diferentes. Explicar cómo afecta esto al ritmo de convergencia de la serie.

65. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + 1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n$

66. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (0{,}01)^n$

67. ***Comercio*** Una empresa fabrica un nuevo producto y estima que las ventas anuales serán de 8.000 unidades. Cada año, el 10 por 100 de las unidades vendidas dejarán de funcionar. Así pues, habrá 8.000 unidades operativas al final del primer año, [8.000 + 0,9(8.000)] al final del segundo, y así sucesivamente. ¿Cuántas unidades estarán funcionando al cabo de n años?

68. ***Efecto multiplicador*** Los ingresos por turismo en una ciudad son 100 millones de dólares. El 75 por 100 de esos ingresos se gastan en la propia ciudad y el 75 por 100 de esta cantidad de nuevo se gasta en ella, y así sucesivamente. Escribir la serie geométrica que da la cantidad total de gasto originada por esos 100 millones y calcular la suma de la serie.

69. ***Distancia*** Se deja caer una bola desde 16 pies de altura. Cada vez que cae desde h pies, sube hasta $0{,}81h$ pies. Calcular la distancia vertical total recorrida por esa bola.

70. ***Tiempo*** La bola del Ejercicio 69 tarda en cada caída un tiempo dado por

$S_1 = -16t^2 + 16,$	$S_1 = 0$ cuando $t = 1$
$S_2 = -16t^2 + 16(0{,}81)$	$S_2 = 0$ cuando $t = 0{,}9$
$S_3 = -16t^2 + 16(0{,}81)^2$	$S_3 = 0$ cuando $t = (0{,}9)^2$
$S_4 = -16t^2 + 16(0{,}81)^3$	$S_4 = 0$ cuando $t = (0{,}9)^3$
$\vdots$	$\vdots$
$S_n = -16t^2 + 16(0{,}81)^{n-1}$	$S_n = 0$ cuando $t = (0{,}9)^{n-1}$

Comenzando con s_2, la bola tarda en subir el mismo tiempo que en bajar, de modo que el tiempo total que tarda en llegar al reposo es

$$t = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (0,9)^n$$

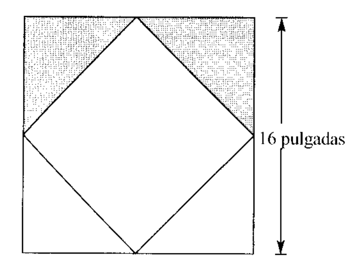
Calcular este tiempo total.

Probabilidad En los Ejercicios 71 y 72, la variable aleatoria n representa las unidades de cierto producto vendidas diariamente en un establecimiento. La distribución de probabilidad de n viene dada por $P(n)$. Calcular la probabilidad de que se vendan dos unidades un día fijado $[P(2)]$ y probar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1$$

71. $P(n) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ **72.** $P(n) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

73. ***Área*** Los lados de un cuadrado miden 16 pulgadas. Se forma un nuevo cuadrado uniendo los puntos medios de sus lados y se sombrean dos de los triángulos laterales, como muestra la figura. Calcular el área de la región sombreada si el proceso se continúa *a*) cinco veces más, *b*) *ad infinitum.*



En los Ejercicios 74-76, usar la fórmula para la n-ésima suma parcial de una serie geométrica

$$\sum_{i=0}^{n-1} ar^i = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

74. ***Copo esférico*** El copo de nieve esférico es un fractal generado por ordenador, creado por Eric Haines, 3D/Eye Inc. El radio de la esfera mayor es 1. A ella se han adosado 9 esferas de radio 1/3. A cada una de éstas se adosan 9 esferas de radio 1/9 y así hasta el infinito. Demostrar que el área superficial del copo esférico es infinita.

75. ***Ingresos*** Un trabajador entra en una empresa que paga \$0,01 el primer día, \$0,02 el segundo día, \$0,04 el tercero, etc. Si el salario diario se mantiene así, doblándose cada día, ¿cuánto habrá cobrado en total si trabaja *a*) 29 días?, *b*) 30 días, y *c*) 31 días?

76. ***Anualidades*** Al recibir a fin de mes su paga, un trabajador invierte P dólares en un plan de pensiones. Efectúa esos ingresos mensuales durante t años. El plan ofrece una tasa de interés anual r, compuesto mensualmente. En esas condiciones, el balance al final de t años es

$$A = P + P\left(1 + \frac{r}{12}\right) + \cdots + P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t-1}$$
$$= P\left(\frac{12}{r}\right)\left[\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t} - 1\right]$$

Si el interés se compone continuamente, el capital A acumulado tras t años es

$$A = P + Pe^{r/12} + Pe^{2r/12} + Pe^{(12t-1)r/12}$$
$$= \frac{P(e^{rt} - 1)}{e^{r/12} - 1}$$

Verificar estas dos fórmulas.

Anualidades En los Ejercicios 77-80, se efectúan depósitos mensuales de P dólares a una tasa de interés anual r. Usar las fórmulas del Ejercicio 76 para calcular el balance después de t años si el interés se compone *a*) mensualmente, y *b*) continuamente.

77.	$P = \$50$	$r = 3\,\%$	$t = 20$ años
78.	$P = \$75$	$r = 5\,\%$	$t = 25$ años
79.	$P = \$100$	$r = 4\,\%$	$t = 40$ años
80.	$P = \$20$	$r = 6\,\%$	$t = 50$ años

81. Demostrar que 0,75 = 0,749999...

82. Demostrar que todo decimal periódico es un número racional.

83. Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

puede escribirse en la forma telescópica

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(c - S_{n-1}) - (c - S_n)]$$

donde $S_0 = 0$ y S_n es la n-ésima suma parcial.

84. Sea $\Sigma\, a_n$ una serie convergente y sea

$$R_N = a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots$$

el resto de la serie al quitar sus primeros N términos. Probar que

$$\lim_{N \to \infty} R_N = 0$$

85. ***Salario*** Usted acepta un trabajo con un salario anual de \$30.000 el primer año y con un aumento del 5 por 100 anual en los 39 años siguientes. ¿Cuánto habrá cobrado en total al final de esos 40 años?

86. ***Beneficios*** El beneficio anual de la H. J. Heinz Company entre 1980 y 1989 siguió aproximadamente el modelo

$$a_n = 167{,}5\, e^{0.12n}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, 9$$

donde a_n denota el beneficio anual, en millones de dólares, y n el año, correspondiendo $n = 0$ a 1980. Usar la fórmula que da la suma de una sucesión geométrica para aproximar el beneficio total en ese período de 10 años.

87. Hallar dos series divergentes $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ tales que $\Sigma(a_n + b_n)$ sea convergente.

88. Dadas dos series $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ tales que $\Sigma\, a_n$ converge y $\Sigma\, b_n$ diverge, demostrar que $\Sigma(a_n + b_n)$ diverge.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 89-92, discutir si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

89. Si $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

90. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L + a_0$.

91. Si $|r| < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n = a/(1 - r)$.

92. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{1.000(n + 1)}$ diverge.

93. ***Redacción*** Lea el artículo «The Exponential-Decay Law Applied to Medical Dosages» por Gerald M. Armstrong y Calvin P. Midgley en *Mathematics Teacher*, febrero 1987. A continuación, escriba unas líneas sobre cómo usar una sucesión geométrica para calcular la cantidad total de un fármaco que queda en un paciente tras serle administradas n dosis iguales, en intervalos de tiempo idénticos.

94. Demostrar que

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots = \frac{1}{r - 1}$$

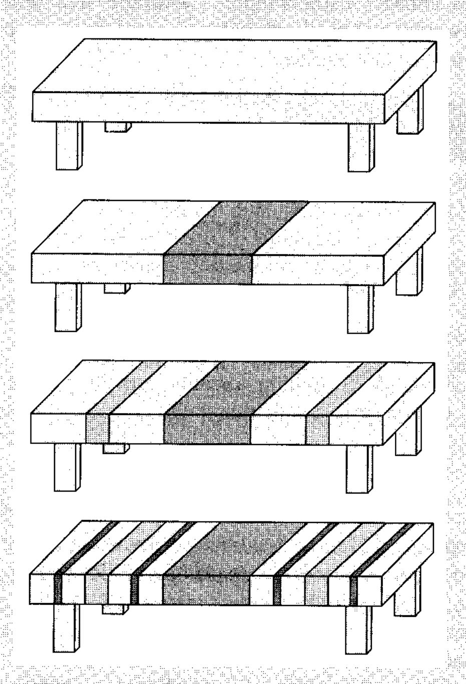
para $|r| > 1$.

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

La mesa desaparecida de Cantor Vamos a explicar cómo hacer desaparecer una mesa ¡suprimiendo sólo la mitad de la mesa!

a) La mesa original tiene longitud L.
b) Eliminar el 1/4 de la mesa con centro en su punto medio. Cada porción restante mide menos de $L/2$.
c) Eliminar 1/8 de la mesa quitando dos trozos de 1/16 de longitud centrados en los puntos medios de los dos fragmentos anteriores. Ya hemos quitado $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ de la mesa. Cada trozo de los que quedan mide menos de $L/4$.
d) Quitar 1/16 de la mesa, suprimiendo fragmentos de longitud 1/64, centrados en sus puntos medios, de cada uno de los cuatro fragmentos que han resultado del paso anterior. Hemos quitado en total hasta ahora $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ de la mesa. Cada trozo de los que han quedado mide menos de $L/8$ de longitud.

¿Hará desaparecer la mesa este proceso, a pesar de que sólo habremos quitado al final la mitad de la mesa? ¿Por qué?



PARA MÁS INFORMACIÓN Véase el artículo «Cantor's Disappearing Table», de Larry E. Knop, en *College Mathematics Journal*, noviembre 1985.

8.3 El criterio integral y las p-series

El criterio integral

En esta sección y en la siguiente, estudiaremos varios criterios de convergencia aplicables a las series de términos positivos.

TEOREMA 8.10 EL CRITERIO INTEGRAL

Si f es positiva, continua y decreciente para $x \geqslant 1$ y $a_n = f(n)$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

convergen o divergen ambas simultáneamente.

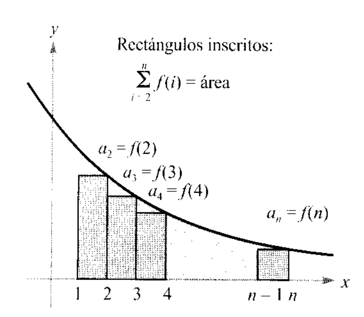


FIGURA 8.8

Demostración: Comenzamos partiendo el intervalo $[1, n]$ en $n - 1$ subintervalos de longitud unidad (Figura 8.8). Las áreas totales de los rectángulos inscritos y de los rectángulos circunscritos son

$$\sum_{i=2}^{n} f(i) = f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \qquad \text{Área inscrita}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \qquad \text{Área circunscrita}$$

El área exacta bajo la gráfica de f entre $x = 1$ y $x = n$ está entre esas dos áreas, luego

$$\sum_{i=2}^{n} f(i) \leqslant \int_1^{n} f(x)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

Denotando la n-ésima suma parcial por $S_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$, podemos escribir esa desigualdad como

$$S_n - f(1) \leqslant \int_1^{n} f(x)\,dx \leqslant S_{n-1}$$

Suponiendo ahora que $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge a L, se sigue que para $n \geqslant 1$

$$S_n - f(1) \leqslant L \quad \Longrightarrow \quad S_n \leqslant L + f(1)$$

En consecuencia, $\{S_n\}$ es monótona y acotada, así que por el Teorema 8.5 converge. Por consiguiente, $\Sigma\, a_n$ converge. Para la otra dirección de la demostración, supongamos que la integral impropia es divergente. Entonces, $\int_1^n f(x)\,dx$ tiende a infinito cuando $n \to \infty$, y la desigualdad $S_{n-1} \geqslant \int_1^n f(x)\,dx$ implica que $\{S_n\}$ diverge. Así pues, $\Sigma\, a_n$ diverge. □

Nota. Recordemos que el carácter convergente o divergente de $\Sigma\, a_n$ no se ve afectado por la supresión de sus N primeros términos. Análogamente, si las condiciones del criterio integral se satisfacen para todo $x \geqslant N > 1$, basta usar la integral $\int_N^\infty f(x)\,dx$ para investigar la convergencia. (El Ejemplo 4 ilustra esta situación.)

EJEMPLO 1 Aplicación del criterio integral

Aplicar el criterio integral a la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

Solución: El integrando $f(x) = x/(x^2+1)$ satisface las condiciones del criterio integral (comprobarlo). El valor de la integral es

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\Big[\ln(x^2+1)\Big]_1^b \\ &= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\,[\ln(b^2+1) - \ln 2] \\ &= \infty\end{aligned}$$

Por tanto, la serie *diverge*. □

EJEMPLO 2 Aplicación del criterio integral

Aplicar el criterio integral a la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

Solución: La función $f(x) = 1/(x^2+1)$ satisface las condiciones del criterio integral, y el valor de la integral es

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\Big[\operatorname{arctg} x\Big]_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\,(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

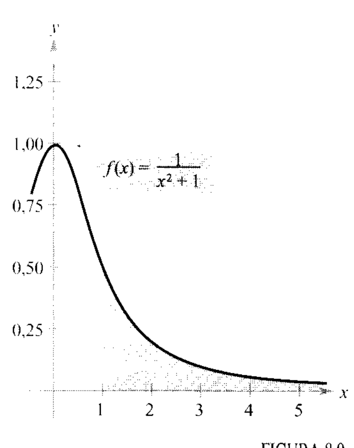


FIGURA 8.9
Como la integral impropia es convergente, la serie es convergente.


Concluimos que la serie *converge* (véase Figura 8.9). □

En el Ejemplo 2, el hecho de que la integral impropia converge a $\pi/4$ no implica que la serie tenga como suma $\pi/4$. Para estimar la suma de la serie podemos usar la desigualdad

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+1} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+1} + \int_N^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

(Véase Ejercicio 32.) Cuanto mayor sea N, mejor aproximación. Así, $N = 200$ da

$$1{,}072 \leqslant \frac{\Sigma 1}{(n^2+1)} \leqslant 1{,}077$$

Las p-series y series armónicas

En el resto de esta sección investigaremos un segundo tipo de series que admite un criterio aritmético de convergencia muy sencillo. Una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots \qquad p\text{-series}$$

es una ***p*-serie**, donde p es una constante positiva. Para $p = 1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \qquad \text{Serie armónica}$$

se conoce como la **serie armónica**. Una serie armónica general es de la forma $\Sigma 1/(an + b)$. En música, cuerdas idénticas en material, diámetro y tensión, cuyas longitudes forman una serie armónica, producen tonos armónicos.

El criterio integral permite estudiar la convergencia o divergencia de las p-series, como muestra el Teorema 8.11.

TEOREMA 8.11 CONVERGENCIA DE *p*-SERIES

La p-serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

1. converge si $p > 1$, y 2. diverge si $0 < p \leqslant 1$

Demostración: Basta recordar el criterio integral y el Teorema 7.5, según el cual

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$

converge si $p > 1$ y diverge si $0 < p \leqslant 1$. □

Nota. La suma de la serie del Ejemplo 3*b* es $\pi^2/6$, como demostró Leonhard Euler (la demostración es difícil y la omitimos). Tenga siempre muy presente que el criterio integral no dice que la suma de la serie coincide con el valor de la integral. Por ejemplo, la suma de la serie del Ejemplo 3*b* es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}645$$

mientras que el valor de la integral impropia asociada es

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

EJEMPLO 3 p-series convergentes y divergentes

a) Del Teorema 8.11 se deduce que la *serie armónica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \qquad p = 1$$

diverge.

b) Del Teorema 8.11 se sigue que la p-serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \qquad p = 2$$

converge. □

EJEMPLO 4 Análisis de la convergencia de una serie

Averiguar si esta serie es convergente o divergente.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

Solución: La serie es similar a la serie armónica divergente. Si sus términos fuesen mayores que los de la armónica, es de esperar que fuera divergente. Sin embargo, como sus términos son menores no estamos seguros de qué sucede. Mediante el criterio integral, con $f(x) = 1/(x \ln x)$, vemos que la serie diverge:

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\,dx &= \int_2^{\infty} \frac{1/x}{\ln x}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \Big[\ln(\ln x)\Big]_2^b \\ &= \lim_{b\to\infty} [\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)] \\ &= \infty\end{aligned}$$

□

Ejercicios de la Sección 8.3

En los Ejercicios 1-10, aplicar el criterio integral para decidir si la serie es convergente o divergente.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1}$

5. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \frac{1}{26} + \cdots$

6. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots$

7. $\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \frac{\ln 5}{5} + \frac{\ln 6}{6} + \cdots$

8. $\frac{1}{4} + \frac{2}{7} + \frac{3}{12} + \cdots + \frac{n}{n^2+3} + \cdots$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{n^k + c}$, k es un entero positivo

10. $\sum_{n=1}^{\infty} n^k e^{-n}$, k es un entero positivo

En los Ejercicios 11 y 12, aplicar el criterio integral para decidir si la p-serie es convergente o divergente.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$

En los Ejercicios 13 y 14, hallar los valores $p > 0$ para los que la serie converge.

13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

14. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

En los Ejercicios 15-22, determinar si la p-serie dada es convergente o no.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$

17. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$

18. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$

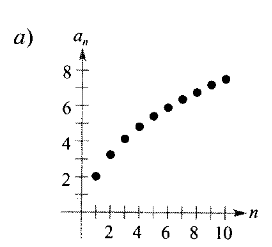
19. $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \cdots$

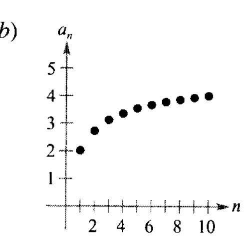
20. $1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{9}} + \frac{1}{\sqrt[3]{16}} + \frac{1}{\sqrt[3]{25}} + \cdots$

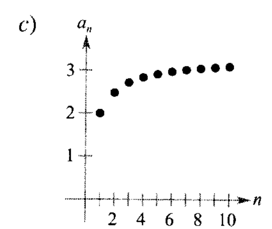
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,04}}$

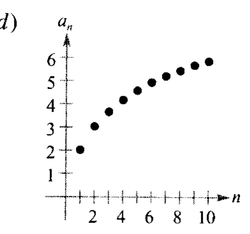
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi}}$

En los Ejercicios 23-26, emparejar cada serie con su gráfica de sumas parciales y discutir su convergencia.

a)


b)


c)


d)


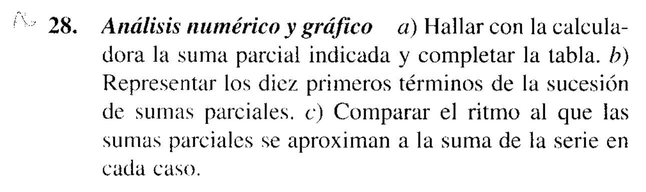
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[4]{n^3}}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sqrt{n}}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$

27. ***Redacción*** En los Ejercicios 23-26, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ para cada una de las series, pero no todas son convergentes. ¿Contradice esto al Teorema 8.9? ¿Por qué cree que algunas convergen y otras no?



28. ***Análisis numérico y gráfico*** *a*) Hallar con la calculadora la suma parcial indicada y completar la tabla. *b*) Representar los diez primeros términos de la sucesión de sumas parciales. *c*) Comparar el ritmo al que las sumas parciales se aproximan a la suma de la serie en cada caso.

n	5	10	20	50	100
S_n					

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{15}{4}$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

29. ***Razonamiento numérico*** Como la serie armónica diverge, dado cualquier $M > 0$ debe existir un entero $N > 0$ tal que la suma parcial

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > M$$

a) Completar la tabla, con ayuda de la calculadora.

M	2	4	6	8
N				

b) Al dar a M incrementos iguales, ¿crece N en incrementos iguales? Explicar la respuesta.

30. La **función zeta de Riemann** para números reales se define para todos los x tales que la serie

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$$

es convergente. Hallar el dominio de esa función.

31. Sea f una función positiva, continua y decreciente en $x \geqslant 1$, tal que $a_n = f(n)$. Demostrar que si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge a S, el resto $R_N = S - S_N$ está acotado por

$$0 \leqslant R_N \leqslant \int_N^{\infty} f(x)\,dx$$

32. Probar que el resultado del Ejercicio 31 se puede expresar así:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{N} a_n + \int_N^{\infty} f(x)\,dx$$

En los Ejercicios 33-38, usar el resultado del Ejercicio 31 para aproximar la suma de la serie convergente, tomando el número de términos que se especifica. Estimar asimismo una cota de error de tal aproximación.

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$
seis términos

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$
cuatro términos

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$
diez términos

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)[\ln(n+1)]^3}$
diez términos

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$
cuatro términos

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$
cuatro términos

En los Ejercicios 39-42, usar el resultado del Ejercicio 31 para determinar un N tal que $R_N \leqslant 0{,}001$ para la serie convergente dada.

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-5n}$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

43. ***Para pensar*** Un compañero le dice que la siguiente serie converge porque sus términos son muy pequeños y tienden hacia 0 rápidamente. ¿Tiene razón? Explicar la respuesta.

$$\frac{1}{10.000} + \frac{1}{10.001} + \frac{1}{10.002} + \cdots$$

44. Se toman diez términos para aproximar una p-serie convergente, de modo que el resto es una función de p, con

$$0 \leqslant R_{10}(p) \leqslant \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx, \qquad p > 1$$

a) Efectuar la integral de la derecha.
b) Representar la desigualdad gráficamente en la calculadora.
c) Identificar las asíntotas de la función error e interpretar su significado.

45. *a*) Probar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.1}}$$

converge y

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

diverge

b) Comparar los cinco primeros términos de cada serie.

c) Hallar un $n > 3$ tal que

$$\frac{1}{n^{1,1}} < \frac{1}{n \ln n}$$

46. ***La constante de Euler*** Sea

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

a) Probar que $\ln(n + 1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln n$.

b) Demostrar que la sucesión $\{a_n\} = \{S_n - \ln n\}$ es acotada.

c) Probar que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente.

d) Probar que a_n converge a un límite γ (llamado constante de Euler).

e) Aproximar γ mediante a_{100}.

47. ***Para pensar*** Hallar una serie divergente cuyo término general tienda a 0.

48. Calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Repaso En los Ejercicios 49-56, averiguar si la serie es convergente o divergente.

49. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n - 1}$

50. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2 - 1}}$

51. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[4]{n}}$

52. $\displaystyle 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0,95}}$

53. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

54. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1,075)^n$

55. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$

56. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)$

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

La serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

es una de las series más importantes aparecidas en este capítulo. A pesar de que su término general tiende a cero cuando n tiende a infinito,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

la serie armónica diverge. En otras palabras, aunque sus términos van siendo más y más pequeños, la suma «se acumula hasta el infinito».

a) Una manera de probar su divergencia, debida a J. Bernoulli, consiste en agrupar los términos así:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32}}_{> \frac{1}{2}} + \cdots$$

Explicar por escrito cómo se puede utilizar ese agrupamiento para demostrar que la serie armónica es divergente.

b) Utilizar la demostración del criterio integral, Teorema 8.10, para probar que

$$\ln(n + 1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \leqslant 1 + \ln n$$

c) Teniendo en cuanta el apartado *b*), averiguar el número M de términos que deben tomarse para que

$$\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} > 50$$

d) Verificar que la suma del primer millón de términos de la serie armónica es menor que 15.

e) Comprobar que son válidas estas desigualdades.

$$\ln \frac{21}{10} \leqslant \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{20} \leqslant \ln \frac{20}{9}$$

$$\ln \frac{201}{100} \leqslant \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \cdots + \frac{1}{200} \leqslant \ln \frac{200}{99}$$

f) Usar el apartado *e*) para calcular el límite

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{n=m}^{2m} \frac{1}{n}$$

8.4 Comparación de series

Criterio de comparación directa

Los criterios de convergencia vistos hasta ahora exigen que los términos de la serie sean muy simples y que la serie tenga características especiales para poderlos aplicar. Una ligera variante hace que ya no sean útiles. Por ejemplo, en los pares que se citan a continuación, la segunda serie no se puede analizar con el mismo criterio de convergencia que la primera, aunque ambas son parecidas.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es geométrica pero $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ no lo es.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ es una p-serie, pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$ no lo es.
3. $a_n = \frac{n}{(n^2+3)^2}$ se integra fácilmente, pero $b_n = \frac{n^2}{(n^2+3)^2}$ no.

En esta sección estudiaremos dos criterios nuevos, válidos para series con términos positivos, que amplían notablemente el espectro de series analizables. Nos van a permitir *comparar* una serie con términos complicados con otra más sencilla cuya convergencia o divergencia conocemos de antemano.

TEOREMA 8.12 CRITERIO DE COMPARACIÓN DIRECTA

Sean $0 < a_n \leqslant b_n$ para todo n.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **converge, entonces** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge.**
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverge, entonces** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **diverge.**

Demostración: Para demostrar la primera propiedad, denotemos $L = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y sea

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Como $0 < a_n \leqslant b_n$, la sucesión $S_1, S_2, S_3, \ldots$ es no decreciente y acotada superiormente por L. En consecuencia, debe ser convergente. De

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

se desprende que $\Sigma\, a_n$ converge. La segunda propiedad es lógicamente equivalente a la primera. □

Nota. Tal como se ha enunciado, el criterio requiere que $0 < a_n \leqslant b_n$ para todo n. Como la convergencia de una serie no depende de unos cuantos primeros términos, puede modificarse el enunciado y exigir solamente que $0 < a_n \leqslant b_n$ para todos los n mayores que un cierto entero N.

EJEMPLO 1 Aplicación del criterio de comparación directa

Analizar la convergencia o divergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 + 3^n}$

Solución: Esta serie se asemeja a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \qquad \text{Serie geométrica convergente}$$

La comparación término a término da

$$a_n = \frac{1}{2 + 3^n} < \frac{1}{3^n} = b_n, \quad n \geqslant 1$$

Luego, por el criterio de comparación directa, la serie es convergente. □

EJEMPLO 2 Aplicación del criterio de comparación directa

Analizar la convergencia o divergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 + \sqrt{n}}$

Solución: Esta serie se asemeja a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} \qquad p\text{-serie divergente}$$

La comparación término a término da

$$\frac{1}{2 + \sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \geqslant 1$$

que *no* satisface las condiciones para concluir divergencia. (Recordemos que si al comparar los términos una serie resulta ser *menor* que una divergente, el criterio de comparación no concluye nada.) Pese a todo, puesto que seguimos pensando que la serie dada es divergente, la comparamos con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{Serie armónica divergente}$$

En este caso, obtenemos por comparación

$$a_n = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2 + \sqrt{n}} = b_n, \quad n \geqslant 4$$

y del criterio de comparación directa deducimos, ahora sí, que la serie diverge. □

Nota. Con el fin de verificar la última desigualdad del Ejemplo 2, intente probar que $2 + \sqrt{n} \leqslant n$ siempre que $n \geqslant 4$.

Conviene hacer notar que las dos partes del criterio de comparación directa exigen que $0 < a_n \leqslant b_n$. En lenguaje coloquial, el criterio dice lo siguiente acerca de un par de series de términos positivos.

1. Si la «mayor» converge, la «menor» converge necesariamente.
2. Si la «menor» diverge, la «mayor» diverge necesariamente.

Criterio de comparación en el límite

Con frecuencia, aunque una serie se parece a una p-serie o a una serie geométrica, uno no es capaz de establecer comparación término a término. En estas circunstancias, puede ser aplicable un segundo criterio de comparación, el llamado **criterio de comparación en el límite** (o de **comparación asintótica**).

TEOREMA 8.13 CRITERIO DE COMPARACIÓN EN EL LÍMITE

Supongamos que $a_n > 0$, $b_n > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L$$

donde L es *finito y positivo*. Entonces las dos series $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

Nota. Del mismo modo que se advirtió para el criterio de comparación directa, el de comparación en el límite puede modificarse exigiendo sólo que a_n y b_n sean positivos para todo n mayor que un cierto entero N.

Demostración: Como $a_n > 0$, $b_n > 0$, y $(a_n/b_n) \to L$ cuando $n \to \infty$, existe un $N > 0$ tal que

$$0 < (a_n/b_n) < (L + 1), \text{ para } n \geqslant N$$

Esto implica que

$$0 < a_n < (L + 1)b_n$$

Por tanto, el criterio de comparación en el límite permite concluir de la convergencia de $\Sigma\, b_n$ la de $\Sigma\, a_n$. Análogamente, usando el hecho de que

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \frac{1}{L}$$

se puede demostrar que la convergencia de $\Sigma\, a_n$ implica la de Σb_n. □

EJEMPLO 3 Aplicación del criterio de comparación en el límite

Probar que la siguiente serie armónica general diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an + b}, \qquad a > 0, b > 0$$

Solución: Por comparación con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{Serie armónica divergente}$$

tenemos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1/(an + b)}{1/n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{an + b} = \frac{1}{a}$$

Puesto que este límite es mayor que 0, concluimos del criterio de comparación en el límite que la serie propuesta es divergente. □

El criterio de comparación en el límite es eficaz para comparar una serie algebraica complicada con una p-serie adecuada. Debe elegirse como p-serie una que tenga el término general de la misma magnitud que el término general de la serie dada.

Serie dada	*Serie para comparar*	*Conclusión*
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - 4n + 5}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$	Ambas series convergen
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n - 2}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$	Ambas series divergen
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 10}{4n^5 + n^3}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$	Ambas series convergen

En otras palabras, al buscar una serie para compararla con la dada, sólo hay que mirar las potencias máximas del término general en el numerador y en el denominador.

EJEMPLO 4 Aplicación del criterio de comparación en el límite

Decidir si es convergente o divergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}$

Solución: Haciendo caso omiso de todas las potencias no dominantes en el numerador y en el denominador, podemos comparar la serie con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \qquad p\text{-serie convergente}$$

Al ser

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}\right)\left(\frac{n^{3/2}}{1}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = 1$$

el criterio de comparación en el límite nos lleva a concluir que la serie propuesta es convergente. □

EJEMPLO 5 Aplicación del criterio de comparación en el límite

Decidir si es convergente o divergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{4n^3+1}$

Solución: Parece razonable compararla con la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$$

que diverge, según el criterio del término general. Al ser

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n2^n}{4n^3+1}\right)\left(\frac{n^2}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4+(1/n^3)} = \frac{1}{4}$$

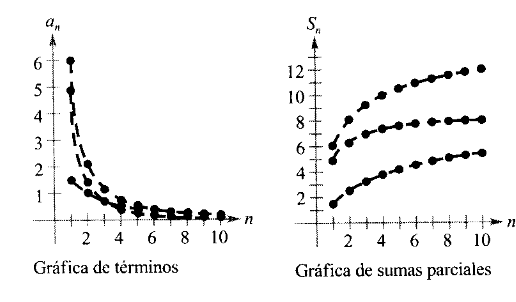
podemos concluir que la serie dada es divergente. □

Ejercicios de la Sección 8.4

1. ***Análisis gráfico*** La figura muestra las gráficas de los diez primeros términos de cada serie y la de sus diez primeras sumas parciales.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^{3/2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^{3/2}+3}, \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\sqrt{n^2+0{,}5}}$$

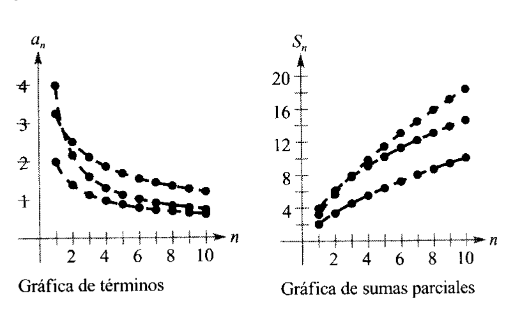
a) Identificar la serie de cada figura.
b) ¿Cuál de ellas es una p-serie? ¿Es convergente o divergente?
c) Para las que no sean p-series, comparar sus términos con los de la p-serie. ¿Qué conclusión se saca sobre la convergencia de esas series?
d) Explicar la relación entre las magnitudes de los términos de las series y las de sus sumas parciales.



2. ***Análisis gráfico*** La figura muestra las gráficas de los diez primeros términos de cada serie y la de sus diez primeras sumas parciales.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}-0{,}5}, \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{n}+0{,}5}$$

a) Identificar la serie de cada figura.
b) ¿Cuál de ellas es una p-serie? ¿Es convergente o divergente?
c) Para las que no sean p-series, comparar sus términos con los de la p-serie. ¿Qué conclusión se saca sobre la convergencia de esas series?
d) Explicar la relación entre las magnitudes de los términos de las series y las de sus sumas parciales.



En los Ejercicios 3-14, usar el criterio de comparación directa para estudiar la convergencia de las series.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+2}$

5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$

6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+5}$

9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n+1}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt[4]{n}-1}$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n-1}$

En los Ejercicios 15-28, usar el criterio de comparación en el límite para estudiar la convergencia de las series.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

16. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$

17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-5}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{3n^5+2n+1}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-3}{n^2-2n+5}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+2)}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2+1)}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^{n-1}}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{n^k+1}, k > 2$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$

En los Ejercicios 29-36, analizar si la serie dada es convergente utilizando cada criterio una sola vez. Identificar el criterio aplicado.

a) Criterio del término general.
b) Criterio de las series geométricas.
c) Criterio de las *p*-series.
d) Criterio de las series telescópicas.
e) Criterio integral.
f) Criterio de comparación directa.
g) Criterio de comparación en el límite.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n}$

30. $\sum_{n=0}^{\infty} 5\left(-\frac{1}{5}\right)^n$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+2}$

32. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{3n^2-2n-15}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+3}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^2}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$

37. Utilizar el criterio de comparación en el límite con la serie armónica para demostrar que la serie $\Sigma\, a_n$ donde $0 < a_n < a_{n-1}$ diverge si $\lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$.

38. Probar que si $P(n)$ y $Q(n)$ son polinomios de grados respectivos j y k, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$$

converge si $j < k - 1$ y diverge si $j \geqslant k - 1$.

En los Ejercicios 39-42, utilizar el criterio polinómico del Ejercicio 38 para averiguar si la serie dada es convergente.

39. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\frac{5}{26}+\cdots$

40. $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\cdots$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

En los Ejercicios 43 y 44, aplicar el criterio de divergencia del Ejercicio 37 para probar que la serie dada es divergente.

43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5n^4+3}$ **44.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

45. Consideremos la serie siguiente y su suma.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

a) Verificar que la serie es convergente.
b) Completar la tabla con ayuda de la calculadora.

n	5	10	20	50	100
S_n					

c) Hallar, a mano, la suma de la serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

Explicar cómo se ha obtenido la suma.
d) Hallar con la calculadora la suma de la serie

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

46. ***Para pensar*** Da la impresión de que los términos de la serie

$$\frac{1}{1.000} + \frac{1}{1.001} + \frac{1}{1.002} + \frac{1}{1.003} + \cdots$$

son más pequeños que los correspondientes de la serie convergente

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Si eso es cierto, la primera serie debe ser convergente. ¿Lo es? ¿Por qué sí o por qué no? Explique por escrito cómo afecta al carácter convergente o divergente de una serie la inclusión o exclusión de un número finito de sus primeros términos.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 47-50, discutir si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

47. Si $0 < a_n \leqslant b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

48. Si $0 < a_{n+10} \leqslant b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

49. Si $a_n + b_n \leqslant c_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, entonces las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen ambas. (Suponemos que los términos de todas estas series son positivos.)

50. Si $a_n \leqslant b_n + c_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces las series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergen ambas. (Suponemos que los términos de todas estas series son positivos.)

51. Probar que si las series de términos no negativos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

son convergentes, entonces también es convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

52. Usando el resultado del Ejercicio 51, probar que si la serie de términos no negativos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge, también es convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

53. Hallar dos series que ilustren el resultado del Ejercicio 51.

54. Hallar dos series que ilustren el resultado del Ejercicio 52.

55. Sean $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ dos series de términos positivos. Demostrar lo siguiente.

a) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ y $\Sigma\, b_n$ converge, entonces $\Sigma\, a_n$ también converge.

b) Si $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ y $\Sigma\, b_n$ diverge, entonces $\Sigma\, a_n$ también diverge.

56. Hallar dos series que ilustren el resultado del Ejercicio 55.

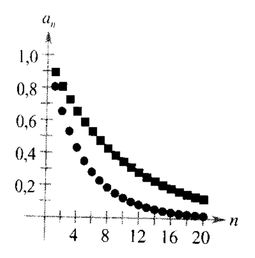
57. ***Para pensar*** La figura muestra los 20 primeros términos de la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

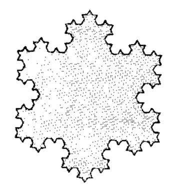
y los 20 primeros de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

Identificar las dos series y explicar cómo se ha tomado la decisión.



58. ***Investigación*** En cada lado de un triángulo equilátero de lado 9 centramos un triángulo equilátero de lado 3. En cada lado de cada uno de éstos centramos un triángulo equilátero de lado 1. Continuar este proceso, de modo que en el siguiente paso centramos en cada lado de los triángulos de lado 1 un triángulo equilátero de lado 1/3, y así sucesivamente. Así se forma el copo de nieve de Koch, citado en la motivación del capítulo. Utilizar series para calcular, si es posible, el área y el perímetro de la figura adjunta.



PROYECTO PARA LA SECCIÓN

La solera La mayoría de los vinos se elaboran con uvas de un mismo año. El jerez, por el contrario, es una complicada mezcla de vinos añejos con vinos nuevos. Esto se lleva a cabo con una secuencia de barriles (la solera) colocados en pisos, unos encima de otros, como se ve en la fotografía adjunta.



El vino más viejo está en la fila inferior de barriles y el siguiente en vejez justo encima de él. Cada año, la mitad del contenido de los barriles del suelo (de ahí la palabra «solera») se embotella como jerez y se rellenan con vino de los barriles de la fila inmediatamente superior. El proceso se completa añadiendo vino nuevo a los barriles de la fila de más arriba. Un modelo matemático para la cantidad de vino de n años que se extrae de la solera, si hay k filas de barriles, es

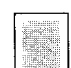
$$f(n, k) = \binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \qquad k \leq n$$

a) Consideremos una solera con 5 filas, numeradas $k = 1, 2, 3, 4$ y 5. En 1980 ($n = 0$) la mitad de cada barril de la fila más alta ($k = 1$) se rellenó con vino nuevo. ¿Qué cantidad de ese vino se extrajo de la solera en 1981? ¿Y en 1982? ¿Y en 1983? ... ¿Y en 1995? ¿En qué año se extrajo la máxima cantidad de él?

b) En el apartado *a)*, sea a_n la cantidad de vino de 1980 extraído de la solera en el año n. Calcular

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

PARA MÁS INFORMACIÓN Véase el artículo «Finding Vintage Concentrations in a Sherry Solera» de Rhodes Peele y John T. MacQueen en 1990 *UMAP Modules*.



8.5 Series alternadas

Series alternadas

Hasta ahora sólo hemos analizado series de términos positivos. En esta sección y en la próxima estudiaremos ya series con términos positivos y negativos. El tipo más sencillo de tales series lo constituyen las llamadas **series alternadas**, cuyos términos alternan en signo. Por ejemplo, la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots$$

es una *serie geométrica alternada* con $r=-\frac{1}{2}$. Las series alternadas pueden tener positivos sus términos pares o sus términos impares.

TEOREMA 8.14 CRITERIO DE SERIES ALTERNADAS

Sea $a_n > 0$. Las series alternadas

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

convergen siempre que se satisfagan estas dos condiciones:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = 0$ 2. $a_{n+1} \leqslant a_n$, para todo n

| Nota. La segunda condición del criterio de series alternadas puede modificarse exigiendo sólo que $0 < a_{n+1} \leqslant a_n$ para todos los n mayores que un cierto entero N.

Demostración: Consideremos la serie alternada $\Sigma(-1)^{n+1}a_n$. Su suma parcial (donde $2n$ es par, claro está)

$$S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+(a_5-a_6)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n})$$

tiene todos sus términos no negativos, luego $\{S_{2n}\}$ es una sucesión no decreciente. Ahora bien, podemos escribir asimismo

$$S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})$$

lo cual implica que $S_{2n}\leqslant a_1$ para todo entero n. Así pues, $\{S_{2n}\}$ es una sucesión acotada, no decreciente que converge a algún valor L. Como $S_{2n-1}-a_{2n}=$ $=S_{2n}$ y $a_{2n}\to 0$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}+\lim_{n\to\infty}a_{2n}$$
$$=L+\lim_{n\to\infty}a_{2n}$$
$$=L$$

Puesto que ambas, S_{2n} y S_{2n-1}, convergen al mismo límite L, se sigue que $\{S_n\}$ converge también a L. En consecuencia, la serie alternada dada es convergente. □

EJEMPLO 1 Aplicación del criterio de series alternadas

Nota. La serie del Ejemplo 1 se llama *serie armónica alternada*. Volveremos a ella en el Ejemplo 6.

Analizar si es convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

Solución: Como

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n}$$

para todo n y el límite (para $n \to \infty$) de $1/n$ es 0, es aplicable el criterio de series alternadas, del que concluimos que la serie dada converge. □

EJEMPLO 2 Aplicación del criterio de series alternadas

Averiguar si es convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^{n-1}}$

Solución: Con el fin de poder aplicar el criterio de series alternadas, observemos que $n \geqslant 1$

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{2^{n-1}}{2^n} \leqslant \frac{n}{n+1}$$

$$(n+1)2^{n-1} \leqslant n2^n$$

$$\frac{n+1}{2^n} \leqslant \frac{n}{2^{n-1}}$$

Por tanto, $a_{n+1} = (n+1)/2^n \leqslant n/2^{n-1} = a_n$ para todo n. Además, la regla de L'Hôpital da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^{x-1}(\ln 2)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 0$$

Por consiguiente, el criterio de series alternadas asegura la convergencia de la serie dada. □

EJEMPLO 3 Casos en que el criterio de series alternadas no decide

Nota. Al hilo del Ejemplo 3*a*, nótese que siempre que una serie alternada no satisfaga la primera condición del criterio de series alternadas, se puede utilizar el criterio del término general para concluir que la serie es divergente.

a) La serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n} = \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \cdots$$

cumple el segundo requisito del criterio de series alternadas, ya que $a_{n+1} \leqslant a_n$ para todo n, pero no el primero. En consecuencia, el criterio no es aplicable. Y, de hecho, esa serie es divergente.

b) La serie alternada

$$\frac{2}{1}-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}+\cdots$$

satisface la primera condición, porque a_n tiende a cero cuando $n \to \infty$, pero no la segunda, de manera que no se le puede aplicar el criterio. Para ver que la serie diverge, podemos argumentar que S_{2N} es igual a la N-ésima suma parcial de la serie armónica divergente. Eso implica que la sucesión de las sumas parciales es divergente y, por tanto, la serie también. □

Resto de una serie alternada

La suma S de una serie alternada convergente se puede aproximar por la suma parcial S_N. El próximo teorema informa sobre el error cometido al tomar S_N como valor aproximado de la suma exacta S.

TEOREMA 8.15 RESTO DE UNA SERIE ALTERNADA

Si una serie alternada convergente satisface la condición $a_{n+1} \leqslant a_n$, el valor absoluto del resto R_N, al aproximar la suma S por S_N, es menor o igual que el primer término desechado. Esto es,

$$|S - S_N| = |R_N| \leqslant a_{N+1}$$

Demostración: La serie obtenida al suprimir los N primeros términos de la serie dada cumple las condiciones del criterio de series alternadas y tiene por suma R_N.

$$\begin{aligned}
R_N = S - S_N &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} a_n \\
&= (-1)^N a_{N+1} + (-1)^{N+1} a_{N+2} + (-1)^{N+2} a_{N+3} + \cdots \\
&= (-1)^N (a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} - \cdots) \\
|R_N| = a_{N+1} - a_{N+2} &+ a_{N+3} - a_{N+4} + a_{N+5} - \cdots \\
&= a_{N+1} - (a_{N+2} - a_{N+3}) - (a_{N+4} - a_{N+5}) - \cdots \leqslant a_{N+1}
\end{aligned}$$

En consecuencia, $|S - S_N| = |R_N| \leqslant a_{N+1}$, con lo queda demostrado el teorema. □

EJEMPLO 4 Cálculo aproximado de la suma de una serie alternada

Aproximar, tomando la suma de sus seis primeros términos, la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \cdots$$

Solución: La serie es convergente, por el criterio de las series alternadas, ya que

$$\frac{1}{(n+1)!} \leqslant \frac{1}{n!} \text{ y } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$$


Más adelante, en la Sección 8.10, estaremos en condiciones de probar que la serie del Ejemplo 4 converge a

$$\frac{e-1}{e} \approx 0{,}63212$$

De momento, utilice la calculadora para estimar la suma de la serie. ¿Cuántos términos son necesarios para lograr un valor aproximado que difiera del exacto en menos de 0,00001?

La suma de sus seis primeros términos es

$$S_6 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} \approx 0{,}63194$$

y, por el resto de las series alternadas, sabemos que

$$|S - S_6| = |R_6| \leqslant a_7 = \frac{1}{5.040} \approx 0{,}0002$$

Por tanto, la suma S está entre 0,63194 – 0,0002 y 0,63194 + 0,0002, y concluimos que

$$0{,}63174 \leqslant S \leqslant 0{,}63214$$ □

Convergencia absoluta y condicional

En general, una serie tiene términos positivos y términos negativos pero no es alternada, como ocurre, por ejemplo, con la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} = \frac{\operatorname{sen} 1}{1} + \frac{\operatorname{sen} 2}{4} + \frac{\operatorname{sen} 3}{9} + \cdots$$

Una forma de obtener información sobre su convergencia consiste en investigar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} \right|$$

Por comparación directa, vemos que $|\operatorname{sen} n| \leqslant 1$ para todo n, luego

$$\left| \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} \right| \leqslant \frac{1}{n^2}, \; n \geqslant 1$$

Así pues, el criterio de comparación directa asegura que la serie $\Sigma\ |(\operatorname{sen} n)/n^2|$ es convergente. Ahora bien, la cuestión sigue siendo ¿converge la serie original? El próximo teorema contesta afirmativamente.

TEOREMA 8.16 CONVERGENCIA ABSOLUTA

Si la serie $\Sigma\ |a_n|$ es convergente, la serie $\Sigma\ a_n$ también es convergente.

Demostración: Como $0 \leqslant a_n + |a_n| \leqslant 2|a_n|$ para todo n, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$$

converge, por comparación con la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$$

Además, puesto que $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$, podemos escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

donde ambas series de la derecha convergen. Por tanto, se sigue que $\Sigma\ a_n$ converge. □

El recíproco del Teorema 8.16 es falso. Por ejemplo, la **serie armónica alternada**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

converge, por el criterio de las series alternadas. Sin embargo, la serie armónica diverge. Este tipo de convergencia se llama **convergencia condicional**.

DEFINICIÓN DE CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONVERGENCIA CONDICIONAL

1. $\Sigma\ a_n$ es **absolutamente convergente** si $\Sigma\ |a_n|$ converge.
2. $\Sigma\ a_n$ es **condicionalmente convergente** si $\Sigma\ a_n$ converge pero $\Sigma\ |a_n|$ diverge.

EJEMPLO 5 Convergencia absoluta y convergencia condicional

Averiguar cuáles de estas series son absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes o divergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{3^n} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \cdots$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln\ (n+1)} = -\frac{1}{\ln\ 2} + \frac{1}{\ln\ 3} - \frac{1}{\ln\ 4} + \frac{1}{\ln\ 5} - \cdots$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\ n!}{2^n} = \frac{0!}{2^0} - \frac{1!}{2^1} + \frac{2!}{2^2} - \frac{3!}{2^3} + \cdots$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = -\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \cdots$

Solución:

a) Esta serie no es alternada, pero como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{3^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

es una serie geométrica convergente, el Teorema 8.16 nos lleva a concluir que la serie dada es *absolutamente* convergente (y por tanto convergente).

b) En este caso, el criterio de las series alternadas garantiza la convergencia de la serie dada. Sin embargo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ln (n+1)} \right| = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \cdots$$

diverge, como se ve por comparación directa con la serie armónica. En consecuencia, la serie dada es *condicionalmente* convergente.

c) Del criterio del término general se deduce que esta serie es divergente.

d) El criterio de las series alternadas demuestra que esta serie es convergente. Por otra parte, la *p*-serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

es divergente, luego la serie dada es *condicionalmente* convergente. □

Reordenación de series

Una suma finita, digamos 1 + 3 − 2 + 5 − 4, se puede reordenar sin que su suma se vea afectada. Por el contrario, eso no es cierto, en general, para las series (sumas infinitas), pues depende de que la serie sea convergente absolutamente, en cuyo caso toda reordenación tiene la misma suma, o condicionalmente.

EJEMPLO 6 Reordenación de una serie

PARA MÁS INFORMACIÓN Georg Friedrich Riemann (1826-1866) demostró que si $\Sigma\, a_n$ es condicionalmente convergente y S es cualquier número real, se puede efectuar una reordenación en esa serie, de manera tal que la nueva serie sea convergente con suma S. Para más detalles, véase el artículo «Riemann's Rearrangement Theorem» de Stewart Galanor en *Mathematics Teacher*, noviembre 1987.

La serie armónica alternada es convergente con suma ln 2. Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$$

(Véase Ejercicio 43 de la Sección 8.10.) Reordenar la serie para producir una suma diferente.

Solución: Consideremos esta reordenación

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \cdots$$

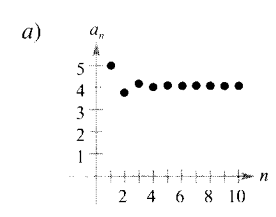
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \cdots$$

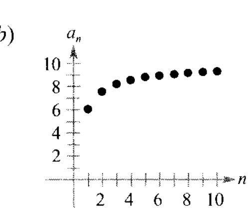
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots\right) = \frac{1}{2}(\ln 2)$$

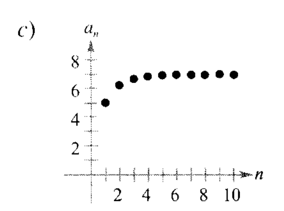
Reordenando la serie original, hemos obtenido una serie cuya suma es la mitad de la inicial. □

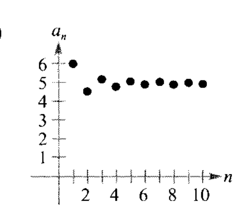
Ejercicios de la Sección 8.5

En los Ejercicios 1-4, asignar a cada serie la gráfica que muestra su sucesión de sumas parciales.

a)


b)


c)


d)


1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, 6}{n^2}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n2^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, 10}{n2^n}$

Análisis numérico y gráfico En los Ejercicios 5-8, *a*) Utilizar la calculadora para hallar la suma parcial S_n indicada y completar la tabla. *b*) Representar en ella las diez primeras sumas parciales y una recta horizontal cuya ordenada sea la suma. *c*) ¿Qué comportamiento tienen esos puntos respecto de la recta horizontal? La distancia de los puntos a la recta ¿crece o decrece? *d*) Discutir la relación entre las respuestas a *c*) y lo dicho acerca del resto de las series alternadas en el Teorema 8.15.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_n										

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{e}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} = \operatorname{sen} 1$

En los Ejercicios 9-28, averiguar si la serie dada es convergente o divergente.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2n-1}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

12. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\ln n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}\, n^2}{n^2+1}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n}{n^2+1}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n^3}{n^3+6}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,(n+1)}{\ln(n+1)}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln(n+1)}{n+1}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi}{2}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi}{2}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\pi$

23. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n!}$

24. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n)!}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{n+2}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{e^n - e^{-n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{cosech} n$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{e^n + e^{-n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{sech} n$

En los Ejercicios 29-34, *a*) determinar, usando el Teorema 8.15, cuántos términos hay que considerar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,001, y *b*) usar la calculadora para aproximar la suma de la serie con error menor que 0,0001.

29. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n!} = \frac{1}{e}$

30. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2^n\, n!} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

31. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!} = \operatorname{sen} 1$

32. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n)!} = \cos 1$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n4^n} = \ln \frac{5}{4}$

En los Ejercicios 35 y 36, determinar, por el Teorema 8.15, cuántos términos hay que considerar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0.001.

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^3-1}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$

En los Ejercicios 37-52, investigar si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n^2}{(n+1)^2}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,(2n+3)}{n+10}$

43. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\ln n}$

44. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2}$

45. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n}\, n}{n^3-1}$

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{1,5}}$

47. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}$

48. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt[3]{n+1}}$

49. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n+1}$

50. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{arctg} n$

51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2}$

52. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}[(2n-1)]\pi/2}{n}$

53. Probar que la p-serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n^p}\right)$$

converge si $p > 0$.

54. Demostrar que si $\Sigma\, |a_n|$ converge, entonces $\Sigma\, a_n^2$ converge. ¿Es cierto el recíproco? Si no lo es, dar un ejemplo que muestre su falsedad.

55. Usando el resultado del Ejercicio 53, dar un ejemplo de p-serie alternada convergente cuya correspondiente p-serie sea divergente.

56. Ilustrar con un ejemplo la afirmación del Ejercicio 54.

57. Hallar todos los valores de x para los que la serie $\Sigma\, (x^n/n)$ converge *a*) absolutamente, *b*) condicionalmente.

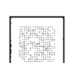
58. La siguiente demostración de que $0 = 1$ es *incorrecta*. Detectar el fallo del argumento.

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\ &= (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \\ &= 1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + \cdots \\ &= 1 \end{aligned}$$

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 59 y 60, discutir si el enunciado es cierto o falso. Si es falso, explicar por qué.

59. Si $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma(-a_n)$ convergen, entonces $\Sigma\, |a_n|$ converge.

60. Si $\Sigma\, a_n$ no converge, entonces $\Sigma\, |a_n|$ no converge.



8.6 El criterio del cociente y el criterio de la raíz

CONTENIDO ▪
El criterio del cociente ▪
El criterio de la raíz ▪
Estrategias para analizar la convergencia de series ▪

El criterio del cociente

Esta sección se inicia con un criterio de convergencia absoluta, el criterio del cociente.

TEOREMA 8.17 CRITERIO DEL COCIENTE

Sea $\Sigma\, a_n$ una serie con términos no nulos.

1. **$\Sigma\, a_n$ es convergente absolutamente si** $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$.

2. **$\Sigma\, a_n$ es divergente si** $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ **o si** $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$.

3. **El criterio del cociente no es concluyente si** $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$.

EXPLORACIÓN

Cocientes sucesivos Una de las siguientes condiciones garantizan la divergencia de la serie, dos de ellas aseguran la convergencia y una no permite concluir nada. ¿Cuál es cuál? Explicar el argumento utilizado para decidir.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2$

Demostración: Para demostrar la propiedad 1, supongamos que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r < 1$$

y tomemos un R tal que $0 \leqslant r < R < 1$. Por definición de límite de una sucesión, existe algún $N > 0$ tal que $|a_{n+1}/a_n| < R$ para todo $n > N$. Por tanto,

$$|a_{N+1}| < |a_N|R$$
$$|a_{N+2}| < |a_{N+1}|R < |a_N|R^2$$
$$|a_{N+3}| < |a_{N+2}|R < |a_{N+1}|R^2 < |a_N|R^3$$

La serie geométrica $\Sigma\, |a_N|R^n = |a_N|R + |a_N|R^2 + \cdots + |a_N|R^n + \cdots$ es convergente, luego, por el criterio de comparación directa, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{N+n}| = |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots + |a_{N+n}| + \cdots$$

también lo es. En consecuencia, la serie $\Sigma\, |a_N|$ converge, ya que la supresión de un número finito de términos ($n = N - 1$) no afecta a la convergencia. Por tanto, del Teorema 8.16 se deduce que la serie $\Sigma\, a_n$ converge absolutamente. La demostración de la propiedad 2 es análoga y se deja como ejercicio (Ejercicio 68). □

Nota. El hecho de que el criterio del cociente no pueda concluir nada cuando $|a_{n+1}/a_n| \to 1$ queda confirmado al comparar las series $\Sigma\,(1/n)$ y $\Sigma\,(1/n^2)$, divergente la primera y convergente la segunda, que cumplen ambas la condición

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$$

Si bien el criterio del cociente no es la panacea universal en cuanto a convergencia de series, es particularmente útil para aquellas series que *convergen rápidamente*. Muchas de las series que contienen factoriales o exponenciales son de este tipo.

EJEMPLO 1 Aplicación del criterio del cociente

Discutir si es convergente la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

Solución: De $a_n = 2^n/n!$, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \div \frac{2^n}{n!}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}$$
$$= 0$$

Por tanto, la serie es convergente. □

ADVERTENCIA Al aplicar al criterio del cociente suele ser necesario simplificar cocientes o factoriales. Así, en el Ejemplo 1 nótese que

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}$$

EJEMPLO 2 Aplicación del criterio del cociente

Averiguar si son convergentes o divergentes las series

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 2^{n+1}}{3^n} \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

Solución:

$a)$ Esta serie converge, ya que el límite de $|a_{n+1}/a_n|$ es menor que 1

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left[(n+1)^2\left(\frac{2^{n+2}}{3^{n+1}}\right)\left(\frac{3^n}{n^2 2^{n+1}}\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)^2}{3n^2} \\ &= \frac{2}{3} < 1 \end{aligned}$$

$b)$ Esta serie diverge, porque el límite de $|a_{n+1}/a_n|$ es mayor que 1

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{n!}{n^n}\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)}\left(\frac{1}{n^n}\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= e > 1 \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 3 Un caso en que el criterio del cociente no decide

Estudiar si es convergente o no la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

Solución: El límite de $|a_{n+1}/a_n|$ es igual a 1

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right)\left(\frac{n+1}{\sqrt{n}}\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right] \\ &= \sqrt{1}(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Así pues, el criterio del cociente no es capaz de concluir nada. Para saber si la serie es convergente, es preciso recurrir a otro criterio. En este caso, al criterio de las series alternadas. Con el fin de probar que $a_{n+1} \leqslant a_n$, denotemos

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$$

Entonces, la derivada es

$$f'(x) = \frac{-x + 1}{2\sqrt{x}(x + 1)^2}$$

Como la derivada es negativa en $x > 1$, sabemos que f es decreciente. Asimismo, por la regla de L'Hôpital,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{x + 1} &= \lim_{x \to \infty} \frac{1/(2\sqrt{x})}{1} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el criterio de las series alternadas asegura que la serie dada es convergente. □

La serie del Ejemplo 3 es *condicionalmente convergente*, ya que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

diverge (por comparación directa con $\Sigma\ 1/\sqrt{n}$), pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Una calculadora confirma que la serie del Ejemplo 3 es *condicionalmente* convergente. Sumando los 100 primeros términos de la serie se obtiene una suma aproximada de −0,2. (La suma de los 100 primeros términos de la serie $\Sigma\ |a_n|$ es aproximadamente 17.)

El criterio de la raíz

El criterio que vamos a presentar a continuación es especialmente adecuado para analizar la convergencia o divergencia de series que contienen potencias n-ésimas. Su demostración es análoga a la del criterio del cociente y se deja como ejercicio (véase Ejercicio 69).

TEOREMA 8.18 EL CRITERIO DE LA RAÍZ

Sea $\Sigma\, a_n$ una serie de términos no nulos.

1. $\Sigma\, a_n$ es absolutamente convergente si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$.
2. $\Sigma\, a_n$ es divergente si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ o $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$.
3. El criterio de la raíz no concluye nada cuando $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

EJEMPLO 4 Aplicación del criterio de la raíz

Averiguar si es convergente la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n}$

Solución: Podemos aplicar el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{2n}}{n^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n/n}}{n^{n/n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^2}{n}$$

$$= 0 < 1$$

Puesto que este límite es menor que 1, se sigue que la serie es absolutamente convergente (y convergente, por tanto). □

PARA MÁS INFORMACIÓN
Sobre las ventajas del criterio de la raíz, véase el artículo «N! and the Root Test» de Charles C. Mumma II en *The American Mathematical Monthly*, septiembre 1986.

Para apreciar la ventaja del criterio de la raíz en el estudio de la serie del Ejemplo 4, intentemos aplicarle el criterio del cociente, que exige hallar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{e^{2(n+1)}}{(n+1)^{n+1}} \div \frac{e^{2n}}{n^n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^2 \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 0$$

mucho más difícil de evaluar que el límite asociado al criterio de la raíz en el Ejemplo 4.

Estrategias para analizar la convergencia de series

Ya disponemos de diez criterios de convergencia (véase el resumen en la tabla de la página siguiente). La elección del más adecuado sólo se aprende a base de práctica. Los consejos que siguen ayudan a dar con la opción apropiada.

Estrategia para analizar la convergencia de series

1. ¿Tiende a cero el término general? Si no tiende a cero, la serie diverge.
2. La serie ¿es de algún tipo especial: geométrica, p-serie, telescópica o alternada?
3. ¿Puede aplicarse el criterio integral, el del cociente o el de la raíz?
4. ¿Puede compararse fácilmente con alguna serie de los tipos especiales?

En ocasiones, claro está, es posible aplicar más de un criterio. Sin embargo, el arte está en aprender a elegir el más eficaz.

EJEMPLO 5 Aplicación de la estrategia para investigar series

Averiguar si son convergentes las series

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n+1}$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{6}\right)^n$ *c*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ *d*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{4n+1}$ *f*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$ *g*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$

Solución:

a) El límite de su término n-ésimo no es 0 ($a_n \to \frac{1}{3}$ cuando $n \to \infty$), así que, por el criterio del término general, la serie diverge.

b) Esta serie es geométrica y de razón menor que 1 ($r = \pi/6$), luego es convergente.

c) Como la función $f(x) = xe^{-x^2}$ se integra fácilmente, podemos aplicar el criterio integral para concluir que la serie es convergente.

d) El n-ésimo término de esta serie se puede comparar con el de la serie armónica. Usando el criterio de comparación en el límite deducimos que la serie dada es divergente.

e) Es una serie alternada cuyo término general tiende a 0 y además cumple $a_{n+1} \leqslant a_n$, de manera que, según el criterio de series alternadas, la serie converge.

f) El término general de esta serie contiene un factorial, lo que sugiere la conveniencia del criterio del cociente. En efecto, ese criterio lleva a concluir que la serie es divergente.

g) El n-ésimo término de esta serie contiene una potencia n-ésima, de modo que parece conveniente usar el criterio de la raíz. De hecho, es fácil deducir de él que la serie en cuestión es convergente. □

Resumen de criterios para investigar la convergencia de series

Criterio	**Serie**	**Converge**	**Diverge**	**Comentario**
Término n-ésimo	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$		$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$	Este criterio no sirve para demostrar la convergencia
Series geométricas	$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$	$\|r\| < 1$	$\|r\| \geqslant 1$	Suma: $S = \dfrac{a}{1-r}$
Series telescópicas	$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$	$\lim_{n\to\infty} b_n = L$		Suma: $S = b_1 - L$
p-series	$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$	$p > 1$	$p \leqslant 1$	
Series alternadas	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$	$0 < a_{n+1} \leqslant a_n$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$		Resto $\|R_N\| \leqslant a_{N+1}$
Integral (f continua, positiva y decreciente)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = f(n) \geqslant 0$	$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge	$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge	Resto: $0 < R_N < \int_N^{\infty} f(x)\,dx$
Raíz	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} < 1$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} > 1$	El criterio no concluye nada si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = 1$
Cociente	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \left\|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\| < 1$	$\lim_{n\to\infty} \left\|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\| > 1$	El criterio no concluye nada si $\lim_{n\to\infty} \left\|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\| = 1$
Comparación directa ($a_n, b_n > 0$)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$0 < a_n \leqslant b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge	$0 < b_n \leqslant a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge	
Comparación en el límite (o asintótica) ($a_n, b_n > 0$)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge	$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge	

Ejercicios de la Sección 8.6

En los Ejercicios 1-4, verificar la fórmula.

1. $\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!} = (n+1)(n)(n-1)$

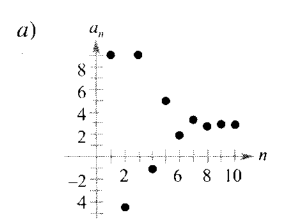
2. $\dfrac{(2k-2)!}{(2k)!} = \dfrac{1}{(2k)(2k-1)}$

3. $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) = \dfrac{(2k)!}{2^k k!}$

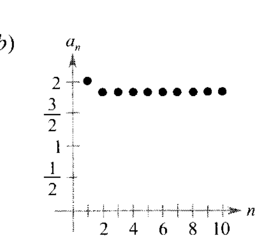
4. $\dfrac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-5)} = \dfrac{2^k k!(2k-3)(2k-1)}{(2k)!}, \quad k \geqslant 3$

En los Ejercicios 5-8, asociar cada serie con la gráfica de su sucesión de sumas parciales.

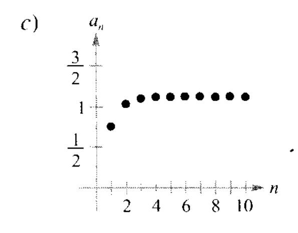
a)



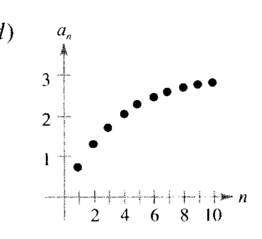
b)



c)



d)



5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^n$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n\left(\frac{1}{n!}\right)$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{n!}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,4}{(2n)!}$

Investigación numérica, gráfica y analítica En los Ejercicios 9 y 10, *a*) comprobar que la serie converge, *b*) completar la tabla, hallando en la calculadora la suma parcial S_n, *c*) representar en la calculadora las diez primeras sumas parciales, *d*) usar esa tabla para estimar la suma de la serie, y *e*) explicar la relación entre la magnitud de los términos de la serie y el ritmo de acercamiento de la sucesión de sumas parciales a la suma de la serie.

n	5	10	15	20	25
S_n					

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\frac{5}{8}\right)^n$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!}$

En los Ejercicios 11-30, usar el criterio del cociente para investigar la convergencia de la serie.

11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$

13. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{2}\right)^n$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{n(n+1)}$

19. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(3/2)^n}{n^2}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n3^n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^5}$

23. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

25. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)^n}$

26. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3n)!}$

27. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n+1}$

28. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{4n}}{(2n+1)!}$

29. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$

En los Ejercicios 31 y 32, verificar que el criterio del cociente no concluye nada para la p-serie dada.

31. *a*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$

32. *a*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

En los Ejercicios 33-40, estudiar la convergencia de la serie mediante el criterio de la raíz.

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$

35. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^n}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2n}{3n+1}\right)^{3n}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} (2\sqrt[n]{n}+1)^n$

38. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$

39. $\frac{1}{(\ln 3)^3} + \frac{1}{(\ln 4)^4} + \frac{1}{(\ln 5)^5} + \frac{1}{(\ln 6)^6} + \cdots$

40. $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \frac{6}{3^5} + \cdots$

En los Ejercicios 41-58, determinar si la serie es convergente o divergente recurriendo al criterio más adecuado. Identificar el criterio utilizado.

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,5}{n}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n\sqrt{n}}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+1}$

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2+1}$

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,3^{n-2}}{2^n}$

48. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{3\sqrt{n^3}}$

49. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+3}{n2^n}$

50. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4n^2-1}$

51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{2^n}$

52. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n7^n}{n!}$

54. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

55. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n-1}}{n!}$

56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n2^n}$

57. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$

58. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{18^n(2n-1)n!}$

En los Ejercicios 59-62, identificar las dos series que son idénticas.

59. *a*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{n!}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n5^n}{n!}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)5^{n+1}}{(n+1)!}$

60. *a*) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

61. *a*) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!}$

62. *a*) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)2^{n-1}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)2^n}$

En los Ejercicios 63 y 64, escribir una serie equivalente con el índice de suma empezando en $n = 0$.

63. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$

64. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(n-2)!}$

En los Ejercicios 65 y 66, *a*) determinar cuántos términos hay que sumar para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0,0001, y *b*) aproximar con la calculadora la suma de esa serie con error menor que 0,0001.

65. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{2^k k!}$

66. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}$

67. ***Redacción*** Alguien le dice que los términos (positivos todos ellos) de una serie parecen tender muy deprisa a cero y que, en particular, $a_7 = 0{,}0001$. Sin más información, ¿implica eso que la serie converge? Confirme su conclusión con ejemplos.

68. Demostrar la propiedad 2 del Teorema 8.17.

69. Demostrar el Teorema 8.18. (Ayuda para la propiedad 1: Si el límite es $r < 1$, tomar un número real R tal que $r < R < 1$. Por definición de límite, existe algún $N > 0$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < R$ para $n > N$).

70. ***Redacción*** Lea el artículo «A Differentiation Test for Absolute Convergence» de Yaser S. Abu-Mostafa en *Mathematics Magazine*, septiembre 1984. Redacte unas líneas explicando el criterio. Apoye la respuesta con ejemplos, tanto de series convergentes como de series divergentes.

8.7 Aproximación por polinomios de Taylor

CONTENIDO ▪
Aproximaciones polinómicas de funciones elementales ▪
Polinomios de Taylor y de Maclaurin ▪
Resto de un polinomio de Taylor ▪

Aproximaciones polinómicas de funciones elementales

El objetivo de esta sección es enseñar a usar las funciones polinómicas como aproximaciones de otras funciones elementales. Para hallar una función polinómica P que aproxime a otra función f, empezamos eligiendo un número c en el dominio de f en el que P tomará el mismo valor, es decir

$$P(c) = f(c) \qquad \text{Las gráficas de } f \text{ y } P \text{ pasan por } (c, f(c))$$

Se dirá que la aproximación polinómica está **centrada en** c. Geométricamente, exigir $P(c) = f(c)$ significa obligar a la gráfica de P a que pase por $(c, f(c))$. Ni que decir tiene que hay muchos polinomios que satisfacen esa condición. Nuestro empeño consiste en encontrar uno cuya gráfica sea parecida a la de f en las proximidades de ese punto. Una forma de lograrlo consiste en imponer la condición adicional de que la pendiente de la función polinómica sea la misma que la de f en el punto $(c, f(c))$.

$$P'(c) = f'(c) \qquad \text{Las gráficas de } f \text{ y de } P \text{ tienen la misma pendiente en } (c, f(c))$$

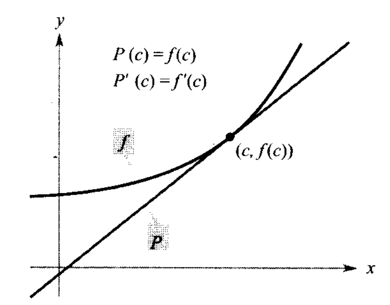


FIGURA 8.10
Cerca de $(c, f(c))$, la gráfica de P sirve como aproximación de la gráfica de f.

Con esos dos requisitos obtenemos una aproximación lineal simple de f, como muestra la Figura 8.10.

EJEMPLO 1 Aproximación de $f(x) = e^x$ por un polinomio de grado uno

Dada la función $f(x) = e^x$, hallar un polinomio de grado uno

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

cuyo valor y cuya pendiente en $x = 0$ coincidan con los de f.

Solución: Como $f(x) = e^x$ y $f'(x) = e^x$, los valores de f y de su pendiente en $x = 0$ son

$$f(0) = e^0 = 1$$

y

$$f'(0) = e^0 = 1$$

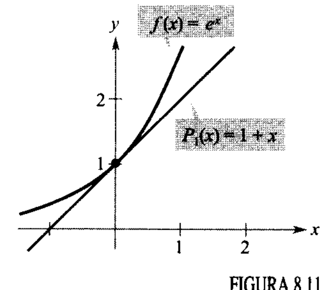


FIGURA 8.11
P_1 es la aproximación polinómica de grado 1 para $f(x) = e^x$.

Puesto que $P_1(x) = a_0 + a_1 x$, podemos usar la condición $P_1(0) = f(0)$ para concluir que $a_0 = 1$. Además, como $P_1'(x) = a_1$, de la condición $P_1'(0) = f'(0)$ se deduce $a_1 = 1$. Por tanto,

$$P_1(x) = 1 + x$$

La Figura 8.11 muestra las gráficas de $P_1(x) = 1 + x$ y $f(x) = e^x$. □

| Nota. No es en el Ejemplo 1 la primera vez que empleamos una función lineal para aproximar otras funciones. El mismo procedimiento se utilizó ya como base del método de Newton en la Sección 3.8.

En la Figura 8.11 vemos que en los puntos cercanos al (0, 1) la gráfica de

$$P_1(x) = 1 + x \qquad \text{Aproximación de grado 1}$$

es razonablemente parecida a la de $f(x) = e^x$. Sin embargo, al alejarnos de (0, 1) las gráficas se separan y el parecido se va perdiendo. Con el fin de mejorar la aproximación, podemos imponer otra condición, a saber, que los valores de las segundas derivadas de f y de P sean iguales en $x = 0$. El polinomio P_2 de segundo grado que satisface los tres requisitos, $P_2(0) = f(0)$, $P_2'(0) = f'(0)$, y $P_2''(0) = f''(0)$ puede demostrarse que es

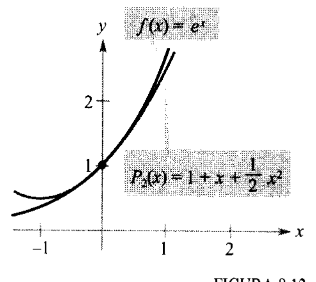
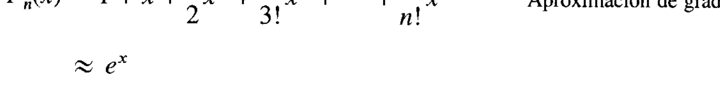


FIGURA 8.12
P_2 es la aproximación polinómica de grado 2 para $f(x) = e^x$.

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{Aproximación de grado 2}$$

Además, en la Figura 8.12 se advierte que P_2 es mejor aproximación de f que P_1. Si continuamos este proceso, exigiendo que los valores de un polinomio $P_n(x)$, de grado n, y de sus n primeras derivadas coincidan con los de $f(x) = e^x$ en $x = 0$, se obtiene finalmente el polinomio



$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \qquad \text{Aproximación de grado } n$$

$$\approx e^x$$

EJEMPLO 2 Aproximación de $f(x) = e^x$ por un polinomio de grado tres

Construir una tabla comparando los valores del polinomio

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \qquad \text{Aproximación de grado 3}$$

con los de $f(x) = e^x$ para varios valores de x cercanos al 0.

Solución: Con ayuda de la calculadora es fácil completar la tabla adjunta. Nótese que para $x = 0$ las dos funciones tienen el mismo valor, pero al alejarse x del valor 0, la precisión de la aproximación disminuye.

x	−1,0	−0,2	−0,1	0,0	0,1	0,2	1,0
e^x	0,3679	0,81873	0,904837	1	1,105171	1,22140	2,7183
$P_3(x)$	0,3333	0,81867	0,904833	1	1,105167	1,22133	2,6667

□

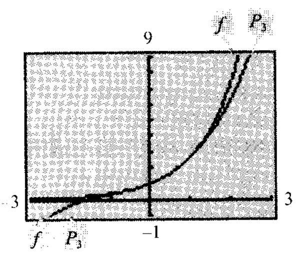


FIGURA 8.13
P_3 es la aproximación polinómica de grado 3 para $f(x) = e^x$.



Las gráficas del polinomio aproximante y de la función se pueden comparar en la calculadora. Así, la Figura 8.13 muestra la gráfica de

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \qquad \text{Aproximación de grado 3}$$

y la de $f(x) = e^x$. Compare en una calculadora las gráficas de

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \qquad \text{Aproximación de grado 4}$$

$$P_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 \qquad \text{Aproximación de grado 5}$$

$$P_6(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 \qquad \text{Aproximación de grado 6}$$

con la gráfica de f. ¿Qué conclusión parece sacarse?



BROOK TAYLOR (1685-1731)

Aunque Taylor no fue el primero en buscar aproximaciones polinómicas de funciones trascendentes, su puesta a punto, publicada en 1715, constituyó una de las primeras obras fundamentales sobre este problema.

Polinomios de Taylor y de Maclaurin

La aproximación polinómica del Ejemplo 2 estaba centrada en $c = 0$. Cuando se desea construir aproximaciones centradas en algún otro valor de c, conviene escribir los polinomios de esta forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + a_3(x - c)^3 + \cdots + a_n(x - c)^n$$

Así, las sucesivas derivadas dan como resultado

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - c) + 3a_3(x - c)^2 + \cdots + na_n(x - c)^{n-1}$$

$$P_n''(x) = 2a_2 + 2(3a_3)(x - c) + \cdots + n(n - 1)a_n(x - c)^{n-2}$$

$$P_n'''(x) = 2(3a_3) + \cdots + n(n - 1)(n - 2)a_n(x - c)^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$P_n^{(n)}(x) = n(n - 1)(n - 2) \cdots (2)(1)a_n$$

Haciendo $x = c$, obtenemos

$$P_n(c) = a_0, \quad P_n'(c) = a_1, P_n''(c) = 2a_2, \cdots, P_n^{(n)}(c) = n!a_n$$

y como el valor de f y de sus n primeras derivadas deben coincidir con los de P_n y sus derivadas en $x = c$, se sigue que

$$f(c) = a_0, f'(c) = a_1, \frac{f''(c)}{2!} = a_2, \cdots, \frac{f^{(n)}(c)}{n!} = a_n$$

Con estos coeficientes llegamos a la siguiente definición de los **polinomios de Taylor**, así llamados en honor del matemático inglés Brook Taylor, y de los **polinomios de Maclaurin**, que llevan el nombre de otro matemático inglés, Colin Maclaurin (1698-1746).

DEFINICIÓN DE LOS POLINOMIOS DE TAYLOR Y DE MACLAURIN

Si f tiene n derivadas en c, el polinomio

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

se llama el **polinomio de Taylor de grado** n de f en c. Si $c = 0$, entonces

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

se llama el **polinomio de Maclaurin de grado** n de f.

EJEMPLO 3 Un polinomio de Maclaurin para $f(x) = e^x$

Por lo visto en la página 677, el polinomio de Maclaurin de grado n para $f(x) = e^x$ es

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$ □

EJEMPLO 4 Aproximaciones por polinomios de Taylor para ln x

Hallar polinomios P_0, P_1, P_2, P_3, y P_4 para $f(x) = \ln x$ centrados en $c = 1$.

Solución: Desarrollando respecto de $c = 1$ obtenemos

$$f(x) = \ln x \qquad f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(1) = -1$$

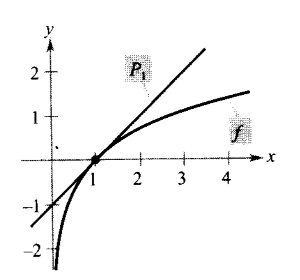
$$f'''(x) = \frac{2!}{x^3} \qquad f'''(1) = 2$$

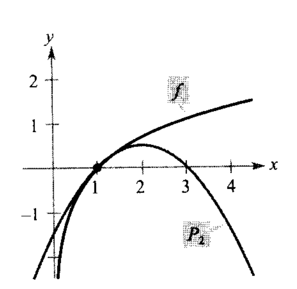
$$f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{x^4} \qquad f^{(4)}(1) = -6$$

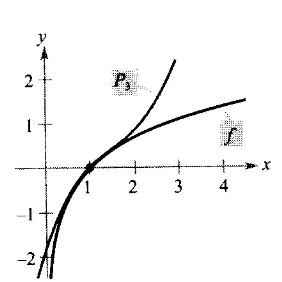
Por consiguiente, los polinomios de Taylor son

$$P_0(x) = f(1) = 0$$
$$P_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = (x-1)$$
$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$
$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$$
$$P_3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$
$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$$
$$P_4(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 +$$
$$+ \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$$
$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$$

La Figura 8.14 compara las gráficas de P_1, P_2, P_3, y P_4 con las de $f(x) = \ln x$. Obsérvese que cerca de $x = 1$ las gráficas son casi indistinguibles. Por ejemplo, $P_4(0{,}9) \approx -0{,}105358$ y $\ln(0{,}9) \approx -0{,}105361$







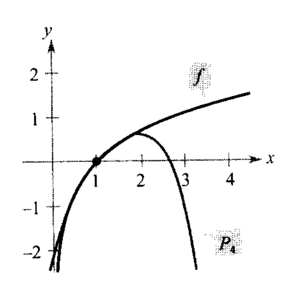


FIGURA 8.14
Al crecer n, la gráfica de P_n va siendo cada vez mejor aproximación de la gráfica de $f(x) = \ln x$ cerca de $x = 1$.

□

EJEMPLO 5 Polinomios de Maclaurin para cos x

Hallar los polinomios de Maclaurin P_0, P_2, P_4 y P_6 $f(x) = \cos x$. Usar $P_6(x)$ para aproximar el valor de cos (0,1).

Solución: Desarrollando en $c = 0$ se obtiene

$f(x) = \cos x$	$f(0) = 1$
$f'(x) = -\operatorname{sen} x$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos x$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = \operatorname{sen} x$	$f'''(0) = 0$

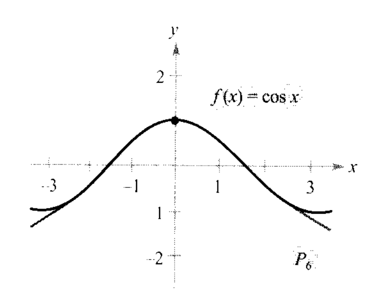


FIGURA 8.15
Cerca de (0, 1), la gráfica de P_6 sirve como aproximación de la gráfica de $f(x) = \cos x$.

Continuando las derivaciones se ve que el esquema 1, 0, −1, 0 se repite, así que los polinomios de Maclaurin son

$$P_0(x) = 1$$

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2$$

$$P_4(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$$

$$P_6(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6$$

Con $P_6(x)$ se obtiene la aproximación $\cos(0{,}1) \approx 0{,}995004165$, que coincide con el valor dado por una calculadora en nueve cifras decimales. La Figura 8.15 compara las gráficas de $f(x) = \cos x$ y de P_6. □

En el Ejemplo 5, los polinomios de Maclaurin de cos x sólo tienen potencias pares de x. Análogamente, los de sen x tienen sólo potencias impares de x (véase Ejercicio 11). No ocurre lo mismo para los polinomios de Taylor centrados en $c \neq 0$, como se verá en el próximo ejemplo.

EJEMPLO 6 Un polinomio de Taylor para sen x

Calcular el polinomio de Taylor de grado tres para $f(x) = \operatorname{sen} x$, centrado en $c = \pi/6$.

Solución: Desarrollando en $c = \pi/6$ se obtiene

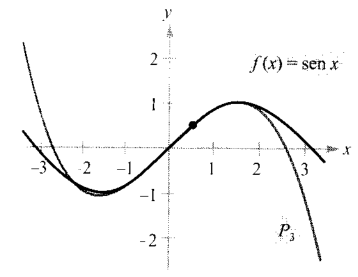


FIGURA 8.16
Cerca de $(\pi/6, 1/2)$, la gráfica de P_3 sirve como aproximación de la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Así pues, el polinomio de Taylor de grado 3 para $f(x) = \operatorname{sen} x$, centrado en $c = \pi/6$ es

$$P_3(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2(2!)}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2(3!)}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3$$

La Figura 8.16 compara su gráfica con la de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y P_3. □

Los polinomios de Taylor y Maclaurin se pueden utilizar para calcular valores aproximados de una función en un punto. Por ejemplo, para aproximar el

valor de ln (1,1), podemos usar polinomios de Taylor de $f(x) = \ln x$, centrados en $c = 1$, como ilustra el Ejemplo 4, o también polinomios de Maclaurin, como se hace en el Ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Aproximación por polinomios de Maclaurin

Aproximar el valor de ln (1,1) utilizando el polinomio de Maclaurin de grado 4.

Solución: Como 1,1 está más cerca de 1 que de 0, es conveniente utilizar polinomios de Maclaurin de la función $g(x) = \ln(1 + x)$.

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(1+x) & g(0) &= 0 \\ g'(x) &= (1+x)^{-1} & g'(0) &= 1 \\ g''(x) &= -(1+x)^{-2} & g''(0) &= -1 \\ g'''(x) &= 2(1+x)^{-3} & g'''(0) &= 2 \\ g^{(4)}(x) &= -6(1+x)^{-4} & g^{(4)}(0) &= -6 \end{aligned}$$

Nótese que hemos obtenido los mismos coeficientes del Ejemplo 4. Por tanto, el polinomio de Maclaurin de grado 4 para $g(x) = \ln(1 + x)$ es

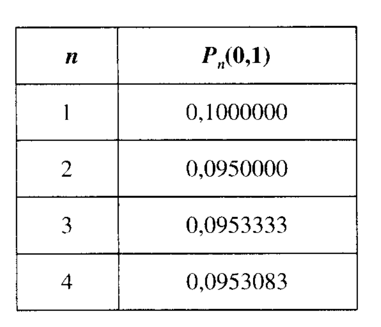
$$P_4(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 + \frac{g^{(4)}(0)}{3!}x^4 =$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$$

En consecuencia,

$$\ln(1{,}1) = \ln(1 + 0{,}1) \approx P_4(0{,}1) \approx 0{,}0953083$$

Compruebe que el polinomio de Taylor de grado 4 del Ejemplo 4 proporciona el mismo valor aproximado. □



n	$P_n(0,1)$
1	0,1000000
2	0,0950000
3	0,0953333
4	0,0953083

La tabla del margen ilustra la precisión de las aproximaciones Taylor del valor que la calculadora da para ln(1,1). Puede apreciarse que conforme n crece, $P_n(0{,}1)$ tiende al valor de la calculadora, que es 0,09563102.

Por otra parte, la tabla de abajo muestra que al alejarnos del punto central del desarrollo $c = 1$, la precisión de la aproximación disminuye.

Aproximación de ln (1 + x) por el polinomio de Taylor de grado 4

x	0,0	0,1	0,5	0,75	1,0
ln (1 + x)	0,0000000	0,0953102	0,4054651	0,5596158	0,6931472
$P_4(x)$	0,0000000	0,0953083	0,4010417	0,5302734	0,5833333

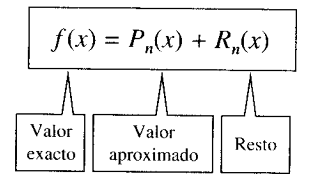
Estas tablas ponen de manifiesto dos aspectos importantes relativos a la precisión de las aproximaciones por polinomios de Taylor o de Maclaurin.

1. La aproximación suele ser mejor en valores de x cercanos a c que en valores de x alejados de c.

2. La aproximación suele ser mejor cuanto más alto sea el grado del polinomio de Taylor o Maclaurin.

Resto de un polinomio de Taylor

Un método de aproximación carece de interés si no se tiene idea de la magnitud del error cometido con él. Para medir la precisión de la aproximación del valor de una función $f(x)$ por el polinomio de Taylor $P_n(x)$, se utiliza el **resto** $R_n(x)$, definido como sigue.



Así pues, $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. El valor absoluto de $R_n(x)$ se llama el error asociado a la aproximación. Esto es,

$$\text{Error} = |R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|$$

El próximo teorema proporciona un procedimiento general para estimar la cota de error asociada a una aproximación por polinomios de Taylor. Este importante resultado, conocido como **teorema de Taylor**, da el resto en una forma que se llama la **forma de Lagrange del resto**. (La demostración del teorema se da en el apéndice.)

TEOREMA 8.19 **TEOREMA DE TAYLOR**

Si una función f es derivable hasta orden $n + 1$ en un intervalo I que contiene a c, entonces, para cada x en I existe un z entre x y c tal que

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + R_n(x)$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n + 1)!}(x - c)^{n+1}$$

Nota. Para $n = 0$, el teorema de Taylor establece que si f es derivable en un intervalo I que contiene a c, para cada x en I existe un z entre x y c tal que

$$f(x) = f(c) + f'(z)(x - c)$$

es decir,

$$f'(z) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

¿Reconoce este caso especial del teorema de Taylor? (Es el teorema del valor medio.)

Cuando apliquemos el teorema de Taylor no podemos esperar hallar el valor exacto de z. (Si eso fuera factible, la aproximación sería superflua.) Bien al contrario, hay que intentar encontrar cotas para $f^{(n+1)}(z)$ que nos permitan tener idea de cómo es de grande el resto $R_n(x)$.

EJEMPLO 8 Investigando la precisión de una aproximación

El tercer polinomio de Maclaurin para sen x es

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

Usar el teorema de Taylor para aproximar por $P_3(0{,}1)$ el valor de sen (0,1). Investigar la precisión de esa aproximación.

Solución: Por el teorema de Taylor se tiene

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + R_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(z)}{4!}x^4$$

donde $0 < z < 0{,}1$. Por tanto,

$$\text{sen } (0{,}1) \approx 0{,}1 - \frac{(0{,}1)^3}{3!} \approx 0{,}1 - 0{,}000167 = 0{,}099833$$

| Nota. Intente verificar con la calculadora los resultados de los Ejemplos 8 y 9. Para el Ejemplo 8 debe obtener

$$\text{sen } (0{,}1) \approx 0{,}0998334$$

En el Ejemplo 9, se obtiene

$$P_3(1{,}2) \approx 0{,}1827$$

y

$$\ln (1{,}2) \approx 0{,}1823$$

De $f^{(4)}(z) = \text{sen } z$, se sigue que el error $|R_3(0{,}1)|$ admite la siguiente acotación.

$$0 < R_3(0{,}1) = \frac{\text{sen } z}{4!}(0{,}1)^4 < \frac{0{,}0001}{4!} \approx 0{,}000004$$

Esto implica que

$$0{,}099833 < \text{sen } (0{,}1) = 0{,}099833 + R_3(x) < 0{,}099833 + 0{,}000004$$

$$0{,}099833 < \text{sen } (0{,}1) < 0{,}099837$$ □

EJEMPLO 9 Aproximación con precisión prefijada

Determinar de qué grado ha de tomarse el polinomio de Taylor $P_n(x)$ centrado en $c = 1$ para obtener con él una aproximación de ln (1,2) con error menor que 0,001.

Solución: Siguiendo el esquema del Ejemplo 4, vemos que la derivada de orden $(n + 1)$ de $f(x) = \ln x$ es

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Por el teorema de Taylor sabemos que el error $|(R_n(1{,}2)|$ viene dado por

$$|R_n(1{,}2)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(1{,}2-1)^{n+1}\right| = \frac{n!}{z^{n+1}}\left[\frac{1}{(n+1)!}\right](0{,}2)^{n+1}$$

$$= \frac{(0{,}2)^{n+1}}{z^{n+1}(n+1)}$$

donde $1 < z < 1{,}2$. En este intervalo, $|R_n(1{,}2)|$ es máximo en $z = 1$. Así pues, estamos buscando un valor de n tal que

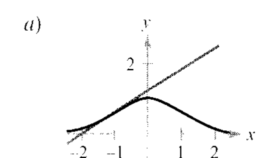
$$\frac{(0{,}2)^{n+1}}{(1)^{n+1}(n+1)} < 0{,}001 \quad \Longrightarrow \quad 1.000 < (n+1)5^{n+1}$$

Ensayando se comprueba que el valor de n más pequeño que satisface esa condición es $n = 3$. Por tanto, sería necesario el polinomio de Taylor de orden 3 para lograr un valor aproximado de ln (1,2) con la precisión requerida. □

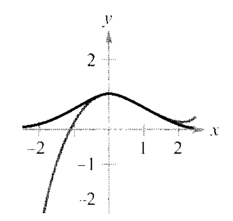
Ejercicios de la Sección 8.7

En los Ejercicios 1-4, asociar cada aproximación por polinomios de Taylor de la función con la gráfica adecuada.

a)

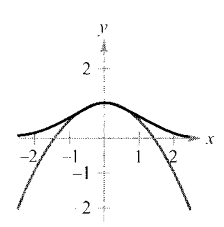


b)



c)

d)



1. $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$

2. $g(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$

3. $g(x) = e^{-1/2}[(x+1)+1]$

4. $g(x) = e^{-1/2}\left[\frac{1}{3}(x-1)^3 - (x-1) + 1\right]$

5. ***Conjetura*** Consideremos la función $f(x) = \cos x$ y sus polinomios de Maclaurin P_2, P_4 y P_6 (véase Ejemplo 5).
   a) Representar en la calculadora f y sus polinomios de Maclaurin citados.
   b) Evaluar y comparar los valores de $f^{(n)}(0)$ y $P_n^{(n)}(0)$ para $n = 2$, 4 y 6.
   c) Con los resultados del apartado *b)*, formular una conjetura sobre $f^{(n)}(0)$ y $P_n^{(n)}(0)$.

6. ***Conjetura*** Consideremos la función $f(x) = x^2e^x$.
   a) Hallar sus polinomios de Maclaurin P_2, P_3 y P_4.
   b) Representar en la calculadora f, P_2, P_3 y P_4.
   c) Evaluar y comparar los valores de $f^{(n)}(0)$ y $P_n^{(n)}(0)$ para $n = 2$, 3 y 4.
   d) Con los resultados del apartado *c)*, formular una conjetura sobre $f^{(n)}(0)$ y $P_n^{(n)}(0)$.

En los Ejercicios 7-16, hallar el polinomio de Maclaurin de grado n para la función.

7. $f(x) = e^{-x}$, $n = 3$	**8.** $f(x) = e^{-x}$, $n = 5$
9. $f(x) = e^{2x}$, $n = 4$	**10.** $f(x) = e^{3x}$, $n = 4$
11. $f(x) = \text{sen}\, x$, $n = 5$	**12.** $f(x) = \text{sen}\, \pi x$, $n = 3$
13. $f(x) = xe^x$, $n = 4$	**14.** $f(x) = x^2e^{-x}$, $n = 4$
15. $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $n = 4$	**16.** $f(x) = \sec x$, $n = 2$

En los Ejercicios 17-20, determinar el n-ésimo polinomio de Taylor centrado en c.

17. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $n = 4$, $c = 1$

18. $f(x) = \sqrt{x}$, $n = 4$, $c = 4$

19. $f(x) = \ln x$, $n = 4$, $c = 1$

20. $f(x) = x^2 \cos x$, $n = 2$, $c = \pi$

En los Ejercicios 21 y 22, usar derivación simbólica para encontrar el polinomio de Taylor indicado para la función f. Representar la función y el polinomio de Taylor.

21. $f(x) = \operatorname{tg} x$
a) $n = 3$, $c = 0$
b) $n = 5$, $c = 0$
c) $n = 3$, $c = \pi/4$

22. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
a) $n = 2$, $c = 0$
b) $n = 4$, $c = 0$
c) $n = 4$, $c = 1$

23. ***Aproximaciones numéricas y gráficas***
a) Utilizar los polinomios de Maclaurin, $P_1(x)$, $P_3(x)$, $P_5(x)$, y $P_7(x)$ para $f(x) = \operatorname{sen} x$ para completar la tabla

x	0	0,25	0,50	0,75	1,00
sen x	0	0,2474	0,4794	0,6816	0,8415
$P_1(x)$					
$P_3(x)$					
$P_5(x)$					
$P_7(x)$					

b) Representar en la calculadora $f(x) = \operatorname{sen} x$ y los polinomios de Maclaurin del punto *a)*.
c) Describir el cambio en la precisión de las aproximaciones al crecer la distancia al punto donde están centrados los polinomios.

24. ***Aproximaciones numéricas y gráficas***
a) Completar la tabla usando los polinomios de Taylor $P_1(x)$ y $P_4(x)$ de $f(x) = \ln x$, centrados en $c = 1$.

x	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
ln x	0	0,2231	0,4055	0,5596	0,6931
$P_1(x)$					
$P_4(x)$					

b) Representar en la calculadora $f(x) = \ln x$ y los polinomios de Taylor del apartado *a)*.
c) Describir cómo cambia la precisión de la aproximación al crecer el grado del polinomio.

Aproximaciones numéricas y gráficas En los Ejercicios 25 y 26, *a)* escribir el polinomio de Maclaurin $P_3(x)$ para $f(x)$, *b)* completar la tabla para $f(x)$ y $P_3(x)$, y *c)* dibujar sus gráficas sobre unos mismos ejes coordenados.

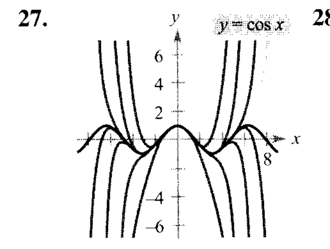
x	−0,75	−0,50	−0,25	0	0,25	0,50	0,75
$f(x)$							
$P_3(x)$							

25. $f(x) = \operatorname{arcsen} x$

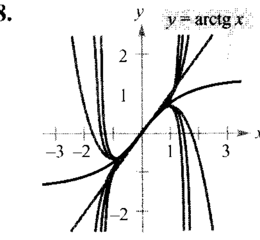
26. $f(x) = \operatorname{arctg} x$

En los Ejercicios 27 y 28, se dan las gráficas de $y = f(x)$ y de siete de sus polinomios de Maclaurin. Identificar los polinomios de Maclaurin y confirmar los resultados rehaciendo las gráficas en una calculadora.

27.



28.



En los Ejercicios 29-32, aproximar el valor de la función en el valor de x que se indica, mediante el polinomio que se encuentra en el ejercicio especificado.

29. $f(x) = e^{-x}$ — $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, Ejercicio 7

30. $f(x) = x^2 e^{-x}$ — $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$, Ejercicio 14

31. $f(x) = \ln x$ — $f(1{,}2)$, Ejercicio 19

32. $f(x) = x^2 \cos x$ — $f\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)$, Ejercicio 20

En los Ejercicios 33-36, usar el teorema de Taylor para determinar la precisión de la aproximación.

33. $\cos(0{,}3) \approx 1 - \dfrac{(0{,}3)^2}{2!} + \dfrac{(0{,}3)^4}{4!}$

34. $e \approx 1 + 1 + \dfrac{1^2}{2!} + \dfrac{1^3}{3!} + \dfrac{1^4}{4!} + \dfrac{1^5}{5!}$

35. $\text{arcsen}\,(0{,}4) \approx 0{,}4 + \dfrac{(0{,}4)^3}{2 \cdot 3}$

36. $\text{arctg}\,(0{,}5) \approx 0{,}5 - \dfrac{(0{,}5)^3}{3}$

En los Ejercicios 37 y 38, averiguar de qué grado hay que tomar el polinomio de Maclaurin con el fin de cometer un error menor que 0,001 al aproximar con él el valor de la función en el x indicado.

37. sen (0,3)

38. $e^{0{,}75}$

En los Ejercicios 39 y 40, averiguar de qué grado hay que tomar el polinomio de Maclaurin con el fin de cometer un error menor que 0,0001 al aproximar con él el valor de la función en el x indicado. Usar derivación simbólica en la calculadora para obtener y evaluar la derivada requerida.

39. $f(x) = \ln(x + 1)$ aproximar $f(1{,}5)$

40. $f(x) = \cos(\pi x^2)$ aproximar $f(0{,}6)$

En los Ejercicios 41 y 42, determinar en qué valores de x puede sustituirse la función por el polinomio de Taylor sin que el error cometido exceda de 0,001.

41. $f(x) = e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!},\ x < 0$

42. $f(x) = \text{sen}\, x \approx x - \dfrac{x^3}{3!}$

43. ***Comparación de polinomios de Maclaurin***

a) Comparar los polinomios de Maclaurin de grados 4 y 5, respectivamente, para las funciones

$$f(x) = e^x \quad \text{y} \quad g(x) = xe^x$$

¿Qué relación hay entre ellos?

b) Usar el resultado de *a*) y el polinomio de Maclaurin de grado 5 para $f(x) = \text{sen}\, x$ para construir el polinomio de Maclaurin de grado 6 para la función $g(x) = x\,\text{sen}\, x$.

c) Usar el resultado de *a*) y el polinomio de Maclaurin de grado 5 para $f(x) = \text{sen}\, x$ para encontrar el polinomio de grado 4 para la función $g(x) = (\text{sen}\, x)/x$.

44. ***Derivación de polinomios de Maclaurin***

a) Derivar el polinomio de Maclaurin de grado 5 de $f(x) = \text{sen}\, x$ y comparar el resultado con el polinomio de Maclaurin de grado 4 de $g(x) = \cos x$.

b) Derivar el polinomio de Maclaurin de grado 6 de $f(x) = \cos x$ y comparar el resultado con el polinomio de Maclaurin de grado 5 para $g(x) = \text{sen}\, x$.

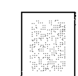
c) Derivar el polinomio de Maclaurin de grado 4 de $f(x) = e^x$. Describir la relación entre las dos series.

45. Demostrar que si f es impar, sus polinomios de Maclaurin contienen sólo potencias impares de x.

46. Probar que si f es par, sus polinomios de Maclaurin contienen sólo potencias pares de x.

47. Sea $P_n(x)$ el n-ésimo polinomio de Taylor de f centrado en c. Demostrar que $P_n(c) = f(c)$ y $P^{(k)}(c)$ para $1 \leqslant k \leqslant n$.

48. ***Redacción*** La demostración del Ejercicio 47 garantiza que el polinomio de Taylor y sus derivadas coinciden con la función en $x = c$. Usar las gráficas y tablas de los Ejercicios 23-26 para discutir qué ocurre con la precisión de la aproximación por polinomios de Taylor cuando nos alejamos del punto $x = c$.



8.8 Series de potencias

CONTENIDO ▪
Series de potencias ▪
Radio e intervalo de convergencia ▪
Convergencia en los puntos terminales ▪
Derivación e integración de series de potencias ▪

Series de potencias

En la Sección 8.7 vimos cómo aproximar funciones mediante polinomios de Taylor. Por ejemplo, la función $f(x) = e^x$ se puede *aproximar* por sus polinomios de Maclaurin como sigue.

$e^x \approx 1 + x$ Polinomio de grado 1

$e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ Polinomio de grado 2

EXPLORACIÓN

Razonamiento gráfico Use una calculadora para obtener gráficas aproximadas de las siguientes series de potencias cerca de $x = 0$. (Tome unos cuantos primeros términos.) Cada una de estas series representa una función muy familiar. ¿Puede identificarlas?

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \qquad \text{Polinomio de grado 3}$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \qquad \text{Polinomio de grado 4}$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \qquad \text{Polinomio de grado 5}$$

En esa misma sección tuvimos ocasión de comprobar que la aproximación es tanto mejor cuanto mayor es el grado del polinomio utilizado.

En esta y en las dos próximas secciones probaremos que varias clases importantes de funciones, en particular

$$f(x) = e^x$$

pueden ser expresadas *exactamente* por una serie perteneciente a una familia de series que se denominan **series de potencias**. Así, la representación de e^x en forma de serie de potencias es

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Se puede demostrar que, para cada valor real de x, la serie de la derecha es una serie convergente cuya suma coincide con el número e^x. Antes, sin embargo, tenemos que analizar algunos resultados preliminares relativos a las series de potencias, comenzando por su definición precisa.

DEFINICIÓN DE SERIES DE POTENCIAS

Si x es una variable, una **serie de potencias** es cualquier serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Más en general, cualquier serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

se dice que es una **serie de potencias centrada en** c, donde c es una constante.

Nota. Para simplificar la notación de las series de potencias, adoptamos el convenio de que $(x - c)^0 = 1$, incluso si $x = c$.

EJEMPLO 1 Series de potencias

a) La siguiente serie de potencias está centrada en 0.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

b) La siguiente serie de potencias está centrada en -1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(x+1)^n = 1 - (x+1) + (x+1)^2 - (x+1)^3 + \cdots$$

c) La siguiente serie de potencias está centrada en 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-1)^n = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots$$ □

Radio e intervalo de convergencia

Una serie de potencias en x puede verse como una función de x

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

El dominio de f es el conjunto de todos los x para los cuales la serie converge. El primer objetivo de esta sección consiste en averiguar el dominio de las series de potencias. Naturalmente, toda serie de potencias converge en su centro c, ya que

$$\begin{aligned} f(c) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \\ &= a_0(1) + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots \\ &= a_0 \end{aligned}$$

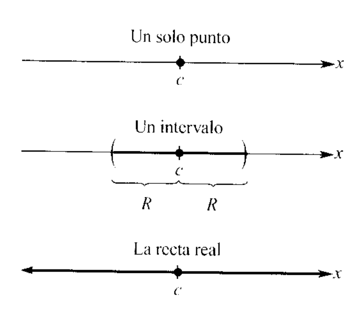


FIGURA 8.17
El dominio de una serie de potencias sólo puede ser de tres tipos: un único punto, un intervalo centrado en c o toda la recta real.

Así pues, c siempre pertenece al dominio de f. El importante teorema que viene a continuación (cuya demostración omitimos) establece que el dominio de una serie de potencias sólo puede adoptar tres formas: un único punto, un intervalo centrado en c o toda la recta real, como ilustra la Figura 8.17.

ADVERTENCIA Para calcular el radio de convergencia de una serie de potencias utilice el criterio del cociente, como muestran los Ejemplos 2, 3 y 4.

TEOREMA 8.20 CONVERGENCIA DE UNA SERIE DE POTENCIAS

Para una serie de potencias centrada en c, exactamente una de estas tres afirmaciones es verdadera.

1. La serie converge sólo en c.
2. Existe un número real $R > 0$ tal que la serie es absolutamente convergente cuando $|x - c| < R$, y diverge para $|x - c| > R$
3. La serie es absolutamente convergente para todo x real.

El número R es el **radio de convergencia** de la serie de potencias. Si la serie converge sólo en c, el radio de convergencia es $R = 0$, y si converge en toda la recta real, el radio de convergencia es $R = \infty$. El conjunto de todos los valores de x en los que la serie de potencias es convergente constituye el **intervalo de convergencia** de esa serie de potencias.

EJEMPLO 2 Cálculo del radio de convergencia

Calcular el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

Solución: Para $x = 0$, es

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} n!0^n = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

Para cualquier valor fijado de x tal que $|x| > 0$, denotemos $u_n = n!x^n$. Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| \\ &= |x| \lim_{n\to\infty} (n+1) \\ &= \infty\end{aligned}$$

Por el criterio del cociente deducimos que la serie diverge para $|x| > 0$ y converge sólo en su centro, el punto 0. Por tanto, su radio de convergencia es $R = 0$. □

EJEMPLO 3 Cálculo del radio de convergencia

Hallar el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} 3(x-2)^n$.

Solución: Para $x \neq 2$, sea $u_n = 3(x-2)^n$. Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3(x-2)^{n+1}}{3(x-2)^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} |x-2| \\ &= |x-2|\end{aligned}$$

El criterio del cociente asegura que la serie converge si $|x-2| < 1$ y diverge si $|x-2| > 1$. En consecuencia, el radio de convergencia es $R = 1$. □

EJEMPLO 4 Cálculo del radio de convergencia

Calcular el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Solución: Sea $u_n = (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$ Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{[(-1)^{n+1}\ x^{2n+3}]/(2n+3)!}{[(-1)^n\ x^{2n+1}]/(2n+1)!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)}$$

Este límite es 0 para cualquier valor de x, así que el criterio del cociente establece que la serie converge para todo x. Por tanto, su radio de convergencia es $R = 8$. □

Convergencia en los puntos terminales

Nótese que para una serie de potencias cuyo radio de convergencia sea un número finito R, el Teorema 8.20 no dice nada acerca de si la serie converge o no en los dos *puntos terminales* de su intervalo de convergencia. Eso significa que falta estudiar el comportamiento de la serie en ellos. Según el resultado de ese análisis, el intervalo de convergencia de una serie de potencias puede adoptar las seis formas que muestra la Figura 8.18.

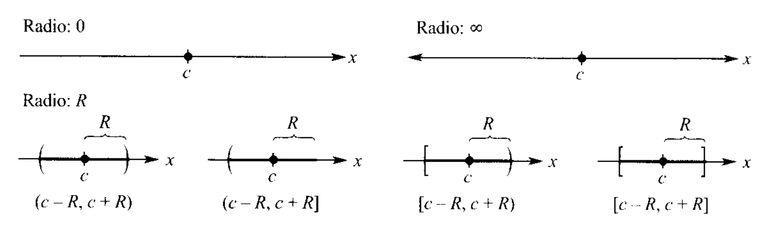


FIGURA 8.18
Intervalos de convergencia.

EJEMPLO 5 Cálculo del intervalo de convergencia

Calcular el intervalo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Solución: Llamando $u_n = x^n/n$ vemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}/(n+1)}{x^n/n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{nx}{n+1}\right|$$

$$= |x|$$

Según el criterio del cociente, el radio de convergencia es $R = 1$. Además, como la serie está centrada en 0, converge en el intervalo $(-1, 1)$. Sin embargo, todavía no está claro si ese intervalo es exactamente el *intervalo de convergencia*, ya que falta analizar qué ocurre en sus dos puntos terminales. Cuando $x = 1$, la serie dada se convierte en la serie armónica *divergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \qquad \text{Diverge para } x = 1$$

Cuando $x = -1$, se convierte en la serie armónica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots \qquad \text{Converge para } x = -1$$

que es convergente. Por consiguiente, el intervalo de convergencia de la serie es $[-1, 1)$, como se muestra en la Figura 8.19.

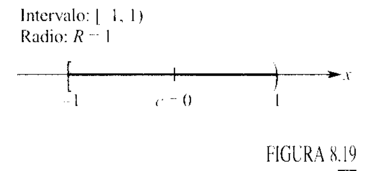


FIGURA 8.19

□

EJEMPLO 6 Cálculo del intervalo de convergencia

Calcular el intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+1)^n}{2^n}$

Solución: Denotando $u_n = (-1)^n(x+1)^n/2^n$ obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}(x+1)^{n+1}/2^{n+1}}{(-1)^n(x+1)^n/2^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^n(x+1)}{2^{n+1}}\right|$$

$$= \left|\frac{x+1}{2}\right|$$

Intervalo: (-3, 1)
Radio: R = 2
-3 -2 c = -1 0 1 x

FIGURA 8.20

Del criterio del cociente se sigue que la serie converge si $|(x+1)/2| < 1$ o sea $|x+1| < 2$. Por tanto, su radio de convergencia es $R = 2$. Como la serie está centrada en $x = -1$, converge en el intervalo $(-3, 1)$. Además, en los puntos terminales la serie dada se convierte en

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \qquad \text{Diverge para } x = -3$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \qquad \text{Diverge para } x = -1$$

ambas divergentes, de manera que el intervalo de convergencia es finalmente (−3, 1), como muestra la Figura 8.20. □

EJEMPLO 7 Cálculo del radio de convergencia

Hallar el radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

Solución: Haciendo $u_n = x^n/n^2$ vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}/(n+1)^2}{x^n/n^2}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^2 x}{(n+1)^2}\right| = |x|$$

Del criterio del cociente se sigue que el radio de convergencia es $R = 1$. Puesto que la serie está centrada en $x = 0$, eso quiere decir que converge en el intervalo $(-1, 1)$. Para $x = 1$ obtenemos la p-serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \qquad \text{Converge para } x = 1$$

Para $x = -1$ obtenemos la serie alternada convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \cdots \qquad \text{Converge para } x = -1$$

Concluimos que el intervalo de convergencia de la serie dada es $[-1, 1]$. □



JAMES GREGORY (1638-1675)

Uno de los primeros matemáticos en trabajar con series de potencias fue el escocés James Gregory. Desarrolló un método, basado en ellas, para interpolar valores de una tabla, un método utilizado más tarde por Brook Taylor en su desarrollo de los polinomios y series de Taylor (véase Sección 8.10).

Derivación e integración de series de potencias

La representación de funciones por series de potencias desempeñó un papel relevante en el desarrollo del Cálculo. La obra de Newton, especialmente cuando tuvo que tratar con funciones algebraicas complicadas o con funciones trascendentes, estuvo basado en el uso de series de potencias. Euler, Lagrange, Leibniz y los Bernoulli utilizaron también series de potencias con frecuencia.

Una vez definida una función mediante una serie de potencias, es natural preguntarnos cómo averiguar las características de esa función. ¿Es continua? ¿Es derivable? ¿Es integrable? El próximo teorema, que enunciamos sin demostración, responde estas cuestiones.

TEOREMA 8.21 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DEFINIDAS POR SERIES DE POTENCIAS

Si la función dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces f es continua, derivable e integrable en el intervalo $(c - R, c + R)$. Además, la derivada y la primitiva de f son

1. $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots$
2. $\int f(x)\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1}$

$$= C + a_0(x-c) + a_1\frac{(x-c)^2}{2} + a_2\frac{(x-c)^3}{3} + \cdots$$

El *radio de convergencia* de la serie obtenida al derivar o integrar una serie de potencias es el mismo que el de la serie de potencias original. El *intervalo de convergencia*, por el contrario, puede diferir debido al comportamiento en sus puntos terminales.

El Teorema 8.21 viene a decir que las funciones definidas por series de potencias se comportan, a muchos efectos, como los polinomios. Son continuas en su intervalo de convergencia y tanto su derivada como su primitiva se pueden hallar derivando e integrando término a término la serie de potencias dada. Por ejemplo, la derivada de la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

es

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + (2)\frac{x}{2} + (3)\frac{x^2}{3!} + (4)\frac{x^3}{4!} + \cdots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Curiosamente, hemos obtenido $f'(x) = f(x)$. ¿Reconoce esta función?

EJEMPLO 8 Intervalos de convergencia de $f(x)$, $f'(x)$ y $\int f(x)\,dx$

Consideremos la función dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

Hallar los intervalos de convergencia de

a) $\int f(x)\,dx$ *b*) $f(x)$ *c*) $f'(x)$

Solución: Por el Teorema 8.21, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \\ &= C + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \cdots \end{aligned}$$

Usando el criterio del cociente es fácil probar que las tres series tienen radio de convergencia $R = 1$. Considerando el intervalo $(-1, 1)$ resulta para sus respectivos intervalos de convergencia lo siguiente.

a) Para $\int f(x)\,dx$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \qquad \text{Intervalo de convergencia: } [-1, 1]$$

converge para $x = \pm 1$, y su intervalo de convergencia es $[-1, 1]$.

b) Para $f(x)$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{Intervalo de convergencia: } [-1, 1)$$

converge para $x = -1$ y diverge para $x = 1$. Por tanto, su intervalo de convergencia es $[-1, 1)$.

c) Para $f'(x)$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \qquad \text{Intervalo de convergencia: } (-1, 1)$$

diverge para $x = \pm 1$, y su intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. □

El Ejemplo 8 nos deja la impresión de que, de las tres series en cuestión, la más reacia a converger en los puntos terminales es la de $f'(x)$. Y, en efecto, se puede demostrar que si la serie de $f'(x)$ es convergente en los puntos terminales $x = c \pm R$, la serie de $f(x)$ también converge en ellos.

Ejercicios de la Sección 8.8

En los Ejercicios 1-6, calcular el radio de convergencia de la serie de potencias.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n^2}$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n}$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$
6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!x^n}{n!}$

En los Ejercicios 7-30, hallar el intervalo de convergencia de la serie de potencias. (Recuerde que eso exige estudiar el comportamiento de la serie en los puntos terminales del intervalo.)

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$
8. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^n, \; k > 0$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$
10. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^n$
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{(2n)!}$
13. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n)! \left(\frac{x}{2}\right)^n$
14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)(n+2)}$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{4^n}$
16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!(x-4)^n}{3^n}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-5)^n}{n5^n}$
18. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}$
19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n+1}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-c)^n}{nc^n}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-c)^{n-1}}{c^{n-1}}, \; c > 0$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{2n-1}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}(-2x)^{n-1}$
24. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$
25. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{(2n)!}$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)x^n}{n!}, \; k \geq 1$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\right] x^{2n+1}$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, 3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-1)(x-3)^n}{4^n}$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-c)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$

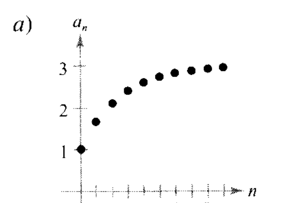
En los Ejercicios 31-34, hallar los intervalos de convergencia de *a)* $f(x)$, *b)* $f'(x)$, *c)* $f''(x)$, y *d)* $\int f(x)\,dx$. Analizar, en cada caso, la convergencia en los puntos terminales.

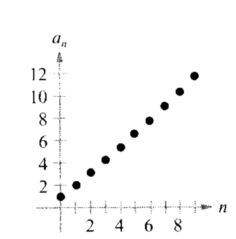
31. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$
32. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-5)^n}{n5^n}$
33. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n+1}$
34. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$

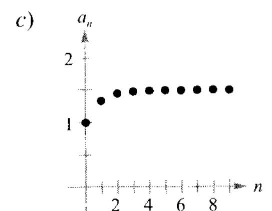
En los Ejercicios 35-38, asociar cada gráfica de las diez primeras sumas parciales de la serie

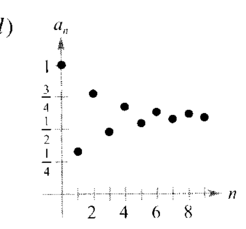
$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

con el valor indicado de la función. Explicar cómo se ha tomado la decisión.

a)


b)


c)


d)


35. $g(1)$
36. $g(2)$
37. $g(3{,}1)$
38. $g(-2)$
39. Sea

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ y } g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

a) Hallar los intervalos de convergencia de f y g.
b) Probar que $f'(x) = g(x)$.
c) Verificar que $g'(x) = -f(x)$.
d) Identificar las funciones f y g.

40. Sea

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

a) Determinar el intervalo de convergencia de f.
b) Comprobar que $f'(x) = f(x)$.
c) Verificar que $f(0) = 1$.
d) Identificar la función f.

En los Ejercicios 41 y 42, demostrar que la función representada por la serie de potencias es solución de la ecuación diferencial.

41. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$, $y'' - xy' - y = 0$

42. $y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{2^{2n} n! \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}$, $y'' + x^2 y = 0$

43. ***Función de Bessel*** La función de Bessel de orden 0 es

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}$$

a) Probar que esa serie converge para todo x.
b) Verificar que la serie es solución de la ecuación diferencial $x^2 J_0'' + xJ_0' + x_2 J_0 = 0$
c) Representar en la calculadora el polinomio constituido por los cuatro primeros términos de J_0.
d) Aproximar el valor de $\int_0^1 J_0\, dx$ con dos decimales.

44. ***Función de Bessel*** La función de Bessel de orden 1 es

$$J_1(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k+1}\ k!(k+1)!}$$

a) Probar que esa serie converge para todo x.
b) Verificar que la serie es solución de la ecuación diferencial

$$x^2 J_1'' + xJ_1' + (x^2 - 1) J_1 = 0$$

c) Representar en la calculadora el polinomio constituido por los cuatro primeros términos de J_1.
d) Probar que $J_0'(x) = -J_1(x)$

En los Ejercicios 45-48, representar la gráfica de la serie de potencias en la calculadora. La serie representa una función bien conocida. Identificarla a la vista de esa gráfica.

45. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

46. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

47. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $-1 < x < 1$

48. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$

49. ***Investigación*** Hemos visto en el Ejercicio 7 que el intervalo de convergencia de la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

es $(-2, 2)$.

a) Calcular la suma de la serie cuando $x = 3/4$. Representar en la calculadora los seis primeros términos de la sucesión de sumas parciales y la recta horizontal correspondiente a la suma de la serie.
b) Repetir el apartado *a*) con $x = -3/4$.
c) Explicar en unas líneas la comparación entre el ritmo de convergencia de la sucesión de sumas parciales y la suma de la serie en los apartados *a*) y *b*). ¿En qué difieren los puntos representativos de las sumas parciales cuando éstas convergen hacia las respectivas sumas de las series?
d) Dado cualquier número real positivo M, existe un entero positivo N tal que la suma parcial

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{3}{2}\right)^n > M$$

Usar la calculadora para completar la tabla.

M	10	100	1.000	10.000
N				

50. Escribir una serie equivalente a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

cuyo índice de suma comience en $n = 1$.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 51-54, averiguar si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que ponga de manifiesto su falsedad.

51. Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $x = 2$, entonces converge necesariamente también para $x = -2$.

52. Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $x = 2$, entonces converge necesariamente también para $x = -1$.

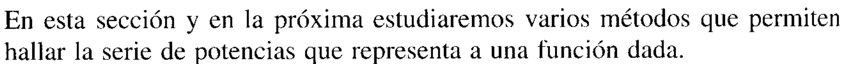
53. Si el intervalo de convergencia de $\sum_{a=0}^{\infty} a_n x^n$ es $(-1, 1)$, el intervalo de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^2$ es $(0, 2)$.

54. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $|x| < 2$, entonces

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$$



8.9



Representación de funciones por series de potencias

CONTENIDO ▪
Series de potencias geométricas ▪
Operaciones con series de potencias ▪



JOSEPH FOURIER (1768-1830)

Parte de las contribuciones iniciales en la teoría de representación de funciones por series de potencias se deben al matemático francés Joseph Fourier. Su obra fue muy importante en el desarrollo del Cálculo, sobre todo porque obligó a los matemáticos del siglo XVIII a poner en cuestión el concepto de función, demasiado restringido, vigente en esa época. Cauchy y Dirichlet estuvieron influenciados por los trabajos de Fourier referentes a las series y en 1837 Dirichlet publicó la definición general de función admitida hoy.

Series de potencias geométricas

En esta sección y en la próxima estudiaremos varios métodos que permiten hallar la serie de potencias que representa a una función dada.

Consideremos la función $f(x) = 1/(1 - x)$. Su forma recuerda mucho la suma de una serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1 - r}, \qquad |r| < 1$$

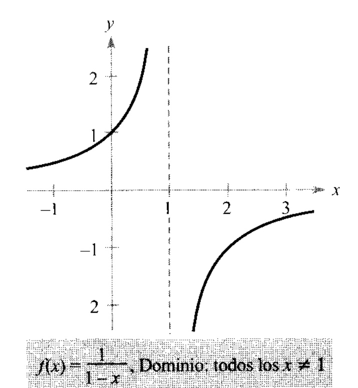
En otras palabras, si hacemos $a = 1$ y $r = x$, una representación en forma de serie de potencias para $1/(1 - x)$, centrada en 0, es

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

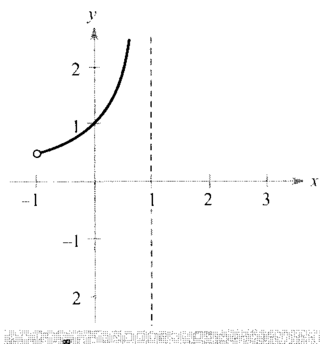
$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \qquad |x| < 1$$

Naturalmente, la serie representa a la función sólo en el intervalo $(-1, 1)$, mientras que la función f está definida en todo $x \neq 1$, como se muestra en la Figura 8.21. Si se quiere representar f en otro intervalo, hay que tomar una serie diferente. Por ejemplo, para obtener una serie centrada en -1, podemos hacer

$$\frac{1}{1 - x} = \frac{1}{2 - (x + 1)} = \frac{1/2}{1 - [(x + 1)/2]} = \frac{a}{1 - r}$$



$f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$, Dominio: todos los $x \neq 1$



$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, Dominio: el intervalo $-1 < x < 1$

FIGURA 8.21

lo cual implica que $a = \frac{1}{2}$ y $r = (x + 1)$. Así pues, $|x + 1| < 2$, se tiene

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x+1}{2}\right)^n$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{(x+1)}{2} + \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(x+1)^3}{8} + \cdots\right], \quad |x+1| < 2$$

que converge en el intervalo $(-3, 1)$.

EJEMPLO 1 Representación por una serie geométrica centrada en 0

Hallar una serie de potencias para $f(x) = \dfrac{4}{x+2}$ centrada en 0.

Solución: Escribiendo $f(x)$ en la forma $a/(1 - r)$ se tiene

$$\frac{4}{2+x} = \frac{2}{1-(-x/2)} = \frac{a}{1-r}$$

de donde se sigue que $a = 2$ y $r = -x/2$. Así pues, la serie de potencias para $f(x)$ es

$$\frac{4}{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2\left(-\frac{x}{2}\right)^n$$
$$= 2\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \cdots\right)$$

Esta serie de potencias converge cuando

$$\left|-\frac{x}{2}\right| < 1$$

lo cual implica que el intervalo de convergencia es $(-2, 2)$. □

División «larga» de polinomios

$$\begin{array}{r|l} & 2 - x + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}x^3 + \cdots \\ 2 + x & 4 \\ & 4 + 2x \\ & \quad -2x \\ & \quad -2x - x^2 \\ & \qquad x^2 \\ & \qquad x^2 + \tfrac{1}{2}x^3 \\ & \qquad\quad -\tfrac{1}{2}x^3 \\ & \qquad\quad -\tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 \end{array}$$

Otra forma de hallar una serie de potencias para una función racional como la del Ejemplo 1 consiste en usar la división «larga» de polinomios. Así, dividiendo $2 + x$ entre 4 se obtiene el resultado del margen.

EJEMPLO 2 Representación por una serie geométrica centrada en 1

Hallar una serie de potencias para $f(x) = \dfrac{1}{x}$, centrada en 1.

Solución: Escribiendo $f(x)$ en la forma $a/(1 - r)$ se tiene

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1 - (-x + 1)} = \frac{a}{1 - r}$$

de manera que $a = 1$ y $r = 1 - x = -(x - 1)$. Por tanto, la serie de potencias para f es

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \sum_{n=0}^{\infty} ar^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [-(x - 1)]^n \\ &= 1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3 + \cdots\end{aligned}$$

Esta serie de potencias converge cuando

$$|x - 1| < 1$$

lo cual implica que el intervalo de convergencia es $(0, 2)$. □

Operaciones con series de potencias

En esta sección quedará patente la versatilidad de las series de potencias, pero antes vamos a estudiar algunas operaciones con este tipo de series. Junto con la derivación y con la integración, estas operaciones permiten desarrollar en serie de potencias una amplia variedad de funciones elementales. (Por simplicidad, enunciamos las propiedades para series centradas en 0.)

TEOREMA 8.22 **OPERACIONES CON SERIES DE POTENCIAS**

Sean $f(x) = \Sigma\, a_n x^n$ y $g(x) = \Sigma\, b_n x^n$

1. $f(kx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n x^n$

2. $f(x^N) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{nN}$

3. $f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$

Las operaciones descritas en el Teorema 8.22 pueden cambiar el intervalo de convergencia para la serie resultante. Por ejemplo, en la suma que sigue el intervalo de convergencia para la suma es la *intersección* de los intervalos de convergencia de las dos series originales.

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{(-1,\,1)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n}_{(-2,\,2)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)x^n}_{(-1,\,1)}$$

$$(-1, 1) \cap (-2, 2) = (-1, 1)$$

EJEMPLO 3 Suma de dos series de potencias

Hallar una serie de potencias, centrada en 0, para $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 - 1}$

Solución: Descomponemos $f(x)$ en fracciones simples, como

$$\frac{3x - 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{x + 1} + \frac{1}{x - 1}$$

Sumando las dos series de potencias geométricas

$$\frac{2}{x + 1} = \frac{2}{1 - (-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^n, \; |x| < 1$$

y

$$\frac{1}{x - 1} = \frac{-1}{1 - x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \; |x| < 1$$

obtenemos la serie de potencias

$$\frac{3x - 1}{x^2 - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} [2(-1)^n - 1]x^n = 1 - 3x + x^2 - 3x^3 + x^4 - \cdots$$

Su intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. □

EJEMPLO 4 Cálculo de una serie de potencias por integración

Hallar una serie de potencias para $f(x) = \ln x$, centrada en 1.

Solución: Por el Ejemplo 2 sabemos que

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x - 1)^n \qquad \text{Intervalo de convergencia, } (0, 2)$$

Integrando esta serie obtenemos

$$\ln x = \int \frac{1}{x}\, dx + C$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - 1)^{n+1}}{n + 1}$$

Haciendo $x = 1$ concluimos que $C = 0$. Por tanto,

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{(x-1)}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots$$ Intervalo de convergencia, (0, 2]

Nótese que la serie converge en $x = 2$. Esto es consistente con la observación de la sección anterior de que la integración de una serie de potencias puede alterar la convergencia en los puntos terminales del intervalo de convergencia. □



En la Sección 8.7 usamos el polinomio de Taylor de cuarto grado de la función logaritmo natural

$$\ln x \approx (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$$

para aproximar ln (1,1)

$$\ln(1{,}1) \approx (0{,}1) - \frac{1}{2}(0{,}1)^2 + \frac{1}{3}(0{,}1)^3 - \frac{1}{4}(0{,}1)^4$$

$$\approx 0{,}0953083$$

Por el Ejemplo 4 sabemos que este polinomio consta de los cuatro primeros términos de la serie de potencias de la función ln x. Gracias al criterio de las series alternadas podemos incluso determinar que el error cometido en esa aproximación es menor que

$$|R_4| \leq |a_5|$$

$$= \frac{1}{5}(0{,}1)^5$$

$$= 0{,}000002$$

Durante los siglos XVII y XVIII, las tablas numéricas para los logaritmos y para otras funciones trascendentes se calculaban de esta manera. El uso de tales técnicas numéricas no está obsoleto, ya que es precisamente con ellas como las calculadoras electrónicas están programadas para evaluar funciones trascendentes.

EJEMPLO 5 Cálculo de una serie de potencias por integración

Hallar una serie de potencias para $g(x) = \text{arctg}\, x$, centrada en 0.

Solución: Como $D_x[\text{arctg}\, x] = 1/(1 + x^2)$, podemos usar la serie

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$ Intervalo de convergencia, (−1, 1)



SRINIVASA RAMANUJAN (1887-1920)

Las series como métodos de aproximación del valor de π han interesado a los matemáticos a lo largo de los últimos 300 años. Una serie curiosa para aproximar $1/\pi$ fue descubierta por el matemático indio Srinivasa Ramanujan en 1914. Cada término sucesivo de la serie de Ramanujan añade unas ocho cifras exactas más al valor de $1/\pi$. (Para más información acerca de la obra de Ramanujan, véase el artículo «Ramanujan and π», de Jonathan M. Borwein y Peter B. Borwein, en *Scientific American*, febrero 1988).

Sustituyendo x por x^2 da

$$f(x^2) = \frac{1}{1 + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Finalmente, obtenemos por integración

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg} x &= \int \frac{1}{1 + x^2}\, dx + C \\
&= C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} && \text{Haciendo } x = 0\text{, se ve que } C = 0 \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots && \text{Intervalo de convergencia } (-1, 1)
\end{aligned}$$

□

Se puede demostrar que la serie de potencias encontrada en el Ejemplo 5 converge también (a arctg x) para $x = \pm 1$. Por ejemplo, cuando $x = 1$ es

$$\operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

No obstante, esta serie (descubierta por James Gregory en 1671) no proporciona un método eficaz para aproximar π, porque converge tan lentamente que habría que sumar un gran número de términos para alcanzar valores aproximados razonablemente próximos a π. El Ejemplo 6 enseña cómo usar *dos* series diferentes de la arcotangente para llegar a una aproximación muy buena de π con sólo unos pocos términos. Esta aproximación fue desarrollada por John Machin en 1706.

EJEMPLO 6 Estimación de π mediante una serie

Usar la identidad trigonométrica

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

para aproximar el número π [véase Ejercicio 44*b*].

Solución: Con sólo cinco términos de cada una de las series de arctg(1/5) y arctg(1/239), obtenemos

$$4\left(4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}\right) \approx 3{,}1415926$$

que aproxima el valor exacto de π con un error menor que 0,0000001. □

Ejercicios de la Sección 8.9

En los Ejercicios 1-4, hallar una serie de potencias geométrica para la función, centrada en 0, *a*) por división, como en los ejemplos 1 y 2, y *b*) por división «larga» de polinomios.

1. $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$

2. $f(x) = \dfrac{3}{4 - x}$

3. $f(x) = \dfrac{1}{2 + x}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$

En los Ejercicios 5-16, hallar una serie de potencias para la función, centrada en c, y determinar su intervalo de convergencia.

5. $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}, \ c = 5$

6. $f(x) = \dfrac{3}{4 - x}, \ c = -2$

7. $f(x) = \dfrac{3}{2x - 1}, \ c = 0$

8. $f(x) = \dfrac{3}{2x - 1}, \ c = 2$

9. $g(x) = \dfrac{1}{2x - 5}, \ c = -3$

10. $h(x) = \dfrac{1}{2x - 5}, \ c = 0$

11. $f(x) = \dfrac{3}{x + 2}, \ c = 0$

12. $f(x) = \dfrac{4}{3x + 2}, \ c = 2$

13. $g(x) = \dfrac{3x}{x^2 + x - 2}, \ c = 0$

14. $g(x) = \dfrac{4x - 7}{2x^2 + 3x - 2}, \ c = 0$

15. $f(x) = \dfrac{2}{1 - x^2}, \ c = 0$

16. $f(x) = \dfrac{4}{4 + x^2}, \ c = 0$

En los Ejercicios 17-26, usar la serie de potencias

$$\frac{1}{1 + x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

para encontrar una serie de potencias, centrada en 0, para la función. Identificar el intervalo de convergencia.

17. $h(x) = \dfrac{-2}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{1 + x} + \dfrac{1}{1 - x}$

18. $h(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{1 + x} - \dfrac{1}{1 - x}$

19. $f(x) = -\dfrac{1}{(x + 1)^2} = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{x + 1}\right]$

20. $f(x) \dfrac{2}{(x + 1)^3} = \dfrac{d^2}{dx^2}\left[\dfrac{1}{x + 1}\right]$

21. $f(x) = \ln (x + 1) = \displaystyle\int \frac{1}{x + 1}\, dx$

22. $f(x) = \ln (1 - x^2) = \displaystyle\int \frac{1}{1 + x}\, dx - \int \frac{1}{1 - x}\, dx$

23. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

24. $f(x) = \ln (x^2 + 1)$

25. $h(x) = \dfrac{1}{4x^2 + 1}$

26. $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$

Análisis numérico y gráfico En los Ejercicios 27 y 28, denotamos

$$S_n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

Confirmar la desigualdad con ayuda de la calculadora y completar la tabla para confirmarla numéricamente.

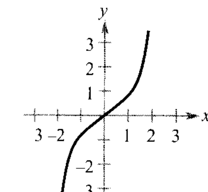
x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
S_n						
$\ln (x + 1)$						
S_{n+1}						

27. $S_2 \leqslant \ln (x + 1) \leqslant S_3$

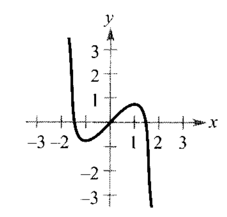
28. $S_4 \leqslant \ln (x + 1) \leqslant S_5$

En los Ejercicios 29-32, asociar cada aproximación polinómica de la función $f(x) = \operatorname{arctg} x$ con la gráfica adecuada.

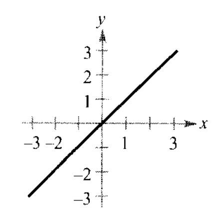




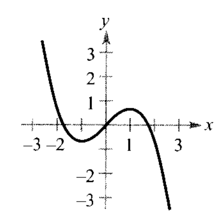
b)



c)



d)



29. $g(x) = x$ **30.** $g(x) = x - \dfrac{x^3}{3}$

31. $g(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}$ **32.** $g(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7}$

33. ***Para pensar*** A la vista de los resultados de los Ejercicios 29-32, elaborar un argumento geométrico para explicar por qué la aproximación mediante series de $f(x) = \text{arctg } x$ sólo tiene potencias impares de x.

34. ***Conjetura*** A la vista de los resultados de los Ejercicios 29-32, formular una conjetura sobre el grado de las aproximaciones por series de arctg x que tienen extremos relativos.

En los Ejercicios 35-38, aproximar el valor de la cantidad propuesta, utilizando la serie aproximante de arctg x y $R_N \leqslant 0{,}001$.

35. $\text{arctg } \dfrac{1}{4}$ **36.** $\displaystyle\int_0^{3/4} \text{arctg } x^2 \, dx$

37. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\text{arctg } x^2}{x} \, dx$ **38.** $\displaystyle\int_0^{1/2} x^2 \text{ arctg } x \, dx$

En los Ejercicios 39-42, usar la serie de potencias

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

39. Hallar la representación en serie de potencias de $\dfrac{1}{(1 - x)^2}$ y determinar su intervalo de convergencia.

40. Ajustar el índice de suma de la serie construida en el Ejercicio 39 para que empiece en $n = 0$.

41. ***Probabilidad*** Si se lanza una moneda repetidamente, la probabilidad de que la primera cara se produzca en el n-ésimo lanzamiento viene dada por

$$P(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Si se repite este juego numerosas veces, el número medio de tiradas hasta que sale la primera cara es

$$E(n) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(n)$$

(Este valor se llama *valor esperado* de n.) Usar los resultados de los Ejercicios 39 y 40 para calcular $E(n)$. ¿Esperaba lo que se obtiene? Explique su respuesta.

42. Usar los resultados de los Ejercicios 39 y 40 para calcular la suma de las siguientes series.

a) $\displaystyle\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ *b*) $\displaystyle\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{9}{10}\right)^n$

43. Demostrar que

$$\text{arctg } x + \text{arctg } y = \text{arctg } \frac{x + y}{1 - xy} \text{ para } xy \neq 1$$

supuesto que el valor del miembro izquierdo en esa ecuación está entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

44. Usar el resultado del Ejercicio 43 para verificar las identidades

a) $\text{arctg } \dfrac{120}{119} - \text{arctg } \dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$

b) $4 \text{ arctg } \dfrac{1}{5} - \text{arctg } \dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$

[*Ayuda:* Utilizar dos veces el Ejercicio 43 para hallar $4 \text{ arctg } \dfrac{1}{5}$ y usar a continuación el apartado *a*).]

En los Ejercicios 45 y 46, *a*) verificar la ecuación dada y *b*) usar esta ecuación y la serie de la arcotangente para aproximar π con dos cifras decimales correctas.

45. $2 \text{ arctg } \dfrac{1}{2} - \text{arctg } \dfrac{1}{7} = \dfrac{\pi}{4}$

46. $2 \text{ arctg } \dfrac{2}{3} - \text{arctg } \dfrac{7}{17} = \dfrac{\pi}{4}$

En los Ejercicios 47-52, calcular la suma de la serie convergente dada y explicar cómo ha sido obtenida.

47. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n n}$

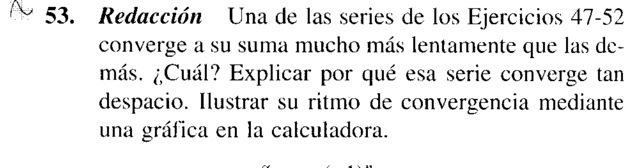
48. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n n}$

49. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{5^n n}$

50. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{2n+1}$

51. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)}$

52. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3^{2n-1}(2n-1)}$



53. ***Redacción*** Una de las series de los Ejercicios 47-52 converge a su suma mucho más lentamente que las demás. ¿Cuál? Explicar por qué esa serie converge tan despacio. Ilustrar su ritmo de convergencia mediante una gráfica en la calculadora.

54. Demostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

55. Usar la calculadora y 50 términos de la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}, \quad 0 < x \leqslant 2$$

para aproximar el valor $f(0{,}5)$. (La suma exacta es $\ln 0{,}5$.)



8.10 Series de Taylor y Maclaurin

CONTENIDO ▪
Series de Taylor y Maclaurin ▪
Series binomiales ▪
Cálculo de series de Taylor a partir de una lista básica ▪



COLIN MACLAURIN (1698-1746)

La representación de funciones por series de potencias surgió del esfuerzo de muchos matemáticos de los siglos XVII y XVIII. Gregory, Newton, John y James Bernoulli, Leibniz, Euler, Lagrange, Wallis, y Fourier contribuyeron, en mayor o menor medida, a su desarrollo. Sin embargo, los dos nombres más estrechamente ligados a esta cuestión son los de Brook Taylor (1685-1731) y Colin Maclaurin.

Series de Taylor y Maclaurin

En la Sección 8.9 hemos construido series de potencias para algunas funciones partiendo de series geométricas, por derivación o integración. En esta sección estudiaremos un procedimiento *general* que permite deducir la serie de potencias de una función que posea derivadas de todo orden. El próximo teorema establece la forma que ha de tener necesariamente *cualquier* representación en serie de esa clase.

TEOREMA 8.23 FORMA DE UNA REPRESENTACIÓN EN SERIE DE POTENCIAS CONVERGENTE

Si f admite una representación en series de potencias convergente $f(x) = \Sigma\, a_n(x-c)^n$ para todo x en un intervalo abierto I que contiene a c, entonces $a_n = f^{(n)}(c)/n!$ y

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

Demostración: Supongamos que es R el radio de convergencia de la serie $\Sigma\, a_n(x-c)^n$. Entonces, por el Teorema 8.21 sabemos que la n-ésima derivada de f existe para $|x-c| < R$, y por derivaciones sucesivas obtenemos

$$f^{(0)}(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + a_4(x-c)^4 + \cdots$$
$$f^{(1)}(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 + \cdots$$
$$f^{(2)}(x) = 2a_2 + 3!a_3(x-c) + 4 \cdot 3a_4(x-c)^2 + \cdots$$
$$f^{(3)}(x) = 3!a_3 + 4!a_4(x-c) + \cdots$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)!a_{n+1}(x-c) + \cdots$$

Evaluando cada una de estas derivadas en $x = c$ vemos que

$$f^{(0)}(c) = 0!a_0$$

$$f^{(1)}(c) = 1!a_1$$

$$f^{(2)}(c) = 2!a_2$$

$$f^{(3)}(c) = 3!a_3$$

y, en general, $f^{(n)}(c) = n!a_n$. Despejando a_n encontramos que los coeficientes de la serie de potencias que representa a $f(x)$ son

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$ □

Nótese que los coeficientes de la serie de potencias en el Teorema 8.23 son precisamente los coeficientes de los polinomios de Taylor para $f(x)$ en c, tal como se han definido en la Sección 8.7. Por esta razón, esa serie se llama **serie de Taylor** de $f(x)$ (centrada) en c.

DEFINICIÓN DE LAS SERIES DE TAYLOR Y MACLAURIN

Si una función f tiene derivadas de todos los órdenes en $x = c$, se llama **serie de Taylor de** f (centrada) en c a la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n = f(c) + f'(c)(x - c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \cdots$$

Si $c = 0$, la serie se conoce también como la **serie de Maclaurin de** f.

Si se conoce la pauta que siguen los coeficientes de los polinomios de Taylor de una función, es fácil encontrar su serie de Taylor. Así, en el Ejemplo 4 de la Sección 8.7 vimos que el cuarto polinomio de Taylor de $\ln x$, centrado en 1, es

$$P_4(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4$$

El esquema que siguen sus coeficientes invita a pensar, y correctamente, que la serie de Taylor para $\ln x$, centrada en $c = 1$, es

$$(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x - 1)^n + \cdots$$

EJEMPLO 1 Construcción de una serie de Maclaurin

Tomando $f(x) = \operatorname{sen} x$, formar la serie de Maclaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

y hallar su intervalo de convergencia.

Solución: Derivando varias veces $f(x)$ vemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''(0) &= 0 \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x & f^{(3)}(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) &= 0 \\ f^{(5)}(x) &= \cos x & f^{(5)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

y así sucesivamente. La secuencia se repite tras la tercera derivación, así que la serie de potencias pedida es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

El criterio del cociente asegura que la serie converge para todo x. □

Es importante darse cuenta de que en el Ejemplo 1 no hemos concluido que la serie de potencias converge a sen x. Sólo hemos demostrado que converge a alguna función, pero no sabemos a cuál. Es esta una matización sutil pero de extrema importancia, cuando se trabaja con series de Maclaurin o de Taylor. Con el fin de persuadirle de que la serie

$$f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \cdots$$

podría converger a una función distinta de f, recordemos que las derivadas se evalúan todas en un único punto. Puede ocurrir, por tanto, que otra función tenga idénticos valores de $f^{(n)}(x)$ en $x = c$ y diferentes en otros puntos. Por ejemplo, si se construye la serie de potencias centrada en 0 para la función de la Figura 8.22, se encuentra la misma serie obtenida en el Ejemplo 1. Sabemos que esa serie converge en todo x, así que obviamente no puede converger a $f(x)$ y a sen x para todo x.

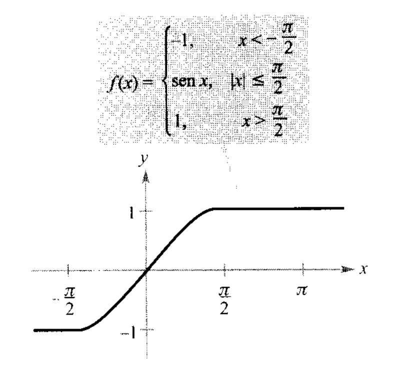


FIGURA 8.22

Nota. No hay que confundir esta observación con el resultado del Teorema 8.23. Este teorema afirma que *si una serie de potencias converge a* $f(x)$, la serie debe ser una serie de Taylor. Pero no dice que toda serie formada con los coeficientes de Taylor converge a $f(x)$.

TEOREMA 8.24 CONVERGENCIA DE LAS SERIES DE TAYLOR

Si una función $f(x)$ tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo abierto I centrado en c, entonces la igualdad

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

es válida si y sólo si existe algún z entre x y c tal que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - c)^{n+1} = 0$$

para todo x en I.

Demostración: Para una serie de Taylor, la n-ésima suma parcial coincide con el n-ésimo polinomio de Taylor. Es decir, $S_n(x) = P_n(x)$. Además, de

$$P_n(x) = f(x) - R_n(x)$$

se sigue que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n(x) &= \lim_{n\to\infty} P_n(x)\\ &= \lim_{n\to\infty} [f(x) - R_n(x)]\\ &= f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x)\end{aligned}$$

Por tanto, en un x dado la serie de Taylor (la sucesión de sus sumas parciales) converge a $f(x)$ si y sólo si $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. □

Nota. En otras palabras, el Teorema 8.24 afirma que una serie de potencias formada con los coeficientes de Taylor $a_n = f^{(n)}(c)/n!$ converge a la función de la que proviene precisamente en aquellos valores en los que el resto tiende a cero cuando $n \to \infty$.

En el Ejemplo 1 construimos la serie de potencias a partir de la función seno y llegamos a concluir que la serie converge a alguna función en toda la recta real. En el Ejemplo 2 veremos que la serie converge a la función seno.

EJEMPLO 2 Una serie de Maclaurin convergente

Probar que la serie de Maclaurin de $f(x) = \text{sen } x$ converge a sen x para todo x.

Solución: Según el Ejemplo 1 hemos de demostrar que se verifica

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

para todo x. Al ser

$$f^{(n+1)}(x) = \pm \operatorname{sen} x$$

o

$$f^{(n+1)}(x) = \pm \cos x$$

se desprende que $|f^{(n+1)}(z)| \leqslant 1$ para todo número real z. En consecuencia, para cualquier x dado es aplicable el teorema de Taylor (Teorema 8.19), del que se sigue que

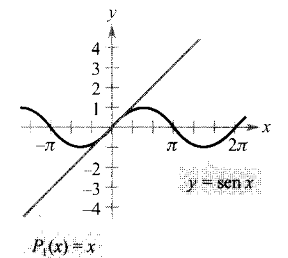
$$0 \leqslant |R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

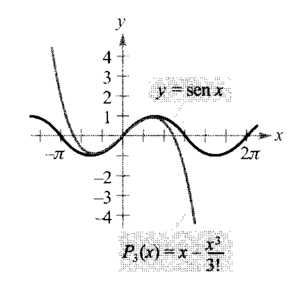
De la discusión en la Sección 8.1 acerca de los ritmos de convergencia de las sucesiones exponenciales y factoriales, se deduce que para un x fijo

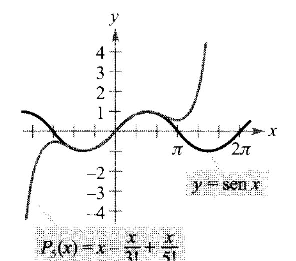
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Finalmente, el teorema del encaje asegura que, para todo x, $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Así pues, del Teorema 8.24 se sigue que la serie de Maclaurin de sen x converge a sen x para todo x. □

La Figura 8.23 permite visualizar la convergencia de la serie de Maclaurin de sen x, comparando las gráficas de los polinomios $P_1(x)$, $P_3(x)$, $P_5(x)$, y $P_7(x)$ con la de la propia función sen x. Se aprecia claramente que conforme el grado del polinomio crece la gráfica se asemeja más y más a la de la función seno.







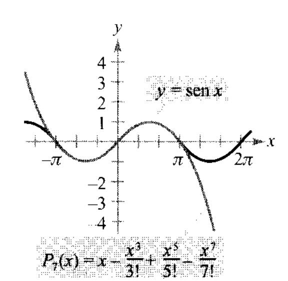


FIGURA 8.23
Al crecer n, la gráfica de P_n se parece cada vez más a la de la función seno.

Resumimos a continuación los pasos para encontrar la serie de Taylor de una función $f(x)$ en c.

Estrategia para hallar una serie de Taylor

1. Derivar $f(x)$ varias veces y evaluar las derivadas en c.

$$f(c), f'(c), f''(c), f'''(c), \cdots, f^{(n)}(c), \cdots$$

   Buscar las pautas que sigue esa secuencia de números.
2. Usar esa secuencia para formar los coeficientes de Taylor $a_n = f^{(n)}(c)/n!$, y determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencias resultante

$$f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \cdots$$

3. Averiguar si, en ese intervalo de convergencia, la serie converge a $f(x)$ o no.

El cálculo directo, mediante derivaciones sucesivas, de los coeficientes de Taylor o Maclaurin puede resultar difícil. El próximo ejemplo muestra un atajo para hallar esos coeficientes de manera indirecta, aprovechando los coeficientes de alguna serie de Taylor o de Maclaurin ya conocida.

EJEMPLO 3 Serie de Maclaurin de una función compuesta

Hallar la serie de Maclaurin de $f(x) = \text{sen } x^2$

Solución: Para hallar los coeficientes de esta serie de Maclaurin *directamente* tendríamos que calcular derivadas sucesivas de $f(x) = \text{sen } x^2$. Ya con las dos primeras,

$$f'(x) = 2x \cos x^2 \text{ y } f''(x) = -4x^2 \text{ sen } x^2 + 2 \cos x^2$$

nos damos cuenta de que sería una tarea muy desagradable. Ahora bien, consideremos la serie de Maclaurin de sen x, hallada en el Ejemplo 1.

$$g(x) = \text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Como sen $x^2 = g(x^2)$, basta sustituir x por x^2 en esta serie para obtener

$$\text{sen } x^2 = g(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots \qquad \square$$

Asegúrese de que comprende correctamente la enseñanza que se desprende del Ejemplo 3. Como el cálculo directo de los coeficientes de Taylor o Maclaurin puede ser tedioso, el camino más eficaz para encontrarlos es elaborar una lista básica de series de potencias de unas cuantas funciones elementales. Una vez en posesión de esa lista podremos deducir las series de potencias de otras funciones efectuando operaciones de suma, diferencia, producto, cociente, derivación, integración y composición de series ya conocidas.

Series binomiales

Antes de presentar la lista básica de series de potencias para funciones elementales, construiremos una nueva familia de series de potencias, correspondientes a las funciones del tipo $f(x) = (1 + x)^k$. Esto produce las **series binomiales**.

EJEMPLO 4 Series binomiales

Hallar la serie de Maclaurin de $f(x) = (1 + x)^k$ y calcular su radio de convergencia.

Solución: Por derivaciones sucesivas vemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x)^k & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= k(1 + x)^{k-1} & f'(0) &= k \\ f''(x) &= k(k-1)(1 + x)^{k-2} & f''(0) &= k(k-1) \\ f'''(x) &= k(k-1)(k-2)(1 + x)^{k-3} & f'''(0) &= k(k-1)(k-2) \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= k \cdots (k - n + 1)(1 + x)^{k-n} & f^{(n)}(0) &= k(k-1) \cdots (k - n + 1) \end{aligned}$$

lo que lleva a la serie

$$1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2} + \cdots + \frac{k(k-1) \cdots (k-n+1)x^n}{n!} + \cdots$$

Como $a_{n+1}/a_n \to 1$, podemos aplicar el criterio del cociente, del que se sigue que el radio de convergencia es $R = 1$. Así pues, la serie converge a *alguna* función en el intervalo $(-1, 1)$. □

En el Ejemplo 4 sólo hemos probado que la serie de Taylor de $(1 + x)^k$ converge a *alguna* función, pero no sabemos todavía si converge precisamente a $(1 + x)^k$. Para ver que es así falta probar que el resto $R_n(x)$ tiende a cero, como en el Ejemplo 2.

EJEMPLO 5 Cálculo de una serie binomial

Hallar la serie de potencias de $f(x) = \sqrt[3]{1 + x}$.

Solución: Usando la serie binomial

$$(1 + x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!} + \cdots$$

con $k = \frac{1}{3}$ obtenemos

$$(1 + x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{3^2 2!} + \frac{2 \cdot 5x^3}{3^3 3!} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8x^4}{3^4 4!} + \cdots$$

que converge para $-1 \leqslant x \leqslant 1$. □

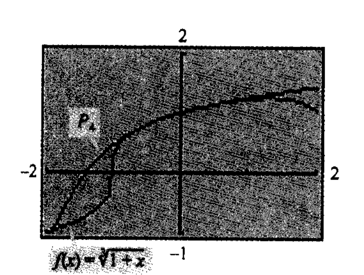


FIGURA 8.24



Intente confirmar el resultado del Ejemplo 5 en la calculadora. Cuando represente las gráficas de las funciones

$$f(x) = (1 + x)^{1/3} \text{ y } P_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$$

en una misma pantalla debe obtener el resultado que se muestra en la Figura 8.24.

Cálculo de series de Taylor a partir de una lista básica

La lista recoge las series de potencias que representan algunas funciones elementales de uso común junto con sus intervalos de convergencia.

Desarrollos en serie de las funciones elementales

Función	*Intervalo de convergencia*
$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 - \cdots + (-1)^n(x-1)^n + \cdots$	$0 < x < 2$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$	$-1 < x < 1$
$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} + \cdots$	$0 < x \leqslant 2$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$	$-\infty < x < \infty$
$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$	$-\infty < x < \infty$
$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{(2n)!x^{2n+1}}{(2^n n!)^2(2n+1)} + \cdots$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)x^4}{4!} + \cdots$	$-1 < x < 1$*

* La convergencia en $x = \pm 1$ depende del valor de k.

Nota. La serie binomial es válida para valores no enteros de k. Además, si k es un entero positivo, la serie binomial se reduce a un simple desarrollo del binomio.

EJEMPLO 6 Deducción de una serie de potencias usando la lista básica

Hallar la serie de potencias de $f(x) = \cos \sqrt{x}$.

Solución: Sustituyendo en la serie de potencias del coseno

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

x por $\sqrt{x}$ obtenemos la serie de potencias

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} - \cdots$$

Esta serie converge para todo x en el dominio de $\cos \sqrt{x}$, es decir, para todo $x \geqslant 0$ □

EJEMPLO 7 Una serie de potencias para $\operatorname{sen}^2 x$

Hallar la serie de Maclaurin de $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$.

Solución: Reescribimos $f(x)$ como

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

Ahora, usando la serie del coseno obtenemos

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \frac{2^6}{6!}x^6 + \frac{2^8}{8!}x^8 - \cdots$$

$$-\frac{1}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2} + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \cdots$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \cdots$$

$$= \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \cdots$$

Esta serie converge para $-\infty < x < \infty$. □

Como se advirtió en la sección precedente, las series de potencias pueden utilizarse para construir tablas de valores de funciones trascendentes. Asimismo son útiles para estimar valores de integrales definidas cuyas primitivas no se conocen, como ilustra el próximo ejemplo.

EJEMPLO 8 Estimación de una integral definida por series de potencias

Usar una serie de potencias para calcular un valor aproximado de

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

con error menor que 0,01.

Solución: Sustituyendo x por $-x^2$ en la serie de la función e^x se obtiene

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} - \cdots\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \cdots$$

Sumando los cuatro primeros términos se tiene

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}74$$

con un error, según el criterio de las series alternadas, menor que $\frac{1}{216} \approx 0{,}005$

□

Ejercicios de la Sección 8.10

En los Ejercicios 1-10, usar la definición para construir la serie de Taylor, centrada en c, para la función.

1. $f(x) = e^{2x},\ c = 0$
2. $f(x) = e^{-2x},\ c = 0$
3. $f(x) = \cos x,\ c = \frac{\pi}{4}$
4. $f(x) = \operatorname{sen} x,\ c = \frac{\pi}{4}$
5. $f(x) = \ln x,\ c = 1$
6. $f(x) = e^x,\ c = 1$
7. $f(x) = \operatorname{sen} 2x,\ c = 0$
8. $f(x) = \ln(x^2 + 1),\ c = 0$
9. $f(x) = \sec x,\ c = 0$ (primeros tres términos no nulos)
10. $f(x) = \operatorname{tg} x,\ c = 0$ (primeros tres términos no nulos)

En los Ejercicios 11-16, usar la serie binomial para construir la serie de Maclaurin de la función.

11. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$
12. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$
13. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}$
14. $f(x) = \sqrt{1+x}$
15. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$
16. $f(x) = \sqrt{1+x^3}$

En los Ejercicios 17-28, hallar la serie de Maclaurin de la función, usando la lista básica de series de potencias.

17. $f(x) = e^{x^2/2}$
18. $g(x) = e^{-3x}$
19. $g(x) = \operatorname{sen} 2x$
20. $h(x) = x\cos x$
21. $f(x) = \cos x^{3/2}$
22. $f(x) = \cos 3x$
23. $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
24. $f(x) = \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{x}$

25. $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \text{sh } x$

26. $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \text{ch } x$

27. $f(x) = \cos^2 x$

[*Ayuda:* $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$]

28. $f(x) = \text{sh}^{-1} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}$

$\left(\textit{Ayuda:} \text{ Integrar la serie de } \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

En los Ejercicios 29 y 30, verificar la fórmula utilizando series de potencias y recordando que $i^2 = -1$

29. $g(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \text{sen } x$

30. $g(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \cos x$

En los Ejercicios 31-36, calcular los primeros cuatro términos no nulos de la serie de Maclaurin de la función, mediante producto o cociente de las series de potencias apropiadas de la lista básica (página 713). Representar en la calculadora la gráfica de la función y su correspondiente aproximación polinómica.

31. $f(x) = e^x \text{ sen } x$

32. $g(x) = e^x \cos x$

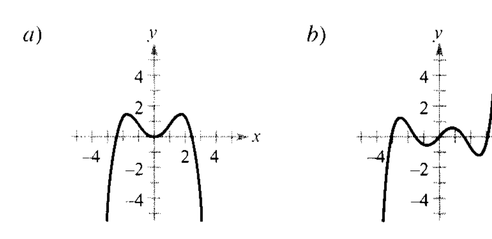
33. $h(x) = \cos x \ln (1 + x)$

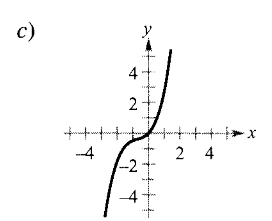
34. $f(x) = e^x \ln (1 + x)$

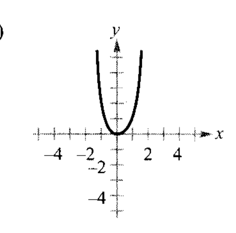
35. $g(x) = \frac{\text{sen } x}{1 + x}$

36. $f(x) = \frac{e^x}{1 + x}$

En los Ejercicios 37-40, asociar cada polinomio con su gráfica. Sacar un factor común de cada polinomio e identificar la función aproximada por el polinomio de Taylor resultante.







37. $y = x^2 - \frac{x^4}{3!}$

38. $y = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!}$

39. $y = x + x^2 + \frac{x^3}{2!}$

40. $y = x^2 - x^3 + x^4$

En los Ejercicios 41 y 42, hallar la serie de Maclaurin para $f(x)$.

41. $f(x) = \int_0^x (e^{-t^2} - 1)\, dt$

42. $f(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^3}\, dt$

En los Ejercicios 43-46, verificar la suma. A continuación, estimar la suma, con ayuda de la calculadora, con un error menor que 0,0001.

43. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2$

44. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{(2n+1)!}\right] = \text{sen } 1$

45. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$

46. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n!}\right) = \frac{e-1}{e}$

En los Ejercicios 47 y 48, usar la representación de f en serie de potencias para calcular $\lim_{x \to 0} f(x)$ (si existe)

47. $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$

48. $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$

En los Ejercicios 49-54, usar series de potencias para aproximar la integral con error menor que 0,0001. (En los Ejercicios 49, 50 y 54, supóngase que el integrando está definido como 1 en $x = 0$.)

49. $\int_0^1 \frac{\text{sen } x}{x}\, dx$

50. $\int_0^{1/2} \frac{\text{arctg } x}{x}\, dx$

51. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{x} \cos x\, dx$

52. $\int_{0,5}^1 \cos \sqrt{x}\, dx$

53. $\int_{0,1}^{0,3} \sqrt{1 + x^3}\, dx$

54. $\int_0^{1/2} \frac{\ln (x+1)}{x}\, dx$

Probabilidad En los Ejercicios 55 y 56, aproximar, con un error menor o igual que 0,0001, la probabilidad normal dada por

$$P(a < x < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx$$

55. $P(0 < x < 1)$

56. $P(1 < x < 2)$

En los Ejercicios 57-60, usar integración simbólica para hallar el polinomio de Taylor de grado 5, centrado en c, para la función dada. A la vista de la gráfica, determinar en qué intervalo da el polinomio una aproximación razonable de la función.

57. $f(x) = x \cos 2x,\ c = 0$

58. $f(x) = \operatorname{sen} \frac{x}{2} \ln (1 + x),\ c = 0$

59. $g(x) = \sqrt{x} \ln x,\ c = 1$

60. $h(x) = \sqrt[3]{x} \operatorname{arctg} x,\ c = 1$

61. ***Movimiento de un proyectil*** Un proyectil lanzado desde el suelo sigue la trayectoria de ecuación

$$y = \left(\operatorname{tg} \theta - \frac{g}{kv_0 \cos \theta}\right) x - \frac{g}{k^2} \ln \left(1 - \frac{kx}{v_0 \cos \theta}\right)$$

donde v_0 es la velocidad inicial, θ el ángulo de elevación, g la aceleración de la gravedad y k el factor de retardo producido por la resistencia del aire. Usando la representación en serie de potencias

$$\ln (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \ -1 < x < 1$$

verificar que la trayectoria puede reescribirse como

$$y = (\operatorname{tg} \theta)x + \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} + \frac{kgx^3}{3v_0 \cos^3 \theta} + \frac{k^2gx^4}{4v_0 \cos^4 \theta} + \cdots$$

62. ***Movimiento de un proyectil*** Determinar, usando el resultado del Ejercicio 61, la serie para la trayectoria de un proyectil lanzado desde el suelo con un ángulo de 60°, velocidad inicial de 64 pies/s y un factor de retardo $k = 1/16$.

63. ***Investigación*** Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

a) Esbozar su gráfica.

b) Usar la fórmula alternativa de la definición de la derivada (Sección 2.1) y la regla de L'Hôpital para probar que $f'(0) = 0$. [Continuando este proceso se puede demostrar que $f^{(n)}(0) = 0$ para $n > 1$.]

c) Usando los resultados del apartado *b*) hallar la serie de Maclaurin de f. ¿Converge la serie a la función f?

64. ***Investigación***

a) Construir la serie de potencias, centrada en 0, de la función

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}$$

b) Representar en la calculadora f y el polinomio de Taylor de grado 8, $P_8(x)$, de f.

c) Completar la tabla siguiente, donde

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln\,(t^2 + 1)}{t^2}\, dt \text{ y}$$

$$G(x) = \int_0^x P_8(t)\, dt$$

x	0,25	0,50	0,75	1,00	1,5	2,00
$F(x)$						
$G(x)$						

d) Describir la relación entre las gráficas de f y de P_8 y los resultados de la tabla del apartado *c*).

65. Demostrar que $\lim\limits_{n \to 0} \frac{x^n}{n!} = 0$ para todo x real.

66. Demostrar que e es irracional. [*Ayuda:* Supóngase que e es racional, digamos $e = p/q$ (con p y q enteros) y considérese

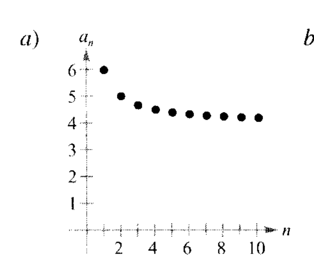
$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \Bigg]$$

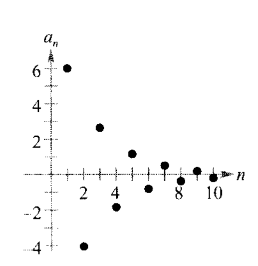
Ejercicios de repaso del Capítulo 8

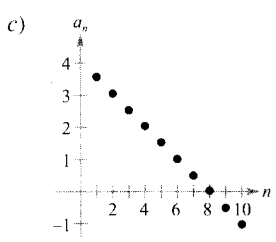
En los Ejercicios 1 y 2, hallar el término general de la sucesión.

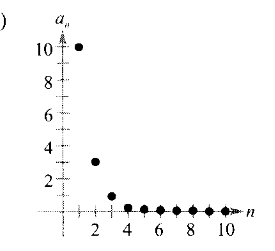
1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \cdots$ **2.** $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \cdots$

En los Ejercicios 3-6, asociar cada sucesión con la gráfica correspondiente.

a)


b)


c)


d)


3. $a_n = 4 + \frac{2}{n}$ **4.** $a_n = 4 - \frac{1}{2}n$

5. $a_n = 10(0,3)^{n-1}$ **6.** $a_n = 6\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

En los Ejercicios 7 y 8, representar en la calculadora los diez primeros términos de la sucesión y usar esa gráfica para intentar adivinar si la sucesión es o no convergente. Verificar la respuesta analíticamente. Si la sucesión es convergente, calcular su límite.

7. $a_n = \frac{5n + 2}{n}$ **8.** $a_n = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$

En los Ejercicios 9-16, averiguar si la sucesión cuyo término general que se especifica es convergente (b y c son números reales positivos).

9. $a_n = \frac{n + 1}{n^2}$ **10.** $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

11. $a_n = \frac{n^3}{n^2 + 1}$ **12.** $a_n = \frac{n}{\ln n}$

13. $a_n = \sqrt{n + 1}$ **14.** $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$

15. $a_n = \frac{\operatorname{sen} \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ **16.** $a_n = (b^n + c^n)^{1/n}$

17. ***Interés compuesto*** Se depositan \$5.000 en una cuenta al 5 por 100 de interés anual compuesto trimestralmente. El balance en la cuenta tras n trimestres es

$$A_n = 5.000\left(1 + \frac{0,05}{4}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

a) Calcular los ocho primeros términos de esa sucesión.
b) Calcular el balance tras 10 años (término A_{40}).

18. ***Depreciación*** Una empresa compra una máquina por \$120.000. Durante los siguientes 5 años se deprecia a razón de un 30 por 100 por año. (Es decir, al final de cada año su valor es el 70 por 100 del valor al comienzo de ese año.)
a) Escribir una fórmula para el n-ésimo término de una sucesión que describa el valor V de la máquina t años después de su adquisición.
b) Calcular el valor de la máquina al final de esos cinco años.

Investigación numérica, gráfica y analítica En los Ejercicios 19-22, usar la calculadora para *a)* hallar la suma parcial S_k indicada y completar la tabla, *b)* representar los diez primeros términos de la sucesión de sumas parciales, y *c)* determinar si la serie es convergente.

k	5	10	15	20	25
S_k					

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ **20.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}$ **22.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + 1)}$

En los Ejercicios 23-26, calcular la suma de la serie.

23. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

24. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{3^n}$

25. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$

26. $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{(n + 1)(n + 2)}\right]$

En los Ejercicios 27 y 28, expresar el número racional como cociente de dos números enteros.

27. $0,\overline{09}$

28. $0,\overline{923076}$

29. ***Botes de una pelota*** Se deja caer una pelota desde una altura de 8 metros. Cada vez que cae h metros, rebota hasta una altura de $0,7\,h$ metros. Calcular la distancia vertical total recorrida por la bola.

30. ***Retribución total*** En un puesto de trabajo pagan \$32.000 el primer año y durante los siguientes 39 años ofrecen una subida salarial del 5,5 por 100 anual. ¿Cuáles son los ingresos totales en ese plazo de 40 años?

31. ***Interés compuesto*** Se depositan \$200 al final de cada mes al 6 por 100 de interés compuesto continuamente. Determinar el capital acumulado al cabo de dos años.

32. ***Interés compuesto*** Se depositan \$100 al final de cada mes, durante 10 años, en una cuenta que abona un 6,5 por 100 de interés compuesto mensualmente. Calcular el balance final al cabo de esos 10 años.

Investigación numérica, gráfica y analítica En los Ejercicios 33 y 34, *a*) verificar que la serie converge, *b*) hallar, con ayuda de la calculadora, la suma parcial S_n que se indica y completar la tabla, *c*) representar los diez primeros términos de la sucesión de las sumas parciales, y *d*) a la vista de la tabla, estimar el valor de la suma de la serie.

n	5	10	15	20	25
S_n					

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{5}\right)^n$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{n^3+5}$

En los Ejercicios 35-46, averiguar si es convergente la serie propuesta.

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2n}}$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\ln n}$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$

43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)$

44. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2^n}\right)$

45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$

46. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}$

47. ***Redacción*** Con ayuda de la calculadora, completar la tabla para *a*) $p = 2$ y *b*) $p = 5$. Escribir unas líneas comparando las entradas de la tabla.

N	5	10	20	30	40
$\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^p}$					
$\displaystyle\int_N^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$					

48. Sabiendo que los términos de una serie, todos ellos positivos, parecen tender a 0 muy lentamente cuando n tiende a infinito (concretamente, $a_{75} = 0,7$) y ninguna otra información, ¿se puede concluir que la serie diverge? Confirmar la respuesta con un ejemplo.

En los Ejercicios 49-54, hallar el intervalo de convergencia de la serie de potencias.

49. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{10}\right)^n$

50. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

51. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-2)^n}{(n+1)^2}$

52. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-2)^n}{n}$

53. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-2)^n$

54. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$

En los Ejercicios 55-62, hallar la serie de potencias centrada en c para la función.

55. $f(x) = \operatorname{sen} x,\ c = \dfrac{3\pi}{4}$

56. $f(x) = \cos x,\ c = -\dfrac{\pi}{4}$

57. $f(x) = 3^x,\ c = 0$

58. $f(x) = \operatorname{cosec} x,\ c = \dfrac{\pi}{2}$ (tres primeros términos)

59. $f(x) = \dfrac{1}{x},\ c = -1$

60. $f(x) = \sqrt{x},\ c = 4$

61. $g(x) = \dfrac{2}{3-x},\ c = 0$

62. $h(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3},\ c = 0$

En los Ejercicios 63-68, calcular la suma de la serie convergente. Explicar cómo se ha obtenido la suma. (*Ayuda:* Usar los desarrollos en series de potencias de las funciones elementales.)

63. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{4^n n}$ **64.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{5^n n}$

65. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!}$ **66.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n n!}$

67. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{3^{2n}(2n)!}$ **68.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^{2n+1}\,(2n+1)!}$

69. ***Redacción*** Una de las series de los Ejercicios 37 y 39 converge a su suma mucho más lentamente que las demás. ¿Cuál es? Explicar por qué esa serie converge tan despacio. Ilustrar su ritmo de convergencia con ayuda de la calculadora.

70. Hallar la serie de Maclaurin de $f(x)\ xe^x$. Integrar esta serie término a término en el intervalo cerrado [0, 1] y probar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)n!} = 1$$

71. ***Construcción de series de Maclaurin*** Calcular los cuatro primeros términos de la serie de Maclaurin de e^{2x}

a) usando la definición de las series de Maclaurin y la fórmula para sus coeficientes, $a_n = f^{(n)}(0)/n!$

b) sustituyendo x por $2x$ en la serie de e^x,

c) multiplicando la serie de e^x por sí misma, ya que $e^{2x} = e^x \cdot e^x$.

72. ***Construcción de series de Maclaurin*** Siguiendo las pautas del Ejercicio 71, hallar los cuatro primeros términos de la serie de sen $2x$. (*Ayuda:* sen $2x$ = 2 sen x cos x).

En los Ejercicios 73 y 74, Hallar una función representada por la serie dada y determinar su dominio.

73. $1 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{27}x^3 + \cdots$

74. $8 - 2(x-3) + \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{1}{8}(x-3)^3 + \cdots$

En los Ejercicios 75-78, hallar la representación en serie de potencias de la función definida por la integral.

75. $\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$

76. $\int_0^x \cos \frac{\sqrt{t}}{2}\,dt$

77. $\int_0^x \frac{\ln(t+1)}{t}\,dt$

78. $\int_0^x \frac{e^t - 1}{t}\,dt$

En los Ejercicios 79 y 80, usar series de potencias para calcular el límite (si existe). Comprobar el resultado mediante la regla de L'Hôpital.

79. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}}$

80. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x}$

En los Ejercicios 81 y 82, probar que la función definida por la serie es solución de la ecuación diferencial.

81. $y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n (n!)^2}$
$x^2y'' + xy' + x^2y = 0$

82. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n\, x^{2n}}{2^n\, n!}$
$y'' + 3xy' + 3y = 0$

En los Ejercicios 83-86, usar polinomios de Taylor para aproximar el valor con un error menor que 0,001.

83. sen 95°

84. cos (0,75)

85. ln (1,75)

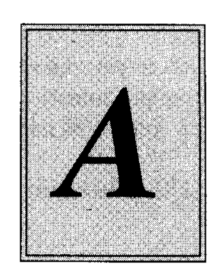
86. $e^{-0,25}$

87. Un polinomio de Taylor centrado en 0 se va a usar para aproximar la función coseno. Determinar el grado del polinomio requerido para lograr la precisión que se especifica sobre el intervalo indicado.

	Error máximo	*Intervalo*
a)	0,001	[−0,5, 0,5]
b)	0,001	[−1, 1]
c)	0,0001	[−0,5, 0,5]
d)	0,0001	[−2, 2]

88. Representar en la calculadora la función coseno y los polinomios de Taylor del Ejercicio 87.

Apéndices



Compendio de preliminares del Cálculo

CONTENIDO ▪
Los números reales y la recta real ▪
Orden y desigualdades ▪
Valor absoluto y distancia ▪

A.1 Los números reales y la recta real

Los números reales y la recta real

Los números reales pueden representarse mediante un sistema de coordenadas denominado la **recta real** o el eje x (véase Figura A.1). El número real que corresponde a un punto de la recta real se llama **coordenada** del punto. Como muestra la Figura A.1, es costumbre señalar aquellos puntos cuyas coordenadas son números enteros.

–4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 x

FIGURA A.1
La recta real.

El punto de la recta real correspondiente al cero se llama el **origen** y se denota por 0. La **dirección positiva** (hacia la derecha) se denota por una punta de flecha en la dirección de los valores crecientes de x. Los números a la derecha del origen son **positivos**. Los números a la izquierda del origen son negativos. La expresión **no negativo** describe un número que es positivo o cero. La expresión **no positivo** describe un número que es negativo o cero.

Cada punto de la recta real corresponde a un número real y sólo a uno, y cada número real corresponde a un punto de la recta real y sólo a uno. Este tipo de relación se denomina una **correspondencia biunívoca** (o **biyectiva**).

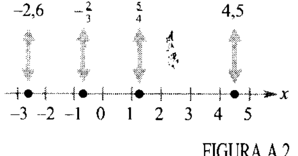


FIGURA A.2
Números racionales.

Cada uno de los cuatro puntos de la Figura A.2 corresponde a un **número racional**: aquel que puede expresarse como cociente de dos enteros. (Observemos que $4{,}5 = \frac{9}{2}$ y $-2{,}6 = \frac{-13}{5}$.) Los números racionales pueden expresarse por *decimales finitos*, como $\frac{2}{5} = 0{,}4$ o *periódicos*, como $\frac{1}{3} = 0{,}333\ ... = 0{,}\overline{3}$.

Los números reales que no son racionales se llaman **irracionales**. Los números irracionales no pueden expresarse como decimales finitos ni periódicos. En los cálculos, los números racionales se representan mediante aproximaciones decimales. He aquí tres ejemplos familiares.

$$\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$$
$$\pi \approx 3{,}141592654$$
$$e \approx 2{,}718281828$$

(Véase Figura A.3.)

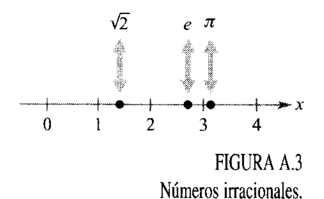


FIGURA A.3
Números irracionales.

Orden y desigualdades

Una propiedad importante de los números reales es que se pueden **ordenar**. Si a y b son números reales, se dice que a es **menor que** b si $b - a$ es positivo. Este orden se denota por la **desigualdad**

$$a < b$$

La afirmación «b es **mayor que** a» equivale a decir que a es menor que b. Cuando tres números reales están ordenados de forma que $a < b$ y $b < c$, decimos que b está **entre** a y c y escribimos $a < b < c$.

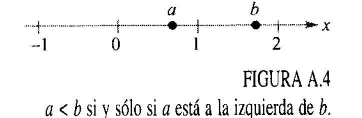


FIGURA A.4
$a < b$ si y sólo si a está a la izquierda de b.

Geométricamente, $a < b$ si y sólo si a está a la *izquierda* de b en la recta real (véase Figura A.4). Por ejemplo, $1 < 2$, porque 1 está a la izquierda de 2 en la recta real.

Las siguientes propiedades se utilizan al trabajar con desigualdades. Se obtienen propiedades válidas análogas sustituyendo < por $\leqslant$ y > por $\geqslant$. (Los símbolos $\leqslant$ y $\geqslant$ significan **menor o igual que** y **mayor o igual que**, respectivamente.)

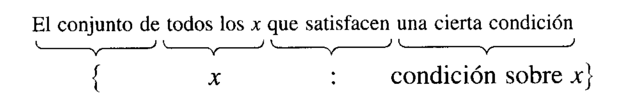
PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

Sean a, b, c, d y k números reales.

1. **Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.** Propiedad transitiva
2. **Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.** Suma de desigualdades
3. **Si $a < b$, entonces $a + k < b + k$.** Suma de una constante
4. **Si $a < b$ y $k > 0$, entonces $ak < bk$.** Producto por una constante positiva
5. **Si $a < b$ y $k < 0$, entonces $ak > bk$.** Producto por una constante negativa

Nota. Observemos que cuando se multiplica por un número negativo, se invierte la desigualdad. Por ejemplo, si $x < 3$, entonces $-4x > -12$. Esto se aplica también a la división por un número negativo. Así, si $-2x > 4$, entonces $x < -2$.

Un **conjunto** es una colección de elementos. Dos conjuntos típicos son el conjunto de los números reales y el conjunto de los puntos de la recta real. Muchos problemas del Cálculo involucran **subconjuntos** de alguno de estos dos conjuntos. En tales casos conviene usar **notación de conjuntos,** de la forma $\{x\text{: condición en } x\}$, que se lee como sigue.



Por ejemplo, el conjunto de los números reales positivos puede describirse como

$\{x: x > 0\}$ Conjunto de los números reales positivos

De manera similar, el conjunto de los números reales no negativos puede describirse como

$\{x: x \geqslant 0\}$ Conjunto de los números reales no negativos

La **unión** de dos conjuntos A y B, denotada por $A \cup B$, es el conjunto de los elementos que son miembros de A, *de B o de ambos*. La **intersección** de dos conjuntos A y B, denotada por $A \cap B$, es el conjunto de los elementos que son miembros de A y de B. Dos conjuntos son **disjuntos** si no tienen elementos en común.

Los subconjuntos más frecuentemente utilizados son los **intervalos** de la recta real. Por ejemplo, el intervalo **abierto**

$$(a, b) = \{x: a < x < b\}$$ Intervalo abierto

es el conjunto de todos los números reales mayores que a y menores que b, donde a y b son los **extremos** del intervalo. Observemos que los extremos no están incluidos en un intervalo abierto. Los intervalos que incluyen sus extremos se llaman **cerrados** y se denotan

$$[a, b] = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}$$ Intervalo cerrado

La tabla posterior muestra los nueve tipos básicos de intervalos de la recta real. Los cuatro primeros son intervalos **acotados** y los cinco restantes, intervalos **no acotados**. Los intervalos no acotados también se clasifican en abiertos y cerrados. Los intervalos $(-\infty, b)$ y (a, ∞) son abiertos, los intervalos $(-\infty, b]$ y $[a, \infty)$ son cerrados, y el intervalo $(-\infty, \infty)$ se considera simultáneamente abierto *y* cerrado.

Intervalos de la recta real

	Notación de intervalos	Notación de conjuntos	Gráfica
Intervalo acotado abierto	(a, b)	$\{x: a < x < b\}$	a b x
Intervalo acotado cerrado	$[a, b]$	$\{x: a \leqslant x \leqslant b\}$	a b x
Intervalos acotados (ni abiertos ni cerrados)	$[a, b)$	$\{x: a \leqslant x < b\}$	a b x
	$(a, b]$	$\{x: a < x \leqslant b\}$	a b x
Intervalos no acotados abiertos	$(-\infty, b)$	$\{x: x < b\}$	a b x
	(a, ∞)	$\{x: x > a\}$	a b x
Intervalos no acotados cerrados	$(-\infty, b]$	$\{x: x \leqslant b\}$	a b x
	$[a, \infty)$	$\{x: x \geqslant a\}$	a b x
Recta real	$(-\infty, \infty)$	$\{x: x$ es un número real$\}$	a b x

Nota. Los símbolos ∞ y $-\infty$ se refieren al infinito positivo y negativo. Estos símbolos no representan números reales. Simplemente nos permiten describir conjuntos no acotados de manera más concisa. Por ejemplo, el intervalo $[a, \infty)$ no está acotado por la derecha, puesto que incluye *todos* los números reales que son mayores o iguales que a.

EJEMPLO 1 Estados líquido y gaseoso del agua

Describir los intervalos de la recta real que corresponden a la temperatura x (en grados Celsius) del agua en

a) estado líquido *b*) estado gaseoso

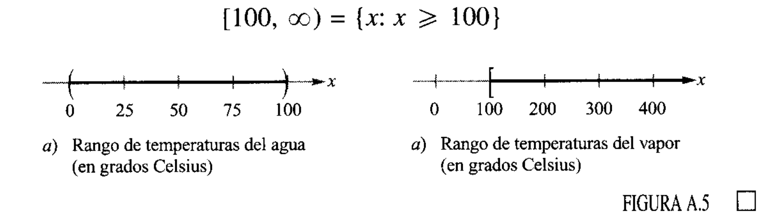
Solución:

a) El agua está en estado líquido a temperaturas mayores que 0° y menores que 100°, como muestra la Figura A.5*a*.

$$(0, 100) = \{x: 0 < x < 100\}$$

b) El agua está en estado gaseoso (vapor) a temperaturas mayores o iguales que 100°, como muestra la Figura A.5*b*.

$$[100, \infty) = \{x: x \geqslant 100\}$$



a) Rango de temperaturas del agua (en grados Celsius)

a) Rango de temperaturas del vapor (en grados Celsius)

FIGURA A.5 □

Un número real a es **solución** de una desigualdad si ésta se satisface (es cierta) al sustituir x por a. El conjunto de todas las soluciones se llama **conjunto solución** de la desigualdad.

EJEMPLO 2 Resolución de una desigualdad

Resolver $2x - 5 < 7$.

Solución:

$2x - 5 < 7$	Desigualdad original
$2x - 5 + 5 < 7 + 5$	Sumar 5 a ambos miembros
$2x < 12$	Simplificar
$\frac{1}{2}(2x) < \frac{1}{2}(12)$	Multiplicar ambos miembros por 1/2
$x < 6$	Simplificar

El conjunto solución es $(-\infty, 6)$. □

Nota. En el Ejemplo 2, las cinco desigualdades dadas como pasos de la resolución se denominan **equivalentes** porque poseen el mismo conjunto solución.

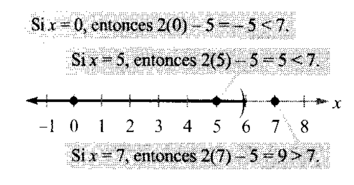


FIGURA A.6
Probando soluciones de $2x - 5 < 7$.

Una vez se ha resuelto una desigualdad, conviene tomar algunos valores de x del conjunto solución y comprobar que satisfacen la desigualdad original. También pueden escogerse algunos valores fuera del conjunto solución y comprobar que *no satisfacen* la desigualdad. Por ejemplo, la Figura A.6 muestra que para $x = 0$ o $x = 5$ se satisface la desigualdad $2x - 5 < 7$, pero si $x = 7$ no se satisface la desigualdad $2x - 5 < 7$.

EJEMPLO 3 Resolución de una desigualdad doble

Resolver $-3 \leqslant 2 - 5x \leqslant 12$

Solución:

$-3 \leqslant 2 - 5x \leqslant 12$	Desigualdad original
$-3 - 2 \leqslant 2 - 5x - 2 \leqslant 12 - 2$	Restar 2
$-5 \leqslant -5x \leqslant 10$	Simplificar
$\dfrac{-5}{-5} \geqslant \dfrac{-5x}{-5} \geqslant \dfrac{10}{-5}$	Dividir por −5 e invertir ambas desigualdades
$1 \geqslant x \geqslant -2$	Simplificar

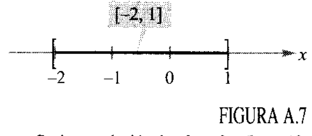


FIGURA A.7
Conjunto solución de $-3 \leqslant 2 - 5x \leqslant 12$.

El conjunto solución es $[-2, 1]$, como se muestra en la Figura A.7. □

Las desigualdades de los Ejemplos 2 y 3 son desigualdades lineales: es decir, involucran polinomios de grado uno. Para resolver desigualdades en las que intervienen polinomios de grado superior, debe usarse el hecho de que un polinomio sólo puede cambiar de signo en sus **ceros** reales (los números que hacen igual a cero el polinomio). Entre dos ceros reales consecutivos, el polinomio debe ser completamente positivo o completamente negativo. Esto quiere decir que cuando se ordenan los ceros reales de un polinomio, éstos dividen la recta real en **intervalos prueba** en los que el polinomio no experimenta cambios de signo. Así pues, si un polinomio admite la factorización

$$(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n), \quad r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < r_n$$

los intervalos prueba son

$$(-\infty, r_1), (r_1, r_2), \cdots, (r_{n-1}, r_n), \text{ y } (r_n, \infty)$$

Para determinar el signo del polinomio en cada intervalo, sólo es necesario probar en *un valor* del intervalo.

EJEMPLO 4 Resolución de una desigualdad cuadrática

Resolver $x^2 < x + 6$.

Solución:

$x^2 < x + 6$	Desigualdad original
$x^2 - x - 6 < 0$	Escribir en forma usual
$(x - 3)(x + 2) < 0$	Factorizar

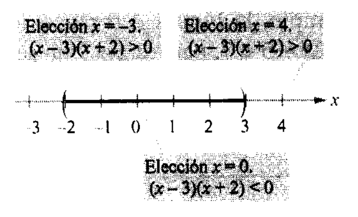


FIGURA A.8
Probando un intervalo.

El polinomio $x^2 - x - 6$ tiene los ceros $x = -2$ y $x = 3$. Por tanto, puede resolverse la desigualdad comprobando el signo de $x^2 - x - 6$ en cada uno de los intervalos prueba $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ y $(3, \infty)$. Para comprobar el signo en cada intervalo, se escoge cualquier número del mismo y se calcula el signo de $x^2 - x - 6$. Tras hacer esto, se encontrará que el polinomio es positivo para todos los números reales de los intervalos primero y tercero y negativo para todos los números reales del segundo intervalo. La solución de la desigualdad original es, pues, $(-2, 3)$, como muestra la Figura A.8. □

Valor absoluto y distancia

Si a es un número real, el **valor absoluto** de a es

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto de un número no puede ser negativo. Por ejemplo, sea $a = -4$. Entonces, como $-4 < 0$, se tiene que

$$|a| = |-4| = -(-4) = 4$$

Recordemos que el símbolo $-a$ no representa necesariamente un número negativo.

OPERACIONES CON VALORES ABSOLUTOS

Sean a y b números reales y sea n un entero positivo.

1. $|ab| = |a|\,|b|$ 2. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

3. $|a| = \sqrt{a^2}$ 4. $|a^n| = |a|^n$

Nota. En los Ejercicios 73, 75, 76 y 77, se pide la demostración de estas propiedades.

PROPIEDADES DE DESIGUALDADES Y VALORES ABSOLUTOS

Sean a y b números reales y sea k un número real positivo.

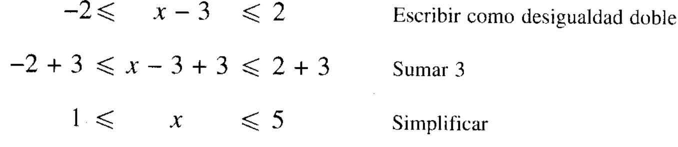
1. $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$
2. $|a| \leqslant k$ si y sólo si $-k \leqslant a \leqslant k$
3. $k \leqslant |a|$ si y sólo si $k \leqslant a$ o $a \leqslant -k$
4. **Desigualdad triangular:** $|a + b| \leqslant |a| + |b|$

Las propiedades 2 y 3 también son válidas si se sustituye $\leqslant$ por $<$.

EJEMPLO 5 Resolución de una desigualdad con valor absoluto

Resolver $|x - 3| \leqslant 2$.

Solución: Usando la segunda propiedad de las desigualdades y los valores absolutos, puede escribirse la desigualdad original como la desigualdad doble



$$-2 \leqslant x - 3 \leqslant 2 \qquad \text{Escribir como desigualdad doble}$$

$$-2 + 3 \leqslant x - 3 + 3 \leqslant 2 + 3 \qquad \text{Sumar 3}$$

$$1 \leqslant x \leqslant 5 \qquad \text{Simplificar}$$

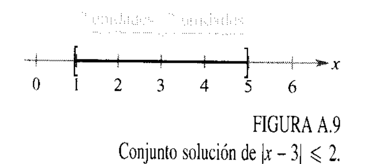


FIGURA A.9
Conjunto solución de $|x - 3| \leqslant 2$.

El conjunto solución es $[1, 5]$, como puede verse en la Figura A.9. □

EJEMPLO 6 Un conjunto solución formado por dos intervalos

Resolver $3 < |x + 2|$.

Solución: Utilizando la tercera propiedad de las desigualdades y los valores absolutos, puede escribirse la desigualdad original en forma de dos desigualdades lineales

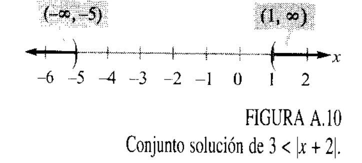


FIGURA A.10
Conjunto solución de $3 < |x + 2|$.

$$3 < x + 2 \quad \text{o} \quad x + 2 < -3$$

$$1 < x \quad \text{o} \quad x < -5$$

El conjunto solución es la unión de los intervalos disjuntos $(-\infty, -5)$ y $(1, \infty)$, como muestra la Figura A.10. □

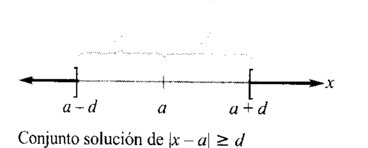


FIGURA A.11
Conjunto solución de $|x - a| \geqslant d$.

Los Ejemplos 5 y 6 ilustran los resultados generales que muestra la Figura A.11. Observemos que, si $d > 0$, el conjunto solución de la desigualdad $|x - a| \leqslant d$ es *un solo* intervalo, mientras que el conjunto solución de la desigualdad $|x - a| \geqslant d$ es la unión de dos intervalos disjuntos.

La **distancia entre dos puntos** a y b de la recta real viene dada por

$$d = |a - b| = |b - a|$$

La **distancia dirigida desde** a hasta b es $b - a$, y la **distancia dirigida desde** b hasta a es $a - b$, como se muestra en la Figura A.12.

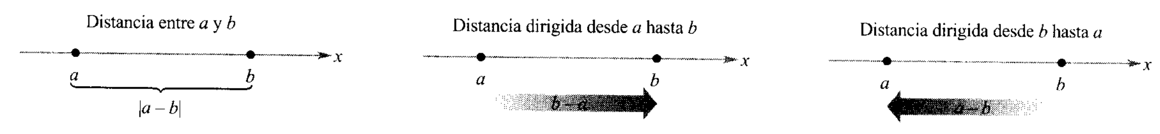


FIGURA A.12

EJEMPLO 7 Distancia en la recta real

a) La distancia entre −3 y 4 es

$$|4-(-3)| = |7| = 7 \quad \text{o} \quad |-3-4| = |-7| = 7$$

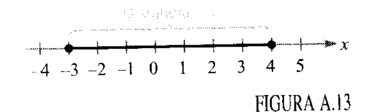


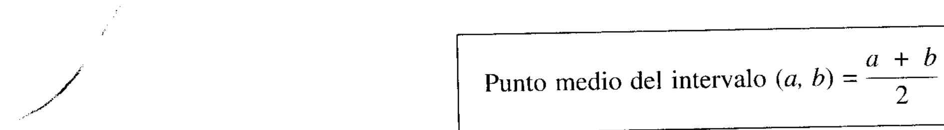
FIGURA A.13

(Véase Figura A.13.)

b) La distancia dirigida desde −3 hasta 4 es $4 - (-3) = 7$.

c) La distancia dirigida desde 4 hasta −3 es $-3 - 4 = -7$.

El **punto medio** de un intervalo con extremos a y b es el valor medio de a y b. Esto es,



$$\text{Punto medio del intervalo } (a, b) = \frac{a+b}{2}$$

Para demostrar que éste es el punto medio, sólo es necesario probar que $(a + b)/2$ equidista de a y b.

Ejercicios de la Sección A.1

En los Ejercicios 1-10, determinar si el número real es racional o irracional.

1. 0,7 **2.** −3.678

3. $\frac{3\pi}{2}$ **4.** $3\sqrt{2} - 1$

5. $4,3\overline{451}$ **6.** $\frac{22}{7}$

7. $\sqrt[3]{64}$ **8.** $0,\overline{8177}$

9. $4\frac{5}{8}$ **10.** $(\sqrt{2})^3$

En los Ejercicios 11-14, expresar el número decimal periódico como cociente de dos enteros utilizando el siguiente procedimiento. Si $x = 0,6363...$, entonces $100x = 63,6363...$ Restando la primera ecuación a la segunda resulta $99x = 63$, o sea, $x = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$.

11. $0,\overline{36}$ **12.** $0,\overline{318}$

13. $0,\overline{297}$ **14.** $0,\overline{9900}$

15. Dados $a < b$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas.

a) $a + 2 < b + 2$ *b*) $5b < 5a$

c) $5 - a > 5 - b$ *d*) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

e) $(a - b)(b - a) > 0$ *f*) $a^2 < b^2$

16. Completar la tabla con la notación de intervalos, la de conjuntos y la representación en la recta real.

Notación de intervalos	**Notación de conjuntos**	**Gráfica**
		−2 −1 0 x
$(-\infty, -4]$		
	$\left\{x: 3 \leqslant x \leqslant \frac{11}{2}\right\}$	
$(-1, 7)$		

En los Ejercicios 17-20, describir verbalmente el subconjunto de los números reales representado por la desigualdad. Representar el subconjunto en la recta real y establecer si el intervalo es acotado o no acotado.

17. $-3 < x < 3$ **18.** $x \geqslant 4$

19. $x \leqslant 5$ **20.** $0 \leqslant x < 8$

En los Ejercicios 21-24, describir el conjunto usando una desigualdad y usando notación de intervalos.

21. y es al menos 4.

22. q es no negativo.

23. Se espera un tipo de interés en los préstamos mayor que el 3 por 100 y no superior al 7 por 100.

24. Se ha pronosticado para hoy una temperatura T por encima de 90°.

En los Ejercicios 25-44, resolver la desigualdad y representar la solución en la recta real.

25. $2x - 1 \geqslant 0$ **26.** $3x + 1 \geqslant 2x + 2$

27. $-4 < 2x - 3 < 4$ **28.** $0 \leqslant x + 3 < 5$

29. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} > 5$ **30.** $x > \frac{1}{x}$

31. $|x| < 1$ **32.** $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} > 5$

33. $\left|\frac{x-3}{2}\right| \geqslant 5$ **34.** $\left|\frac{x}{2}\right| > 3$

35. $|x - a| < b,\ b > 0$ **36.** $|x + 2| < 5$

37. $|2x + 1| < 5$ **38.** $|3x + 1| \geqslant 4$

39. $\left|1 - \frac{2}{3}x\right| < 1$ **40.** $|9 - 2x| < 1$

41. $x^2 \leqslant 3 - 2x$ **42.** $x^4 - x \leqslant 0$

43. $x^2 + x - 1 \leqslant 5$ **44.** $2x^2 + 1 < 9x - 3$

En los Ejercicios 45-48, hallar la distancia dirigida desde a hasta b, la distancia dirigida desde b hasta a y la distancia entre a y b.

45. $a = -1$ $b = 3$
(recta: −2 −1 0 1 2 3 4 x)

46. $a = -\frac{5}{2}$ $b = \frac{13}{4}$
(recta: −3 −2 −1 0 1 2 3 4 x)

47. *a)* $a = 126,\quad b = 75$
b) $a = -126,\quad b = -75$

48. *a)* $a = 9{,}34,\quad b = -5{,}65$
b) $a = \frac{16}{5},\quad b = \frac{112}{75}$

En los Ejercicios 49-52, hallar el punto medio del intervalo.

49. $a = -1$ $a = 3$
(recta: −2 −1 0 1 2 3 4 x)

50. $a = -5$ $b = -\frac{3}{2}$
(recta: −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 x)

51. *a)* $[7, 21]$
b) $[8{,}6,\ 11{,}4]$

52. *a)* $[-6{,}85,\ 9{,}35]$
b) $[-4{,}6,\ -1{,}3]$

En los Ejercicios 53-58, definir el intervalo o par de intervalos usando valores absolutos.

53. $a = -2$ $b = 2$
(recta: −3 −2 −1 0 1 2 3 x)

54. $a = -3$ $b = 3$
(recta: −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 x)

55. $a = 0$ $b = 4$
(recta: −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 x)

56. $a = 20$ $b = 24$
(recta: 18 19 20 21 22 23 24 25 26 x)

57. *a)* Todos los números reales que están a lo sumo a diez unidades de 12.
b) Todos los números reales que están al menos a diez unidades de 12.

58. *a)* y está a lo sumo a dos unidades de a.
b) y está a menos de δ unidades de c.

59. ***Beneficio*** Los ingresos por la venta de x unidades de cierto producto son

$$R = 115{,}95x$$

y el coste de producción de x unidades es

$$C = 95x + 750$$

Para obtener beneficios, R debe ser mayor que C. ¿Para qué valores de x producirá beneficios el producto?

60. ***Costes de flota*** Una empresa de servicio público dispone de una flota de camiones. Se estima que el coste anual de funcionamiento de cada camión es

$$C = 0{,}32m + 2.300$$

donde C se mide en dólares y m se mide en millas. La empresa desea que el coste anual de funcionamiento de cada camión sea menor que \$10.000. Para ello, m debe ser inferior a ¿qué valor?

61. ***Moneda equilibrada*** Para determinar si una moneda está equilibrada (tiene la misma probabilidad de mostrar cara que cruz), se lanza 100 veces y se registra el número de caras x. La moneda se declara defectuosa si

$$\left|\frac{x-50}{5}\right| \geqslant 1{,}645$$

¿Para qué valores de x se declarará defectuosa la moneda?

62. ***Producción diaria*** La producción diaria estimada p en una refinería es

$$|p - 2,250.000| < 125.000$$

donde p se mide en barriles de petróleo. Determinar los niveles de producción más alto y más bajo.

En los Ejercicios 63 y 64, determinar cuál de los dos números reales es mayor.

63. *a)* π o $\dfrac{355}{113}$ *b)* π o $\dfrac{22}{7}$

64. *a)* $\dfrac{224}{151}$ o $\dfrac{144}{97}$ *b)* $\dfrac{73}{81}$ o $\dfrac{6.427}{7.132}$

65. ***Aproximación: Potencias de 10*** La velocidad de la luz es $2{,}998 \times 10^8$ metros por segundo. ¿Cuál es la mejor estimación de la distancia en metros que recorre la luz en un año?
a) $9{,}5 \times 10^5$ *b)* $9{,}5 \times 10^{15}$
c) $9{,}5 \times 10^{12}$ *d)* $9{,}6 \times 10^{16}$

66. ***Redacción*** La precisión de una aproximación de un número está relacionada con el número de cifras significativas de dicha aproximación. Escribir una definición del concepto de cifras significativas e ilustrarlo con ejemplos.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 67-72, determinar si la afirmación es cierta o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.

67. El inverso de un entero no nulo es un entero.

68. El inverso de un número racional no nulo es un número racional.

69. Todo número real es bien racional o bien irracional.

70. El valor absoluto de todo número real es positivo.

71. Si $x < 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$.

72. Si a y b son dos números reales distintos, entonces $a < b$ o $a > b$.

En los Ejercicios 73-80, demostrar la propiedad.

73. $|ab| = |a||b|$

74. $|a - b| = |b - a|$
[*Ayuda:* $(a - b) = (-1)(b - a)$]

75. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, \; b \neq 0$

76. $|a| = \sqrt{a^2}$

77. $|a^n| = |a|^n, \; n = 1, 2, 3, \cdots$

78. $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$

79. $|a| \leqslant k$, si y sólo si $-k \leqslant a \leqslant k, \; k > 0$

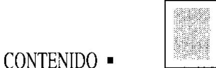
80. $k \leqslant |a|$ si y sólo si $k \leqslant a$ o $a \leqslant -k, \; k > 0$

81. Encontrar un ejemplo en el que $|a - b| > |a| - |b|$, y otro en el que $|a - b| = |a| - |b|$. Después, demostrar que $|a - b| \geqslant |a| - |b|$ para todo a, b.

82. Probar que el máximo de dos números a y b viene dado por la fórmula

$$\text{máx}\,(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$$

Obtener una fórmula análoga para mín (a, b).



A.2 El plano cartesiano

El plano cartesiano

Un **par ordenado** (x, y) de números reales tiene x como *primer* miembro e y como *segundo* miembro. El modelo usado para representar pares ordenados se llama **sistema de coordenadas rectangular** o **plano cartesiano**, en honor al matemático francés René Descartes. Se construye considerando dos rectas reales que se cortan formando ángulos rectos (véase Figura A.14).

La recta real horizontal se suele llamar el **eje *x*** y la recta real vertical, el **eje *y***. Su punto de intersección es el **origen**. Los dos ejes dividen el plano en cuatro **cuadrantes**.

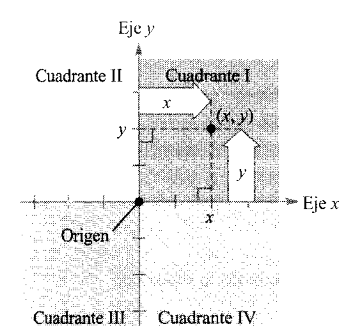


FIGURA A.14
El plano cartesiano.

Cada punto del plano se identifica por un par ordenado (x, y) de números reales, denominados **coordenadas** del punto. El número x representa la distancia dirigida desde el eje y hasta el punto y el número y, la distancia dirigida desde el eje x hasta el punto (véase Figura A.14). Para el punto (x, y), la primera coordenada es la coordenada x o la **abscisa** y la segunda, la coordenada y o la **ordenada**. Por ejemplo, la Figura A.15 muestra las posiciones de los puntos $(-1, 2)$, $(3, 4)$, $(0, 0)$, $(3, 0)$ y $(-2, -3)$ en el plano cartesiano.

Nota. Los signos de las coordenadas de un punto determinan el cuadrante en que se encuentra. Por ejemplo, si $x > 0$ e $y < 0$, entonces (x, y) se encuentra en el cuarto cuadrante.

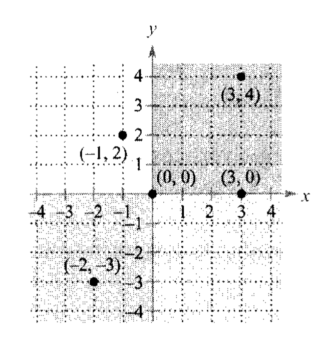


FIGURA A.15
Puntos representados mediante pares ordenados.

Observemos que un par ordenado (a, b) se usa para denotar tanto un punto del plano como un intervalo abierto de la recta real. Esto, no obstante, no debería ocasionar confusiones: la naturaleza del problema debería dejar claro si se está tratando un punto del plano o un intervalo abierto.

Fórmulas de la distancia y del punto medio

Recordemos que, por el teorema de Pitágoras, en un triángulo rectángulo la hipotenusa c y los catetos a y b están relacionados por la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$. Recíprocamente, si $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

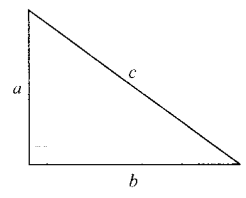


FIGURA A.16
El teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$.

Supongamos que queremos determinar la distancia d entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) del plano. Si los puntos se encuentran sobre una recta horizontal, entonces $y_1 = y_2$ y la distancia entre los puntos es $|x_2 - x_1|$. Si los puntos se encuentran sobre una recta vertical, entonces $x_1 = x_2$ y la distancia entre los puntos es $|y_2 - y_1|$. Si los puntos no están sobre una recta horizontal ni sobre una vertical, entonces pueden utilizarse para construir un triángulo rectángulo, como ilustra la Figura A.17. La longitud del lado vertical del triángulo es $|y_2 - y_1|$, y la del horizontal es $|x_2 - x_1|$. Del teorema de Pitágoras, se sigue que

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

$$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

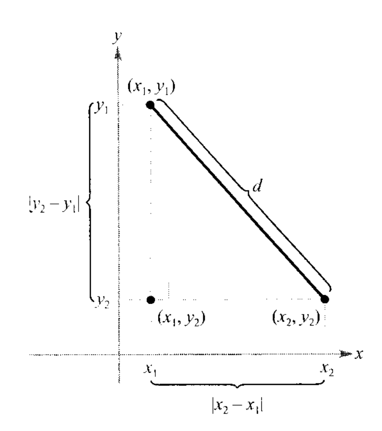


FIGURA A.17
Distancia entre dos puntos.

Sustituyendo $|x_2 - x_1|^2$ e $|y_2 - y_1|^2$ por las expresiones equivalentes $(x_2 - x_1)^2$ e $(y_2 - y_1)^2$, se obtiene el siguiente resultado.

FÓRMULA DE LA DISTANCIA

La distancia d entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) del plano viene dada por

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

EJEMPLO 1 Cálculo de la distancia entre dos puntos

Hallar la distancia entre los puntos (−2, 1) y (3, 4)

Solución:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{[3 - (-2)]^2 + (4 - 1)^2} && \text{Fórmula de la distancia} \\ &= \sqrt{(5)^2 + (3)^2} \\ &= \sqrt{25 + 9} \\ &= \sqrt{34} \\ &\approx 5{,}83 \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 2 Verificación de un triángulo rectángulo

Verificar que los puntos (2, 1), (4, 0) y (5, 7) son los vértices de un triángulo rectángulo.

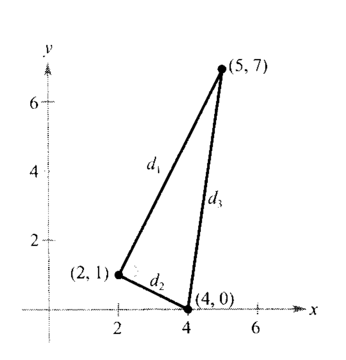


FIGURA A.18
Verificación de un triángulo rectángulo.

Solución: La Figura A.18 muestra el triángulo determinado por los tres puntos. Las longitudes de los tres lados son las siguientes.

$$d_1 = \sqrt{(5 - 2)^2 + (7 - 1)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$$
$$d_2 = \sqrt{(4 - 2)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$
$$d_3 = \sqrt{(5 - 4)^2 + (7 - 0)^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50}$$

Como

$$d_1^2 + d_2^2 = 45 + 5 = 50 \qquad \text{Suma de los cuadrados de los catetos}$$

y

$$d_3^2 = 50 \qquad \text{Cuadrado de la hipotenusa}$$

podemos aplicar el teorema de Pitágoras y concluir que el triángulo es rectángulo. □

EJEMPLO 3 Aplicación de la fórmula de la distancia

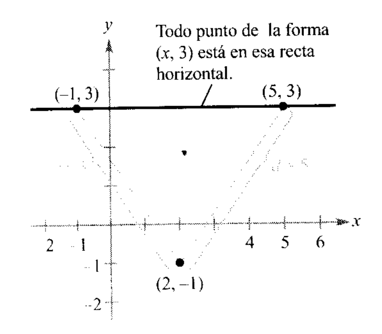


FIGURA A.19
Determinación de un punto, dada una distancia.

Hallar x para que la distancia entre $(x, 3)$ y $(2, -1)$ sea 5.

Solución: Usando la fórmula de la distancia, se puede escribir lo siguiente

$$5 = \sqrt{(x - 2)^2 + [3 - (-1)]^2} \qquad \text{Fórmula de la distancia}$$

$$25 = (x^2 - 4x + 4) + 16 \qquad \text{Elevar al cuadrado ambos miembros}$$

$$0 = x^2 - 4x - 5 \qquad \text{Escribir de forma usual}$$

$$0 = (x - 5)(x + 1) \qquad \text{Factorizar}$$

Por consiguiente, $x = 5$ o $x = -1$, y se concluye que hay dos soluciones. Esto es, cada uno de los puntos $(5, 3)$ y $(-1, 3)$ está a cinco unidades del punto $(2, -1)$, como muestra la Figura A.19. □

Las coordenadas del **punto medio** del segmento que une dos puntos puede hallarse «promediando» las coordenadas x de los dos puntos y «promediando» sus coordenadas y. Es decir, el punto medio del segmento que une los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) del plano es

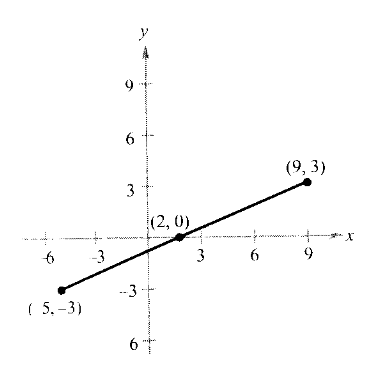


FIGURA A.20
Punto medio de un segmento.

$$\boxed{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)} \qquad \text{Fórmula del punto medio}$$

Por ejemplo, el punto medio del segmento que une los puntos $(-5, -3)$ y $(9, 3)$ es

$$\left(\frac{-5 + 9}{2}, \frac{-3 + 3}{2}\right) = (2, 0)$$

como se muestra en la Figura A.20.

Ecuaciones de circunferencias

Una **circunferencia** puede definirse como el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo. El punto fijo es el **centro** de la circunferencia, y la distancia entre el centro y un punto de la circunferencia es su **radio** (véase Figura A.21).

Se puede usar la fórmula de la distancia para escribir una ecuación de la circunferencia de centro (h, k) y radio r. Sea (x, y) cualquier punto de la circunferencia. Entonces, la distancia entre (x, y) y el centro (h, k) viene dada por

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

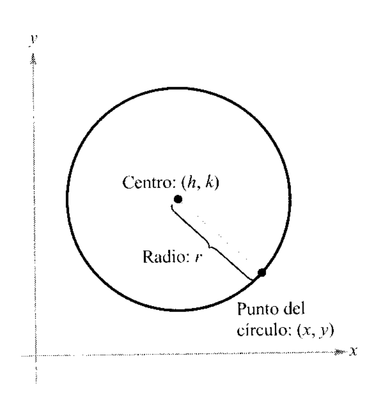


FIGURA A.21
Definición de circunferencia.

Elevando al cuadrado ambos miembros de esta ecuación, se obtiene la **forma canónica de la ecuación de una circunferencia**.

FORMA CANÓNICA DE LA ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA

El punto (x, y) pertenece a la circunferencia de radio r y centro (h, k) si y sólo si

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

PARA MÁS INFORMACIÓN
¿Es capaz de reconocer la gráfica de la ecuación

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 5x^2 - 5y^2 = -4?$$

La solución puede encontrarse en el artículo «Single Equations Can Draw Pictures» de Keith M. Kendig del número de marzo de 1991 de *The College Mathematics Journal.*

La forma canónica de la ecuación de una circunferencia con centro en el origen, $(h, k) = (0, 0)$, es

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Si $r = 1$, la circunferencia se llama la **circunferencia unidad**.

EJEMPLO 4 Determinación de la ecuación de una circunferencia

El punto $(3, 4)$ pertenece a una circunferencia cuyo centro está en $(-1, 2)$, como muestra la Figura A.22. Hallar una ecuación de la circunferencia.

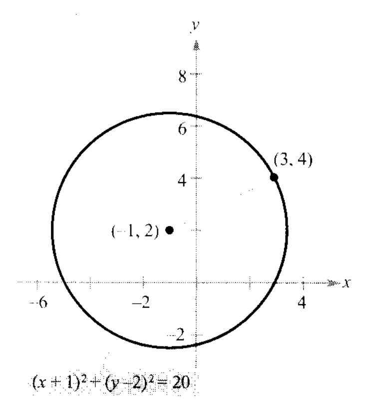


FIGURA A.22
Forma canónica de la ecuación de una circunferencia.

Solución: El radio de la circunferencia es la distancia entre $(-1, 2)$ y $(3, 4)$.

$$r = \sqrt{[3 - (-1)]^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

Podemos escribir la forma canónica de la ecuación de esta circunferencia como

$$[x - (-1)]^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{20})^2$$
$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 20 \qquad \text{Forma canónica}$$ □

Elevando al cuadrado y simplificando, la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ puede escribirse de la siguiente **forma general de la ecuación de una circunferencia**

$$\boxed{Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad A \neq 0}$$

Para llevar una ecuación de este tipo a la forma canónica

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = p$$

se puede utilizar un procedimiento denominado **completar cuadrados**. Si $p > 0$, la gráfica de la ecuación es una circunferencia. Si $p = 0$, la gráfica es el punto (h, k). Si $p < 0$, la ecuación carece de gráfica.

EJEMPLO 5 Completando cuadrados

Dibujar la gráfica de la circunferencia cuya ecuación general es

$$4x^2 + 4y^2 + 20x - 16y + 37 = 0$$

Solución: Para completar el cuadrado, primero dividimos por 4 de forma que los coeficientes de x^2 e y^2 sean ambos 1.

$$4x^2 + 4y^2 + 20x - 16y + 37 = 0 \qquad \text{Forma general}$$

$$x^2 + y^2 + 5x - 4y + \frac{37}{4} = 0 \qquad \text{Dividir por 4}$$

$$(x^2 + 5x + \quad) + (y^2 - 4y + \quad) = -\frac{37}{4} \qquad \text{Agrupar términos}$$

$$\left(x^2 + 5x + \underbrace{\frac{25}{4}}_{(\text{mitad})^2}\right) + (y - 4y + \underbrace{4}_{(\text{mitad})^2}) = -\frac{37}{4} + \frac{25}{4} + 4 \qquad \text{Completar el cuadrado sumando } \tfrac{25}{4} \text{ y 4 a ambos lados}$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = 1 \qquad \text{Forma canónica}$$

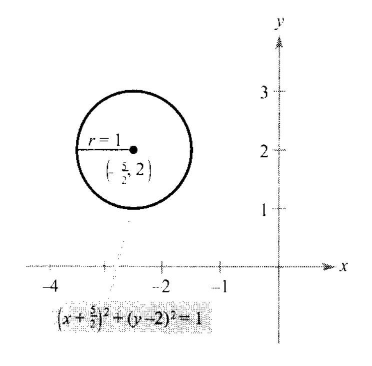


FIGURA A.23
Circunferencia de radio 1 y centro (−5/2, 2).

Observemos que se ha completado el cuadrado sumando a ambos miembros de la ecuación el cuadrado de la mitad del coeficiente de x y el cuadrado de la mitad del coeficiente de y. La circunferencia está centrada en $(-\frac{5}{2}, 2)$ y su radio es 1, como ilustra la Figura A.23. □

Ahora ya hemos revisado algunos conceptos fundamentales de *Geometría analítica*. Puesto que dichos conceptos son de uso común hoy en día, es fácil que su naturaleza revolucionaria pase desapercibida. En la época en que se estaba desarrollando la Geometría analítica, fundamentalmente por Pierre de Fermat y René Descartes, las dos ramas principales de las Matemáticas —Geometría y Álgebra— eran muy independientes una de otra. Las circunferencias pertenecían a la Geometría y las ecuaciones al Álgebra. La asociación de los puntos de una circunferencia con las soluciones de una ecuación forma parte de lo que hoy se llama Geometría analítica.

Es importante adquirir destreza en la Geometría analítica para poder moverse fácilmente entre la Geometría y el Álgebra. Así, en el Ejemplo 4, se daba una descripción geométrica de una circunferencia y se pedía hallar una ecuación algebraica de la misma. Nos movíamos, pues, de la Geometría al Álgebra. Análogamente, en el Ejemplo 5 se daba una ecuación algebraica y se pedía dibujar una imagen geométrica. En este caso, nos movíamos del Álgebra a la Geometría. Estos dos ejemplos ilustran los dos problemas más comunes en Geometría analítica.

1. Dada una gráfica, hallar su ecuación.

   Geometría ⇨ Álgebra

2. Dada una ecuación, hallar su gráfica.

   Álgebra ⇨ Geometría

En la próxima sección, se revisarán otros ejemplos de estos dos tipos de problemas.

Ejercicios de la Sección A.2

En los Ejercicios 1-6, *a*) dibujar los puntos, *b*) calcular la distancia entre los puntos, y *c*) hallar el punto medio del segmento que une los puntos

1. $(2, 1), (4, 5)$ **2.** $(-3, 2), (3, -2)$

3. $\left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{3}{2}, -5\right)$ **4.** $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(\frac{5}{6}, 1\right)$

5. $(1, \sqrt{3}), (-1, 1)$ **6.** $(-2, 0), (0, \sqrt{2})$

En los Ejercicios 7-10, probar que los puntos son los vértices del polígono. (Un rombo es un cuadrilátero cuyos lados tienen todos la misma longitud.)

	Vértices	*Polígono*
7.	$(4, 0), (2, 1), (-1, -5)$	Triángulo rectángulo
8.	$(1, -3), (3, 2), (-2, 4)$	Triángulo isósceles
9.	$(0, 0), (1, 2), (2, 1), (3, 3)$	Rombo
10.	$(0, 1), (3, 7), (4, 4), (1, -2)$	Paralelogramo

En los Ejercicios 11-14, determinar el cuadrante o los cuadrantes en que debe estar situado (x, y) para que se satisfagan la condición o las condiciones dadas.

11. $x = -2$ e $y > 0$

12. $y < -2$

13. $xy > 0$

14. $(x, -y)$ está en el segundo cuadrante.

15. ***Wal-Mart*** La siguiente tabla muestra el número y de almacenes Wal-Mart cada año x, desde 1987 hasta 1996.

x	1987	1988	1989	1990	1991
y	980	1.114	1.259	1.399	1.568

x	1992	1993	1994	1995	1996
y	1.714	1.848	1.950	1.985	1.995

Elegir escalas razonables en los ejes de coordenadas y representar los puntos (x, y).

16. ***Conjetura*** Marcar los puntos $(2, 1)$, $(-3, 5)$ y $(7, -3)$ en un sistema de coordenadas rectangulares. A continuación, cambiar el signo de la coordenada x de cada punto y marcar los tres nuevos puntos en el mismo sistema de coordenadas. ¿Qué conjetura se puede hacer sobre el efecto de cambiar el signo de la coordenada x de un punto? Repetir el ejercicio para el caso en que se cambia el signo de la coordenada y.

En los Ejercicios 17-20, determinar si los puntos pertenecen a una misma recta aplicando la fórmula de la distancia.

17. $(0, -4), (2, 0), (3, 2)$

18. $(0, 4)(, 7, -6), (-5, 11)$

19. $(-2, 1), (-1, 0), (2, -2)$

20. $(-1, 1), (3, 3), (5, 5)$

En los Ejercicios 21 y 22 hallar el valor de x que hace que la distancia entre los puntos sea 5.

21. $(0, 0), (x, -4)$ **22.** $(2, -1), (x, 2)$

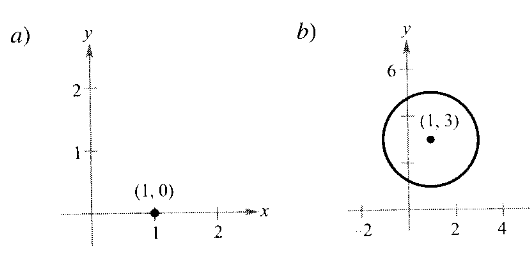
En los Ejercicios 23 y 24 hallar el valor de y que hace que la distancia entre los puntos sea 8.

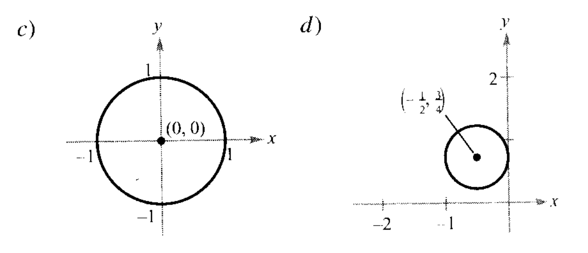
23. $(0, 0), (3, y)$ **24.** $(5, 1), (5, y)$

25. Usando la fórmula del punto medio, hallar los tres puntos que dividen el segmento que une (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en cuatro partes iguales.

26. Utilizar el resultado del Ejercicio 25 para hallar los puntos que dividen el segmento que une los puntos dados en cuatro partes iguales.
a) $(1, -2), (4, -1)$ *b*) $(-2, -3), (0, 0)$

En los Ejercicios 27-30, asociar a cada ecuación su gráfica.





27. $x^2 + y^2 = 1$

28. $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$

29. $(x - 1)^2 + y^2 = 0$

30. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{4}$

En los Ejercicios 31-38, escribir la ecuación de la circunferencia en forma general.

31. Centro: (0, 0)
Radio: 3

32. Centro: (0, 0)
Radio: 5

33. Centro: (2, −1)
Radio: 4

34. Centro: (−4, 3)
Radio: $\frac{5}{8}$

35. Centro: (−1, 2)
Punto de la circunferencia: (0, 0)

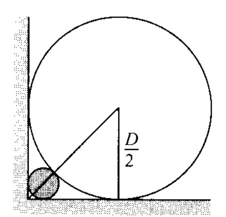
36. Centro: (3, −2)
Punto de la circunferencia: (−1, 1)

37. Extremos del diámetro: (2, 5), (4, −1)

38. Extremos del diámetro: (1, 1), (−1, −1)

39. ***Satélite de comunicaciones*** Escribir una ecuación de la trayectoria de un satélite de comunicaciones que describe una órbita circular a 22.000 millas de la superficie terrestre. (Suponer que el radio de la Tierra es 4.000 millas.)

40. ***Diseño de edificios*** Un conducto de aire circular de diámetro D está firmemente ajustado a la esquina que forma la pared de un sótano con el suelo (véase figura). Calcular el diámetro de la mayor tubería que puede pasarse por la esquina, tras el conducto de aire.



En los Ejercicios 41-48, escribir la ecuación de la circunferencia en forma canónica y dibujar su gráfica.

41. $x^2+y^2-2x+6y+6=0$

42. $x^2+y^2-2x+6y-15=0$

43. $x^2+y^2-2x+6y+10=0$

44. $3x^2+3y^2-6y-1=0$

45. $2x^2+2y^2-2x-2y-3=0$

46. $4x^2+4y^2-4x+2y-1=0$

47. $16x^2+16y^2+16x+40y-7=0$

48. $x^2+y^2-4x+2y+3=0$

En los Ejercicios 49 y 50, representar la ecuación con ayuda de una calculadora gráfica. (*Ayuda:* Puede ser necesario despejar y y representar las dos ecuaciones resultantes.)

49. $4x^2+4y^2-4x+24y-63=0$

50. $x^2+y^2-8x-6y-11=0$

En los Ejercicios 51 y 52, representar el conjunto de todos los puntos que satisfacen la desigualdad. Comprobar el resultado con una calculadora gráfica.

51. $x^2+y^2-4x+2y+1\leqslant 0$

52. $(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2>1$

53. Demostrar que

$$\left(\frac{2x_1+x_2}{3},\frac{2y_1+y_2}{3}\right)$$

es uno de los puntos de trisección del segmento que une (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Hallar el punto medio del segmento que une

$$\left(\frac{2x_1+x_2}{3},\frac{2y_1+y_2}{3}\right)$$

y (x_2, y_2) para encontrar el segundo punto de trisección.

54. Usando los resultados del Ejercicio 53, hallar los puntos de trisección del segmento que une los siguientes puntos.
a) (1, −2), (4, 1) *b)* (−2, −3), (0, 0)

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 55-58, determinar si la afirmación es cierta o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.

55. Si $ab<0$, el punto (a, b) está situado en el segundo cuadrante o en el cuarto.

56. La distancia entre los puntos $(a+b, a)$ y $(a-b, a)$ es $2b$.

57. Si la distancia entre dos puntos es cero, entonces los dos puntos coinciden.

58. Si $ab=0$, el punto (a, b) está en el eje x o en el eje y.

En los Ejercicios 59-62, demostrar la afirmación.

59. Los segmentos que unen los puntos medios de lados opuestos de un cuadrilátero se bisecan entre sí.

60. La mediatriz de una cuerda de circunferencia pasa por el centro de la circunferencia.

61. Todo ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.

62. El punto medio del segmento que une los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

A.3 Repaso de las funciones trigonométricas

Angulos y medida en grados

Un **ángulo** consta de tres partes: un **rayo inicial**, un rayo **terminal** y un **vértice** (el punto de intersección de los dos rayos), como muestra la Figura A.24. Un ángulo está en **posición normal** si su rayo inicial coincide con el eje x positivo y su vértice está en el origen. Supondremos que el lector está familiarizado con la medida de ángulos en grados*. Es práctica común utilizar θ (la letra griega theta minúscula) para representar tanto un ángulo como su medida. Los ángulos comprendidos entre 0° y 90° se llaman **agudos** y los ángulos comprendidos entre 90° y 180°, **obtusos**.

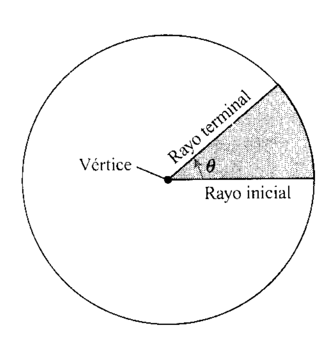


FIGURA A.24
Ángulo en posición normal.

Los ángulos positivos se miden en el sentido opuesto al de las agujas del reloj y los negativos, en el sentido de las agujas del reloj. Por ejemplo, la Figura A.25 muestra un ángulo cuya medida es −45°. No es posible asignar una medida a un ángulo si sólo se conocen las posiciones de sus rayos inicial y terminal. Para medir un ángulo, también es necesario conocer cómo ha girado el rayo terminal. Por ejemplo, la Figura A.25 muestra que el ángulo que mide −45° tiene el mismo rayo terminal que el que mide 315°. Tales ángulos se denominan **coterminales**. En general, si θ es cualquier ángulo, entonces

$$\theta + n(360), \qquad \text{donde } n \text{ es un entero no nulo}$$

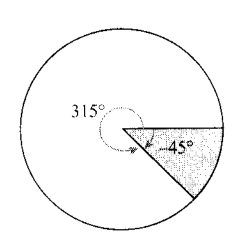


FIGURA A.25
Ángulos coterminales.

es coterminal con θ.

Un ángulo mayor que 360° es aquel cuyo rayo terminal ha girado más de una vuelta completa en el sentido opuesto al de las agujas del reloj, como ilustra la Figura A.26. Se puede conseguir un ángulo cuya medida sea menor que −360° girando un rayo terminal más de una vuelta completa en el sentido de las agujas del reloj.

Nota. Se suele usar el símbolo θ para denotar tanto un *ángulo* como su *medida*. Por ejemplo, en la Figura A.26, se puede expresar la medida del ángulo más pequeño como $\theta = 45°$.

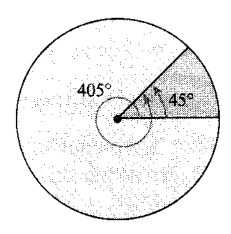


FIGURA A.26
Ángulos coterminales.

Medida en radianes

Para asignar una medida en radianes a un ángulo θ, consideremos θ como ángulo central de un círculo de radio 1 (véase Figura A.27). La **medida en radianes** de θ se define entonces como la longitud del arco del sector. Dado que el perímetro de un círculo es $2\pi r$, el de un **círculo unidad** (de radio 1) es 2π. Esto implica que la medida en radianes de un ángulo que mide 360° es 2π. En otras palabras, $360° = 2\pi$ radianes.

---

* Puede encontrarse una revisión más completa de la Trigonometría en el libro *Precalculus*, 4.ª edición, de Larson y Hostetler (Boston, Massachusetts, Houghton Mifflin, 1997).

Midiendo θ en radianes, la longitud s de un arco circular de radio r (véase Figura A.28) es $s = r\theta$.

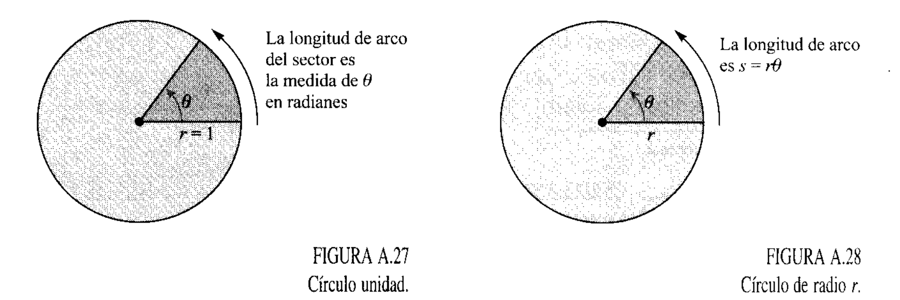
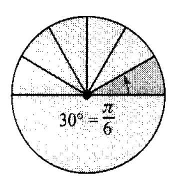
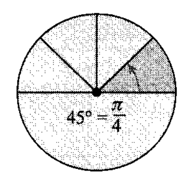


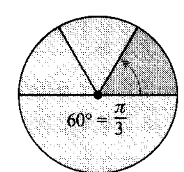
FIGURA A.27
Círculo unidad.

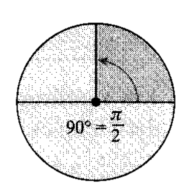
FIGURA A.28
Círculo de radio r.

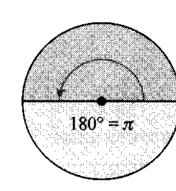
Es conveniente conocer las conversiones entre grados y radianes de los ángulos más usuales, mostradas en la Figura A.29. Para otros ángulos, se puede aplicar el hecho de que 180° es igual a π radianes.











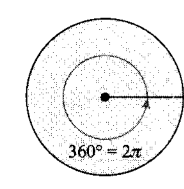


FIGURA A.29
Medidas en grados y en radianes de varios ángulos frecuentes.

EJEMPLO 1 Conversiones entre grados y radianes

a) $40° = (40 \cancel{\text{grados}})\left(\dfrac{\pi \text{ rad}}{180 \cancel{\text{grados}}}\right) = \dfrac{2\pi}{9}$ radianes

b) $-270° = (-270 \cancel{\text{grados}})\left(\dfrac{\pi \text{ rad}}{180 \cancel{\text{grados}}}\right) = -\dfrac{3\pi}{2}$ radianes

c) $-\dfrac{\pi}{2}$ radianes $= \left(-\dfrac{\pi}{2} \cancel{\text{rad}}\right)\left(\dfrac{180 \text{ grados}}{\pi \cancel{\text{rad}}}\right) = -90°$

d) $\dfrac{9\pi}{2}$ radianes $= \left(\dfrac{9\pi}{2} \cancel{\text{rad}}\right)\left(\dfrac{180 \text{ grados}}{\pi \cancel{\text{rad}}}\right) = 810°$ □

Funciones trigonométricas

Existen dos acercamientos comunes al estudio de la trigonometría. En uno de ellos, las funciones trigonométricas se definen como cocientes de dos lados de un triángulo rectángulo. En el otro, estas funciones se definen en términos de un punto del lado terminal de un ángulo en posición normal. Definiremos las seis funciones trigonométricas: **seno**, **coseno**, **tangente**, **cotangente**, **secante** y **cosecante** (abreviadas como sen, cos, etc.) desde ambos puntos de vista.

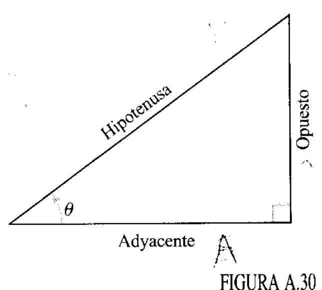


FIGURA A.30
Lados de un triángulo rectángulo.

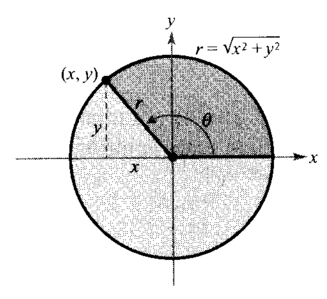


FIGURA A.31
Ángulo en posición normal.

DEFINICIÓN DE LAS SEIS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Definiciones con un triángulo rectángulo, donde $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ (véase Figura A.30).

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} \qquad \sec\theta\,\frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} \qquad \operatorname{ctg}\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$$

Definiciones como funciones circulares, donde θ es un ángulo arbitrario (véase Figura A.31).

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} \qquad \operatorname{ctg}\theta = \frac{x}{y}$$

Las siguientes identidades trigonométricas son consecuencias directas de las definiciones. (ϕ es la letra griega fi.)

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS [Obsérvese que $\operatorname{sen}^2\theta$ se usa para representar $(\operatorname{sen}\theta)^2$]

Identidades de Pitágoras

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\operatorname{ctg}^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta$

Fórmulas de reducción

$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}(\theta - \pi)$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\qquad$ $\cos\theta = -\cos(\theta - \pi)$

$\operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg}\theta$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\theta - \pi)$

Suma o diferencia de dos ángulos

$\operatorname{sen}(\theta \pm \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi \pm \cos\phi\operatorname{sen}\phi$

$\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$

$$\operatorname{tg}(\theta \pm \phi) = \frac{\operatorname{tg}\theta \pm \operatorname{tg}\phi}{1 \mp \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\phi}$$

Fórmulas del ángulo mitad

$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$

$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$

Fórmulas del ángulo doble

$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$= 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$

$= \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

Teorema del coseno

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

b a A c

Identidades recíprocas

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

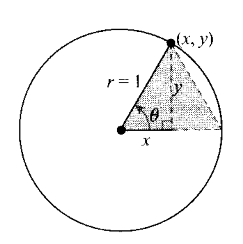
$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$$

Identidades de cocientes

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Evaluación de funciones trigonométricas



Existen dos formas de evaluar funciones trigonométricas: 1) aproximaciones decimales usando una calculadora (o una tabla trigonométrica) y 2) evaluaciones exactas usando identidades trigonométricas y fórmulas de la Geometría. Cuando se use una calculadora para evaluar una función trigonométrica, no hay que olvidar establecer el modo adecuado: grados o radianes.

EJEMPLO 2 Evaluación exacta de funciones trigonométricas

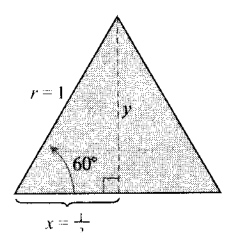


FIGURA A.32
El ángulo de $\pi/3$ en posición canónica.

Evaluar el seno, el coseno y la tangente de $\frac{\pi}{3}$.

Solución: Comencemos por dibujar el ángulo en posición normal, como muestra la Figura A.32. Como $60° = \pi/3$, podemos dibujar un triángulo equilátero con lados de longitud 1 y uno de cuyos ángulos sea θ. Puesto que la altura de este triángulo biseca la base, sabemos que $x = \frac{1}{2}$. Usando el teorema de Pitágoras, obtenemos

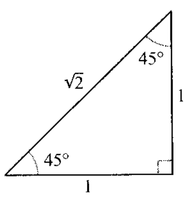
$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ahora, conociendo los valores de x, y y r, podemos escribir lo siguiente.

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{x}{r} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$ □



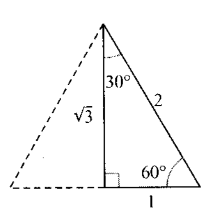


FIGURA A.33
Ángulos de uso común.

Nota. En este texto, todos los ángulos se miden en radianes salvo que se especifique lo contrario. Por ejemplo, cuando escribimos sen 3, significa el seno de 3 radianes y cuando escribimos sen 3° significa el seno de 3 grados.

La tabla de la página siguiente proporciona las medidas en ángulos y en radianes de varios ángulos comunes, junto con los correspondientes valores del seno, el coseno y la tangente (véase Figura A.33).

La Figura A.34 muestra los signos de las funciones seno, coseno y tangente en función del cuadrante. Para extender el uso de la tabla precedente a ángulos en cuadrantes distintos del primero, se puede recurrir al concepto de **ángulo de referencia** (véase Figura A.35), teniendo en cuenta el signo adecuado al cuadrante. Por ejemplo, el ángulo de referencia de $3\pi/4$ es $\pi/4$ y, como el seno es positivo en el segundo cuadrante, podemos escribir

$$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = + \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

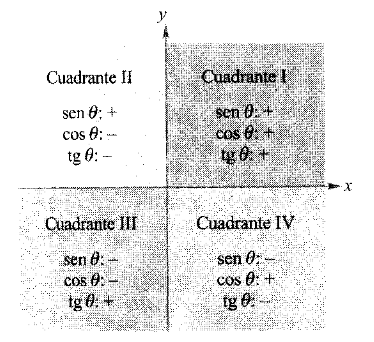


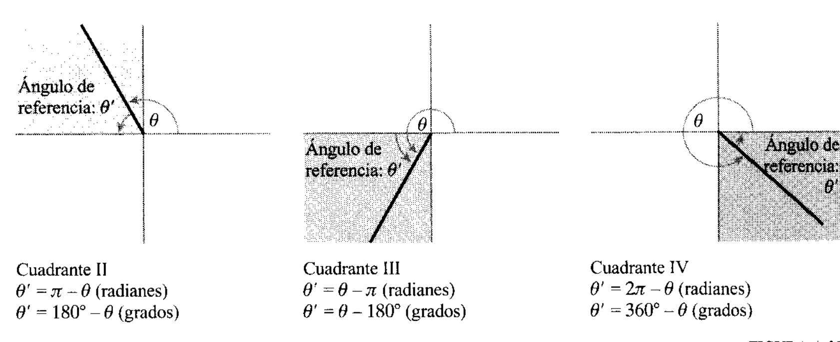
FIGURA A.34
Signos de las funciones trigonométricas en cada cuadrante.

Ángulos comunes del primer cuadrante

Grados	0	30°	45°	60°	90°
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg θ	0	$\frac{\sqrt{3}}{1}$	1	$\sqrt{3}$	No definida

Análogamente, como el ángulo de referencia de 330° es 30° y la tangente es negativa en el cuarto cuadrante, podemos escribir

$$\text{tg } 330° = -\text{tg } 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



Cuadrante II
$\theta' = \pi - \theta$ (radianes)
$\theta' = 180° - \theta$ (grados)

Cuadrante III
$\theta' = \theta - \pi$ (radianes)
$\theta' = \theta - 180°$ (grados)

Cuadrante IV
$\theta' = 2\pi - \theta$ (radianes)
$\theta' = 360° - \theta$ (grados)

FIGURA A.35

EJEMPLO 3 Identidades trigonométricas y calculadoras

Evaluar la expresión trigonométrica

a) $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ *b*) sec 60° *c*) cos (1,2)

Solución:

a) Aplicando la fórmula de reducción sen $(-\theta) = -\text{sen } \theta$, resulta

$$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\text{sen } \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Usando la identidad recíproca sec $\theta = 1/\cos \theta$, vemos que

$$\sec 60° = \frac{1}{\cos 60°} = \frac{1}{1/2} = 2$$

c) Utilizando una calculadora se obtiene

$$\cos(1{,}2) \approx 0{,}3624$$

Recordemos que 1,2 se da en *radianes*. En consecuencia, la calculadora debe usarse en modo de radianes. □

Resolución de ecuaciones trigonométricas

¿Cómo resolver la ecuación sen $\theta = 0$? Sabemos que $\theta = 0$ es una solución, pero no es la única. Cualquiera de los siguientes valores de θ también es solución.

$$\cdots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$$

Podemos expresar este conjunto solución infinito como $\{n\pi: n \text{ es entero}\}$.

EJEMPLO 4 Resolución de una ecuación trigonométrica

Resolver la ecuación

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Solución: Para resolver la ecuación, debemos tener en cuenta que el seno es negativo en los cuadrantes III y IV y que

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Así pues, buscamos valores de θ en los cuadrantes tercero y cuarto que tengan un ángulo de referencia de $\pi/3$. En el intervalo $[0, 2\pi]$, los dos ángulos que cumplen estos requisitos son

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \quad \text{y} \quad \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

Sumando múltiplos enteros de 2π a cada una de estas soluciones, se obtiene la siguiente solución general.

$$\theta = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi \quad \text{o} \quad \theta = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi \text{ donde } n \text{ es un entero.}$$

(Véase Figura A.36.) □

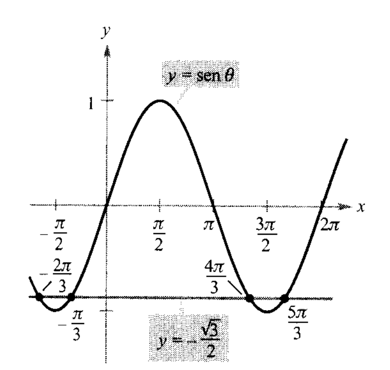


FIGURA A.36
Puntos solución de sen $\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

EJEMPLO 5 Resolución de una ecuación trigonométrica

Resolver $\cos 2\theta = 2 - 3\operatorname{sen}\theta$, donde $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Solución: Usando la identidad del ángulo doble $\cos 2\theta = 1 - 2\,\text{sen}^2\,\theta$, podemos escribir la ecuación como sigue.

$\cos 2\,\theta = 2 - 3\,\text{sen}\,\theta$	Ecuación dada
$1 - 2\,\text{sen}^2\,\theta = 2 - 3\,\text{sen}\,\theta$	Identidad trigonométrica
$0 = 2\,\text{sen}^2\,\theta - 3\,\text{sen}\,\theta + 1$	Ecuación en forma cuadrática
$0 = (2\,\text{sen}\,\theta - 1)(\text{sen}\,\theta - 1)$	Factorizar

Si $\text{sen}\,\theta - 1 = 0$, entonces $\text{sen}\,\theta = 1/2$ y $\theta = \pi/6$ o $\theta = 5\pi/6$. Si $\text{sen}\,\theta - 1 = 0$, entonces $\text{sen}\,\theta = 1$ y $\theta = \pi/2$. Así pues, para $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, hay tres soluciones.

$$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\ \text{o}\ \frac{\pi}{2}$$ □

Gráficas de funciones trigonométricas

Se dice que una función f es **periódica** si existe un número no nulo p tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo x en el dominio de f. El menor de tales valores positivos de p (si existe) se llama el **período** de f. Cada una de las funciones seno, coseno, secante y cosecante tiene período 2π y las otras dos funciones trigonométricas tienen período π, como ilustra la Figura A.37.

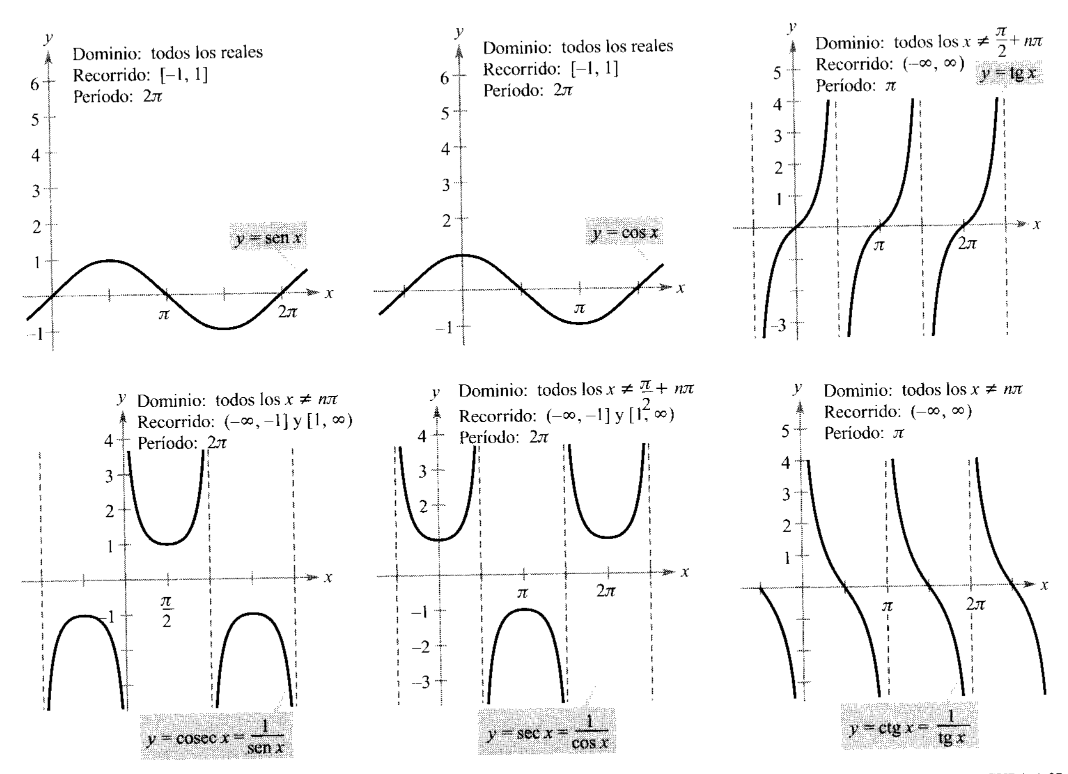


FIGURA A.37
Las gráficas de las seis funciones trigonométricas.

Observemos en la Figura A.37 que el valor máximo de sen x y el de cos x es 1, y el valor mínimo es -1. Las gráficas de las funciones $y = a$ sen bx e $y = a \cos bx$ oscilan entre $-a$ y a, luego tienen una **amplitud** de $|a|$. Además, como $bx = 0$ cuando $x = 0$ y $bx = 2\pi$ cuando $x = 2\pi/b$, se deduce que cada una de las funciones $y = a$ sen bx e $y = a \cos bx$ tiene período $2\pi/|b|$. La siguiente tabla resume las amplitudes y períodos de varios tipos de funciones trigonométricas.

Función	Período	Amplitud
$y = a$ sen bx o $y = a \cos bx$	$\dfrac{2\pi}{|b|}$	$|a|$
$y = a$ tg bx o $y = a$ ctg bx	$\dfrac{\pi}{|b|}$	No aplicable
$y = a \sec bx$ o $y = a$ cosec bx	$\dfrac{2\pi}{|b|}$	No aplicable

EJEMPLO 6 Esbozo de la gráfica de una función trigonométrica

Esbozar la gráfica de $f(x) = 3 \cos 2x$.

Solución: La gráfica de $f(x) = 3 \cos 2x$ tiene amplitud 3 y período $2\pi/2 = \pi$. Utilizando la forma de la gráfica de la función coseno, dibujamos un período de la función en el intervalo $[0, \pi]$, conforme al siguiente patrón

$$\text{Máximo: } (0, 3) \qquad \text{Mínimo: } \left(\frac{\pi}{2}, -3\right) \qquad \text{Máximo: } [\pi, 3]$$

Repitiendo este modelo, podemos esbozar varios ciclos de la gráfica, como muestra la Figura A.38. □

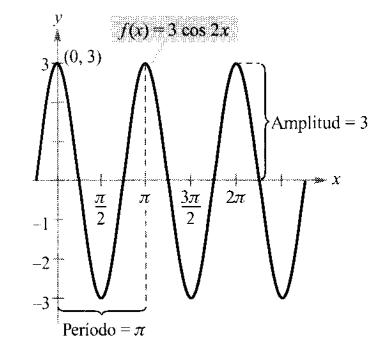


FIGURA A.38

Pueden aplicarse traslaciones horizontales, verticales y reflexiones a las gráficas de las funciones trigonométricas, como ilustra el Ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Traslaciones de gráficas de funciones trigonométricas

Esbozar las gráficas de las siguientes funciones.

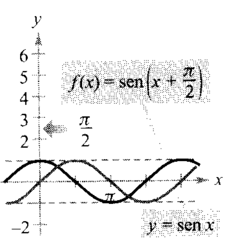
a) $f(x) = \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ *b)* $f(x) = 2 + \text{sen}\, x$ *c)* $f(x) = 2 + \text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

Solución:

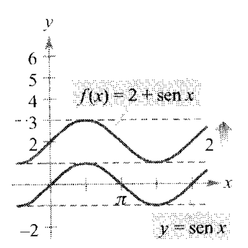
a) Para trazar la gráfica de $f(x) =$ sen $(x + \pi/2)$, trasladamos la gráfica de $y =$ sen x $\pi/2$ unidades a la izquierda, como muestra la Figura A.39*a*.

b) Para trazar la gráfica de $f(x) = 2 +$ sen x, trasladamos la gráfica de $y =$ sen x dos unidades hacia arriba, como muestra la Figura A.39*b*.

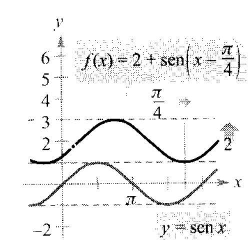
c) Para trazar la gráfica de $f(x) = 2 + \text{sen}\,(x - \pi/4)$, trasladamos la gráfica de $y = \text{sen}\, x$ dos unidades hacia arriba y $\pi/4$ unidades a la derecha, como muestra la Figura A.39*c*.



a) Traslación horizontal hacia la izquierda



b) Traslación vertical hacia arriba



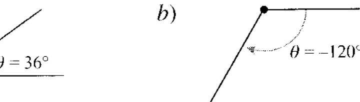
c) Traslaciones horizontal y vertical

FIGURA A.39
Transformaciones de la gráfica de $y = \text{sen}\, x$.

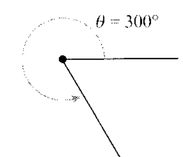
Ejercicios de la Sección A.3

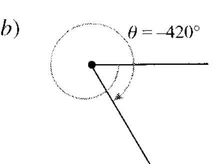
En los Ejercicios 1 y 2, determinar dos ángulos coterminales (uno positivo y otro negativo) con el ángulo dado. Expresar las respuestas en grados.

1. *a*) *b*)



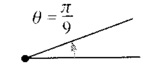
2. *a*) *b*)

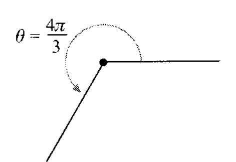




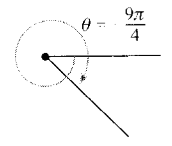
En los Ejercicios 3 y 4, determinar dos ángulos coterminales (uno positivo y otro negativo) con el ángulo dado. Expresar las respuestas en radianes.

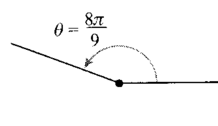
3. *a*) *b*)





4. *a*) *b*)





En los Ejercicios 5 y 6, expresar los ángulos en radianes como múltiplos de π y como números decimales con una precisión de tres cifras decimales.

5. *a*) $30°$ *b*) $150°$ *c*) $315°$ *d*) $120°$

6. *a*) $-20°$ *b*) $-240°$ *c*) $-270°$ *d*) $144°$

En los Ejercicios 7 y 8, expresar los ángulos en grados.

7. *a*) $\frac{3\pi}{2}$ *b*) $\frac{7\pi}{6}$ *c*) $-\frac{7\pi}{12}$ *d*) $-2{,}367$

8. *a*) $\frac{7\pi}{3}$ *b*) $-\frac{11\pi}{30}$ *c*) $\frac{11\pi}{6}$ *d*) $0{,}438$

9. Denotemos por r el radio de un círculo, por θ un ángulo central (medido en radianes) y por s la longitud del arco subtendido por el ángulo. Completar la tabla utilizando la relación $s = r\theta$.

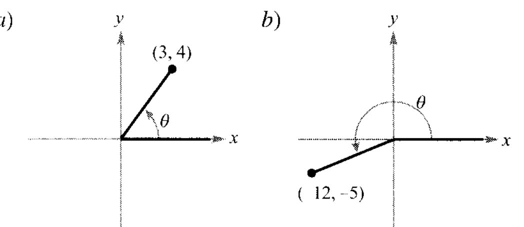
r	8 pies	15 pulg.	85 cm		
s	12 pies			96 pulg.	8.642 millas
θ		1,6	$\frac{3\pi}{4}$	4	$\frac{2\pi}{3}$

10. ***Velocidad angular*** Un coche se desplaza a una velocidad de 50 millas por hora, y el diámetro de sus ruedas es 2,5 pies.

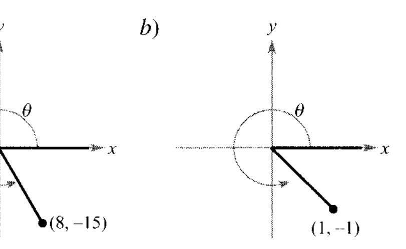
a) Hallar el número de revoluciones por minuto que están efectuando las ruedas.
b) Hallar la velocidad angular de las ruedas en radianes por minuto.

En los Ejercicios 11 y 12, determinar los valores de las seis funciones trigonométricas para el ángulo θ?

11. *a*) *b*)



12. *a*) *b*)



En los Ejercicios 13 y 14, determinar el cuadrante al que pertenece θ.

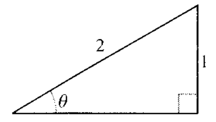
13. *a*) $\operatorname{sen} \theta < 0$ y $\cos \theta < 0$
b) $\sec \theta > 0$ y $\operatorname{ctg} \theta < 0$

14. *a*) $\operatorname{sen} \theta > 0$ y $\cos \theta < 0$
b) $\operatorname{cosec} \theta < 0$ y $\operatorname{tg} \theta > 0$

En los Ejercicios 15-18, evaluar la función trigonométrica.

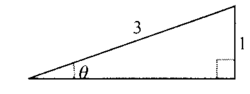
15. $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$

cos = ▒



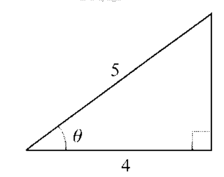
16. $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{3}$

$\operatorname{tg} \theta =$ ▒



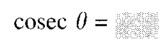
17. $\operatorname{sen} \theta = \frac{4}{5}$

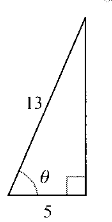
ctg = ▒



18. $\operatorname{sen} \theta = \frac{13}{5}$

$\operatorname{cosec} \theta =$ ▒





En los Ejercicios 19-22, evaluar el seno, el coseno y la tangente de cada ángulo *sin* la ayuda de una calculadora.

19. *a*) $60°$
b) $120°$
c) $\frac{\pi}{4}$
d) $\frac{5\pi}{4}$

20. *a*) $-30°$
b) $150°$
c) $-\frac{\pi}{6}$
d) $\frac{\pi}{2}$

21. *a*) $225°$
b) $-225°$
c) $\frac{5\pi}{3}$
d) $\frac{11\pi}{6}$

22. *a*) $750°$
b) $510°$
c) $\frac{10\pi}{3}$
d) $\frac{17\pi}{3}$

En los Ejercicios 23-26, evaluar con una calculadora las funciones trigonométricas con cuatro cifras significativas.

23. *a*) sen 10°
b) cosec 10°

24. *a*) sec 225°
b) sec 135°

25. *a*) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{9}$
b) $\operatorname{tg} \frac{10\pi}{9}$

26. *a*) ctg (1,35)
b) tg (1,35)

En los Ejercicios 27-30, hallar dos soluciones de cada ecuación. Expresar los resultados en radianes ($0 \leqslant \theta < 2\pi$). No usar calculadora.

27. *a*) $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

28. *a*) $\sec \theta = 2$
b) $\sec \theta = -2$

29. *a*) $\operatorname{tg} \theta = 1$
b) $\operatorname{ctg} \theta = -\sqrt{3}$

30. *a*) $\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\operatorname{sen} \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

En los Ejercicios 31-38, resolver la ecuación para θ ($0 \leqslant \theta < 2\pi$).

31. $2 \operatorname{sen}^2 \theta = 1$

32. $\tan^2 \theta = 3$

33. $\operatorname{tg}^2 \theta - \operatorname{tg} \theta = 0$

34. $2 \cos^2 \theta - \cos \theta = 1$

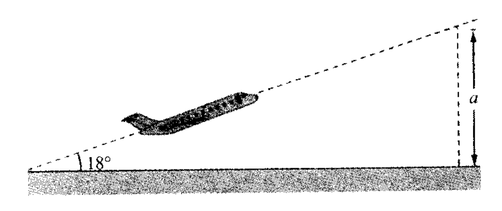
35. $\sec \theta \operatorname{cosec} \theta = 2 \operatorname{cosec} \theta$

36. $\operatorname{sen} \theta = \cos \theta$

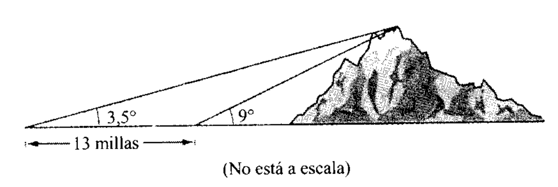
37. $\cos^2 \theta + \operatorname{sen} \theta = 1$

38. $\cos \frac{\theta}{2} - \cos \theta = 1$

39. ***Ascenso de un aeroplano*** Un aeroplano despega de la pista con una inclinación de 18° y una velocidad de 275 pies por segundo (véase figura). Hallar la altura a del avión transcucurrido 1 minuto.



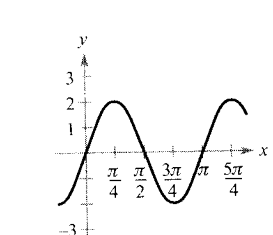
40. ***Altura de una montaña*** Una persona que viaja por un llano divisa una montaña justo enfrente de ella. Su ángulo de elevación (hacia la cumbre) es 3,5°. Tras conducir 13 millas hacia la montaña, el ángulo de inclinación es 9°. Estimar la altura de la montaña.

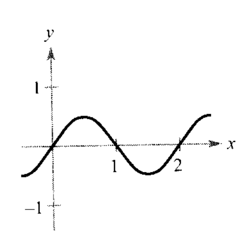


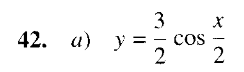
(No está a escala)

En los Ejercicios 41-44, determinar el período y la amplitud de cada función.

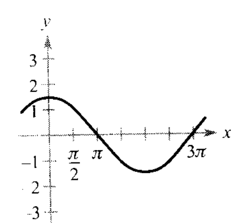
41. *a*) $y = 2 \text{ sen } 2x$ *b*) $y = \frac{1}{2} \text{ sen } \pi x$

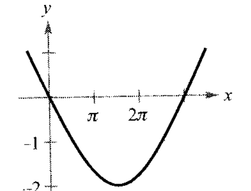






42. *a*) $y = \frac{3}{2} \cos \frac{x}{2}$ *b*) $y = -2 \text{ sen } \frac{x}{3}$





43. $y = 3 \text{ sen } 4 \pi x$

44. $y = \frac{2}{3} \cos \frac{\pi x}{10}$

En los Ejercicios 45-48, hallar el período de la función.

45. $y = 5 \text{ tg } 2x$ **46.** $y = 7 \text{ tg } 2 \pi x$

47. $y = \sec 5x$ **48.** $y = \text{cosec } 4x$

Redacción En los Ejercicios 49 y 50, usar una calculadora gráfica para representar cada función para $c = -2$, $c = -1$, $c = 1$ y $c = 2$ en un mismo sistema de coordenadas. Describir por escrito el cambio en la gráfica que ocasiona el cambio de c.

49. *a*) $f(x) = c \text{ sen } x$
b) $f(x) = \cos (cx)$
c) $f(x) = \cos (\pi x - c)$

50. *a*) $f(x) = \text{sen } x + c$
b) $f(x) = -\text{sen } (2\pi x - c)$
c) $f(x) = c \cos x$

En los Ejercicios 51-62, esbozar la gráfica de la función.

51. $y = \text{sen } \frac{x}{2}$ **52.** $y = 2 \cos 2x$

53. $y = -\text{sen } \frac{2\pi x}{3}$ **54.** $y = 2 \text{ tg } x$

55. $y = \text{cosec } \frac{x}{2}$ **56.** $y = \text{tg } 2x$

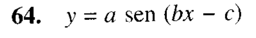
57. $y = 2 \sec 2x$ **58.** $y = \text{cosec } 2 \pi x$

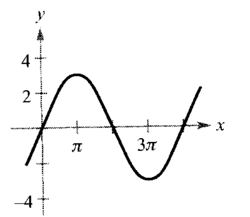
59. $y = \text{sen } (x + \pi)$ **60.** $y = \cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

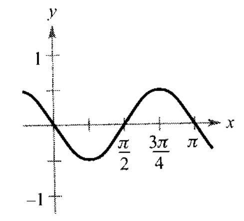
61. $y = 1 + \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **62.** $y = 1 + \text{sen } \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Razonamiento gráfico En los Ejercicios 63 y 64, encontrar los valores de a, b y c que hacen que la gráfica de la función se ajuste a la de la figura.

63. $y = a \cos (bx - c)$ **64.** $y = a \text{ sen } (bx - c)$







65. ***Para pensar*** Esbozar las gráficas de $f(x) = \text{sen } x$, $g(x) = |\text{sen } x|$ y $h(x) = \text{sen } (|x|)$. En general, ¿cómo están relacionadas las gráficas de $|f(x)|$ y de $f(|x|)$ con la de f?

66. ***Para pensar*** El modelo que describe la altura de un coche en la rueda Ferris es

$$h = 51 + 50 \text{ sen } 8\pi t$$

donde t se mide en minutos. (La rueda Ferris tiene un radio de 50 pies.) Este modelo da una altura de 51 pies cuando $t = 0$. Modificar el modelo de forma que la altura del coche sea de 1 pie cuando $t = 0$.

67. ***Ventas*** Las ventas S, en millones de unidades, de un producto de temporada admiten el modelo

$$S = 58{,}3 + 32{,}5 \cos \frac{\pi t}{6}$$

donde t es el tiempo en meses ($t = 1$ corresponde a enero). Representar el modelo con una calculadora y determinar los meses en los que las ventas sobrepasan las 75.000 unidades.

68. ***Investigación*** Dos funciones trigonométricas f y g tienen período 2 y sus gráficas se cortan en $x = 5{,}35$.

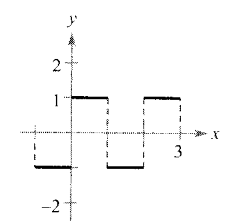
a) Dar un valor menor y uno mayor de x en los cuales las funciones tengan el mismo valor.

b) Determinar un valor negativo de x en el que las gráficas se corten.

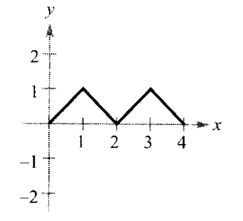
c) ¿Es cierto que $f(13{,}35) = g(-4{,}65)$? Razonar la respuesta.

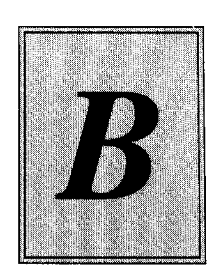
Reconocimiento de pauta En los Ejercicios 69 y 70, use una calculadora para comparar la gráfica de f con la gráfica dada. Trate de mejorar la aproximación sumando un término a $f(x)$. Con una calculadora, compruebe que su nueva aproximación es mejor que la original. ¿Puede encontrar otros términos que sumados hagan la aproximación aún mejor? ¿Cuál es la pauta? (Para mejorar la aproximación, se pueden usar términos con seno en el Ejercicio 69, y términos con coseno en el Ejercicio 70.)

69. $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\left(\text{sen } \pi x + \dfrac{1}{3} \text{ sen } 3\pi x\right)$



70. $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}\left(\cos \pi x + \dfrac{1}{9} \text{ sen } 3\pi x\right)$





Demostraciones de teoremas seleccionados

TEOREMA 1.2 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES (Propiedades 2, 3, 4 y 5) (página 66)

Sean b y c números reales, n un entero positivo, y sean f, g funciones con los siguientes límites:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c} g(x) = K$$

2. Suma o diferencia: $\lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$
3. Producto: $\lim_{x\to c} [f(x)g(x)] = LK$
4. Cociente: $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{K}$, siempre que $K \neq 0$
5. Potencias: $\lim_{x\to c} [f(x)]^n = L^n$

Demostración: Para demostrar la propiedad 2, tomemos un $\varepsilon > 0$. Como $\varepsilon/2 > 0$, sabemos que existe algún $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x - c| < \delta_1$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon/2$. Sabemos además que existe $\delta_2 > 0$ tal que $0 < |x - c| < \delta_2$ implica $|g(x) - K| < \varepsilon/2$. Sea δ el menor de los dos números δ_1 y δ_2. Entonces, $0 < |x - c| < \delta$ implica

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |g(x) - K| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por tanto, aplicando la desigualdad triangular deducimos que

$$|[f(x) + g(x)] - (L + K)| \leqslant |f(x) - L| + |g(x) - K| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

lo cual implica que

$$\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = L + K = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$$

De manera análoga se demuestra

$$\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = L - K$$

Para probar la propiedad 3, consideremos que al ser

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c} g(x) = K$$

podemos escribir

$$f(x)g(x) = [f(x) - L][g(x) - K] + [Lg(x) + Kf(x)] - LK$$

Como el límite de $f(x)$ es L y el límite de $g(x)$ es K, sabemos que

$$\lim_{x \to c} [f(x) - L] = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c} [g(x) - K] = 0$$

Sea $0 < \varepsilon < 1$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta$, entonces

$$|f(x) - L - 0| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |g(x) - K - 0| < \varepsilon$$

de donde se deduce que

$$|[f(x) - L][g(x) - K] - 0| = |f(x) - L||g(x) - K| < \varepsilon\varepsilon < \varepsilon$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to c} [f(x) - L][g(x) - K] = 0$$

Además, por la propiedad 1 sabemos que

$$\lim_{x \to c} Lg(x) = LK \text{ y } \lim_{x \to c} Kf(x) = KL$$

Finalmente, de la propiedad 2 se sigue que

$$\begin{aligned}\lim_{x \to c} f(x)g(x) &= \lim_{x \to c} [f(x) - L][g(x) - K] + \lim_{x \to c} Lg(x) + \lim_{x \to c} Kf(x) - \lim_{x \to c} LK \\ &= 0 + LK + KL - LK \\ &= LK\end{aligned}$$

Respecto de la propiedad 4, basta demostrar que

$$\lim_{x \to c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{K}$$

Pues bien, la propiedad 3 nos permite escribir

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} f(x)\frac{1}{g(x)} = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} \frac{1}{g(x)} = \frac{L}{K}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{x \to c} g(x) = K$, existe algún $\delta_1 > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta_1, \text{ entonces } |g(x) - K| < \frac{|K|}{2}$$

lo cual implica que

$$|K| = |g(x) + [|K| - g(x)]| \leqslant |g(x)| + ||K| - g(x)| < |g(x)| + \frac{|K|}{2}$$

Esto es, para $0 < |x - c| < \delta_1$

$$\frac{|K|}{2} < |g(x)|, \text{ es decir, } \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|K|}$$

Análogamente, existe un $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta_2$, entonces

$$|g(x) - K| < \frac{|K|^2}{2}\varepsilon$$

Sea δ el menor de los números δ_1 y δ_2. Para $0 < |x - c| < \delta$, será

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{K}\right| = \left|\frac{K - g(x)}{g(x)K}\right| = \frac{1}{|K|} \cdot \frac{1}{|g(x)|}|K - g(x)| < \frac{1}{|K|} \cdot \frac{2}{|K|}\frac{|K|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Así pues,

$$\lim_{x \to c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{K}$$

Por fin, la propiedad 5 se demuestra directamente usando inducción junto con la propiedad 3. □

TEOREMA 1.4 **LÍMITE DE UNA FUNCIÓN RADICAL (página 67)**

Sea n un entero positivo. El siguiente límite es válido para todo c si n es impar, y para todo $c > 0$ si n es par.

$$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$

Demostración: Consideremos el caso en que $c > 0$ y n es un entero positivo. Dado un $\varepsilon > 0$, necesitamos encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{c}| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - c| < \delta$$

lo que equivale a decir

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{c} < \varepsilon \text{ siempre que } -\delta < x - c < \delta$$

Supongamos $\varepsilon < \sqrt[n]{c}$, de manera que $0 < \sqrt[n]{c} - \varepsilon < \sqrt[n]{c}$. Sea ahora δ el menor de los dos números

$$c - (\sqrt[n]{c} - \varepsilon)^n \text{ y } (\sqrt[n]{c} + \varepsilon)^n - c$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
-\delta < x - c &< \delta \\
-[c - (\sqrt[n]{c} - \varepsilon)^n] < x - c &< (\sqrt[n]{c} + \varepsilon)^n - c \\
(\sqrt[n]{c} - \varepsilon)^n - c < x - c &< (\sqrt[n]{c} + \varepsilon)^n - c \\
(\sqrt[n]{c} - \varepsilon)^n < x &< (\sqrt[n]{c} + \varepsilon)^n \\
\sqrt[n]{c} - \varepsilon < \sqrt[n]{x} &< \sqrt[n]{c} + \varepsilon \\
-\varepsilon < \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{c} &< \varepsilon
\end{aligned}$$

TEOREMA 1.5 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA (página 67)

Si f y g son funciones tales que $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to L} f(x) = f(L)$, entonces

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L)$$

Demostración: Para cualquier $\varepsilon > 0$ dado, hemos de encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - c| < \delta$$

Como el límite de $f(x)$ cuando $x \to L$ es $f(L)$, sabemos que existe algún $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(u) - f(L)| < \varepsilon \text{ siempre que } |u - L| < \delta_1$$

Por otra parte, como el límite de $g(x)$ cuando $x \to c$ es L, sabemos asimismo que existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(x) - L| < \delta_1 \text{ siempre que } 0 < |x - c| < \delta$$

Finalmente, haciendo $u = g(x)$ se tiene que

$$|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - c| < \delta$$ □

TEOREMA 1.7 FUNCIONES QUE COINCIDEN SALVO EN UN PUNTO (página 69)

Sea c un número real y sea $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq c$ en un intervalo abierto que contiene c. Si existe el límite de $g(x)$ cuando x tiende a c, entonces también existe el de $f(x)$ y

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x)$$

Demostración: Sea L el límite de $g(x)$ cuando $x \to c$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ en los intervalos abiertos $(c - \delta, c)$ y $(c, c + \delta)$, y

$$|g(x) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - c| < \delta$$

Como $f(x) = g(x)$ para todo $x = c$ en el intervalo abierto, se sigue que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - c| < \delta$$

Así pues, el límite de $f(x)$ cuando $x \to c$ es también L. □

TEOREMA 1.8 TEOREMA DEL ENCAJE (página 73)

Si $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contiene c, excepto posiblemente en el propio c, y si

$$\lim_{x \to c} h(x) = L = \lim_{x \to c} g(x)$$

entonces $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y es igual a L.

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, existen δ_1 y δ_2 tales que

$$|h(x) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - c| < \delta_1$$

y

$$|g(x) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - c| < \delta_2$$

Como $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ para todos los x de un intervalo abierto que contiene a c, excepto quizás en c, existe $\delta_3 > 0$ tal que $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ para $0 < |x - c| < \delta_3$. Sea δ el menor de los números δ_1, δ_2 y δ_3. Entonces, si $0 < |x - c| < \delta$, se sigue que $|h(x) - L| < \varepsilon$ y $|g(x) - L| < \varepsilon$, lo cual implica que

$$-\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon \quad \text{y} \quad -\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < h(x) \quad \text{y} \quad g(x) < L + \varepsilon$$

Ahora bien, como $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, deducimos que $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, de donde podemos concluir que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Por tanto,

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$ □

TEOREMA 1.14 ASÍNTOTAS VERTICALES (página 95)

Sean f y g funciones continuas en un intervalo abierto que contiene c. Si $f(c) \neq 0$, $g(c) = 0$, y existe un intervalo abierto que contiene c tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq c$ del intervalo, entonces la gráfica de la función

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

posee una asíntota vertical en $x = c$.

Demostración: Consideremos el caso en que $f(c) > 0$ y existe $b > c$ tal que $c < x < b$ implica $g(x) > 0$. En esas circunstancias, para $M > 0$ escojamos δ_1 tal que

$$0 < x - c < \delta_1 \text{ implica que } \frac{f(x)}{2} < f(x) < \frac{3f(c)}{2}$$

y δ_2 tal que

$$0 < x - c < \delta_2 \text{ implica que } 0 < g(x) < \frac{f(c)}{2M}$$

Denotemos por δ el menor de los números δ_1 y δ_2. Entonces, se sigue de lo anterior que

$$0 < x - c < \delta \text{ implica que } \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(c)}{2}\left[\frac{2M}{f(c)}\right] = M$$

Concluimos, en consecuencia, que

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

de manera que la recta $x = c$ es una asíntota vertical de la gráfica de h. □

FÓRMULA ALTERNATIVA PARA LA DERIVADA (página 112)

La derivada de f en c viene dada por

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

siempre que el límite exista.

Demostración: La derivada de f en c viene dada por

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Sea $x = c + \Delta x$. Entonces $x \to c$ $\Delta x \to 0$. Así pues, sustituyendo $c + \Delta x$ por x obtenemos

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \qquad \square$$

TEOREMA 2.10 **LA REGLA DE LA CADENA (página 142)**

Si $y = f(u)$ es una función derivable de u, y si además $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces $y = f(g(x))$ es una función derivable, con

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ o lo que es equivalente } \frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

Demostración: En la Sección 2.4 hicimos $h(x) = f(g(x))$ y utilizamos la fórmula alternativa de la derivada para probar que $h'(c) = f'(g(c))\, g'(c)$, siempre que $g(x) \neq g(c)$ para todo x distinto de c. Ahora presentamos una demostración más general. Comenzamos derivando la función f.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Para un valor fijo de x, definimos una función η tal que

$$\eta(\Delta x) = \begin{cases} 0, & \Delta x = 0 \\ \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x), & \Delta x \neq 0 \end{cases}$$

Como el límite de $\eta(\Delta x)$ cuando $\Delta x \to 0$ no depende del valor de $\eta(0)$, se tiene

$$\lim_{\Delta x \to 0} \eta(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right] = 0$$

y podemos concluir que η es continua en 0. Además, dado que $\Delta y = 0$ cuando $\Delta x = 0$, la ecuación

$$\Delta y = \Delta x \eta(\Delta x) + \Delta x f'(x)$$

es válida tanto si Δx es cero como si no. Pues bien, denotando $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$, podemos usar la continuidad de g para concluir que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = \lim_{\Delta x \to 0} [g(x + \Delta x) - g(x)] = 0$$

y en consecuencia

$$\lim_{\Delta x \to 0} \eta(\Delta u) = 0$$

Finalmente

$$\Delta y = \Delta u\eta(\Delta u) + \Delta u f'(u) \rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}\eta(\Delta u) + \frac{\Delta u}{\Delta x}f'(u), \quad \Delta x \neq 0$$

y tomando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \eta(\Delta u)\right] + \frac{du}{dx}f'(u) = \frac{dy}{dx}(0) + \frac{du}{dx}f'(u)$$

$$= \frac{du}{dx}f'(u) = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du}$$ □

INTERPRETACIÓN DE LA CONCAVIDAD (página 205)

1. **Sea f derivable en c. Si la gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(c, f(c))$, la gráfica de f queda *por encima* de la recta tangente en $(c, f(c))$ en algún intervalo abierto que contiene a c.**
2. **Sea f derivable en c. Si la gráfica de f es cóncava hacia abajo en $(c, f(c))$, la gráfica de f queda *por debajo* de la recta tangente en $(c, f(c))$ en algún intervalo abierto que contiene a c.**

Demostración: Supongamos que f es cóncava hacia arriba en c. Eso significa, por definición, que existe un intervalo (a, b), que contiene a c, en el que f' es creciente. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$ viene dada por

$$g(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$$

Si x está en el intervalo abierto (c, b), la distancia dirigida del punto $(x, f(x))$ (que pertenece a la gráfica de f) al punto $(x, g(x))$ (que está en la recta tangente) es

$$d = f(x) - [f(c) + f'(c)(x - c)]$$
$$= f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)$$

Además, el teorema del valor medio asegura la existencia de un número z en (c, x) tal que

$$f'(z) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Así pues,

$$d = f(x) - f(c) + f'(c)(x - c)$$
$$= f'(z)(x - c) - f'(c)(x - c)$$
$$= [f'(z) - f'(c)](x - c)$$

El factor $(x - c)$ es positivo, porque $c < x$. Por otra parte, al ser f' creciente, el factor $[f'(z) - f'(c)]$ también es positivo. Por consiguiente, $d > 0$ y concluimos que la gráfica de f está por encima de la recta tangente. Si x está en el intervalo abierto (a, c), se puede aplicar un argumento similar. □

TEOREMA 3.10 LÍMITES EN EL INFINITO (página 216)

Si r es un número racional positivo y c es cualquier número real, entonces

$$\lim_{x \to \infty} \frac{c}{x^r} = 0$$

Además, si x^r está definida para $x < 0$, entonces $\lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^r} = 0$

Demostración: Comenzamos demostrando que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Dado $\varepsilon > 0$, denotemos $M = 1/\varepsilon$. Entonces, para $x > M$ se tiene

$$x > M = \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$$

Así pues, la definición de límite nos lleva a concluir que el límite de $1/x$, cuando $x \to \infty$, es 0. Teniendo esto en cuenta y haciendo $r = m/n$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \frac{c}{x^r} &= \lim_{x \to \infty} \frac{c}{x^{m/n}} \\
&= c\left[\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)^m\right] \\
&= c\left(\lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{x}}\right)^m \\
&= c\left(\sqrt[n]{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}}\right)^m \\
&= c(\sqrt[n]{0})^m \\
&= 0
\end{aligned}$$

La demostración de la segunda parte del teorema es muy parecida. □

TEOREMA 4.2 FÓRMULAS DE SUMA (página 292)

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c = cn$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Demostración: La propiedad 1 es obvia. Si se suma n veces el número c se obtiene la suma nc.

Para probar la propiedad 2, escribimos la suma en orden creciente y en orden decreciente, y sumamos sus términos:

$$\begin{array}{rcccccccccc}
\sum_{i=1}^{n} i = & 1 & + & 2 & + & 3 & + \cdots + & (n-1) & + & n \\
& \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\sum_{i=1}^{n} i = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + \cdots + & 2 & + & 1 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
2\sum_{i=1}^{n} i = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + \cdots + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

$$\underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ términos}}$$

Por consiguiente

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

La propiedad 3 se demuestra por inducción. En primer lugar, para $n = 1$ es cierta, ya que

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

Suponiendo ahora que el resultado es cierto para $n = k$, podemos ver que es cierto para $n = k + 1$ así:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k+1}{6}(2k^2 + k + 6k + 6) \\
&= \frac{k+1}{6}[(2k+3)(k+2)] \\
&= \frac{(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]}{6}
\end{aligned}$$

Un argumento análogo, usando inducción, permite demostrar sin dificultal la propiedad 4. □

TEOREMA 4.8 CONSERVACIÓN DE DESIGUALDADES (página 311)

1. Si f es integrable y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$0 \leq \int_a^b f(x)\, dx$$

2. Si f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a, b]$, y $f(x) \leq g(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$

Demostración: Para probar la propiedad 1 supongamos que, por el contrario, fuese

$$\int_a^b f(x)\,dx = I < 0$$

En ese supuesto, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ tomamos una partición de $[a, b]$, y denotamos por

$$R = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

una suma de Riemann. Como $f(x) \geqslant 0$, se sigue que $R \geqslant 0$. Pues bien, para $\|\Delta\|$ suficientemente pequeño, se tendría $|R - I| < -I/2$, de donde se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = R < I - \frac{I}{2} < 0$$

que es imposible. De esa contradicción podemos concluir que

$$0 \leqslant \int_a^b f(x)\,dx$$

Para demostrar la propiedad 2, nótese que $f(x) \leqslant g(x)$ implica $g(x) - f(x) \geqslant 0$, así que de la propiedad 1 se desprende que

$$0 \leqslant \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$$

$$0 \leqslant \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

□

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL (página 356)

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

Demostración: Para empezar, veamos que $\ln 2 \geqslant \frac{1}{2}$. Por el teorema del valor medio para integrales sabemos que

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = (2-1)\frac{1}{c} = \frac{1}{c}$$

para algún c en $[1, 2]$. Esto implica que

$$1 \leqslant c \leqslant 2$$

$$1 \geqslant \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{2}$$

$$1 \geqslant \ln 2 \geqslant \frac{1}{2}$$

Sea ahora N cualquier número positivo muy grande. Como $\ln x$ es creciente, si $x > 2^{2N}$, entonces

$$\ln x > \ln 2^{2N} = 2N \ln 2$$

Y como $\ln 2 \geqslant \frac{1}{2}$, concluimos que

$$\ln x > 2N \ln 2 \geqslant 2N\left(\frac{1}{2}\right) = N$$

Esto establece el segundo límite. Para verificar el primero, hacemos $z = 1/x$. Entonces, $z \to \infty$ cuando $x \to 0^+$, y por tanto

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{x \to 0^+} \left(-\ln \frac{1}{x}\right) = \lim_{z \to \infty} (-\ln z) = -\lim_{z \to \infty} \ln z = -\infty$$ □

TEOREMA 5.8 CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD DE LAS FUNCIONES INVERSAS (página 381)

Sea f una función cuyo dominio es un intervalo I. Si f tiene inversa, son ciertas las siguientes afirmaciones.

1. Si f es continua en su dominio, f^{-1} es continua en su dominio.
2. Si f es creciente en su dominio, f^{-1} es creciente en su dominio.
3. Si f es decreciente en su dominio, f^{-1} es decreciente en su dominio.
4. Si f es derivable en c y $f'(c) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $f(c)$.

Demostración: Para demostrar la propiedad 1, veamos en primer lugar que si f es continua en I y tiene inversa, entonces f es estrictamente monótona en I. Supongamos que f no fuese estrictamente monótona. En tal caso, existirían números x_1, x_2, x_3 en I tales que $x_1 < x_2 < x_3$ pero $f(x_2)$ no está entre $f(x_1)$ y $f(x_3)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$. Por el teorema del valor intermedio, existiría un x_0 entre x_1 y x_2 tal que $f(x_0) = f(x_3)$. Así pues, f no sería inyectiva y no podría, en consecuencia, tener inversa. Por tanto, f debe ser estrictamente monótona.

Al ser f continua, el teorema del valor intermedio implica que el conjunto de valores de f,

$$\{f(x): x \in I\}$$

forma un intervalo J. Supongamos que a es un punto interior de J. Por el argumento previo, $f^{-1}(a)$ es un punto interior de I. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ tal que

$$I_1 = (f^{-1}(a) - \varepsilon_1, f^{-1}(a) + \varepsilon_1) \subseteq I$$

Como f es estrictamente monótona en I_1, el conjunto de valores $\{f(x): x \in I_1\}$ constituye un intervalo $J_1 \subseteq J$. Sea $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \subseteq J_1$. Finalmente, si

$$|y - a| < \delta, \text{ entonces } |f^{-1}(y) - f^{-1}(a)| < \varepsilon_1 < \varepsilon$$

Por tanto, f^{-1} es continua en a. Un razonamiento análogo es válido si a es un punto terminal.

Para probar la propiedad 2, sean y_1 e y_2 en el dominio de f^{-1}, con $y_1 < y_2$. Entonces existen x_1, x_2 en el dominio de f tales que

$$f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2)$$

Puesto que f es creciente, $f(x_1) < f(x_2)$ exactamente cuando $x_1 < x_2$. Por consiguiente,

$$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$$

lo cual implica que f^{-1} es creciente. (La propiedad 3 se demuestra de la misma manera.)

Finalmente, para probar la propiedad 4, consideremos el límite

$$(f^{-1})'(a) = \lim_{y\to a} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(a)}{y - a}$$

donde a está en el dominio de f^{-1} y $f^{-1}(a) = c$. Como f es derivable en c, f es continua en c, luego f^{-1} lo es en a. Así pues, $y \to a$ implica que $x \to c$, luego

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(a) &= \lim_{x\to c} \frac{x - c}{f(x) - f(c)} \\ &= \lim_{x\to c} \frac{1}{\left(\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)} \\ &= \frac{1}{\displaystyle\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}} \\ &= \frac{1}{f'(c)}\end{aligned}$$

Por tanto, $(f^{-1})'(a)$ existe y f^{-1} es derivable en $f(c)$. □

TEOREMA 5.9 LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN INVERSA (página 381)

Sea f una función derivable en un intervalo I. Si f admite función inversa g, entonces g es derivable en todo x en el que $f'(g(x)) \neq 0$. Además,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}, \qquad f'(g(x)) \neq 0$$

Demostración: De la demostración del Teorema 5.8, haciendo $a = x$, se sigue que g es derivable. Y derivando, con la regla de la cadena, los dos miembros de la ecuación $x = f(g(x))$ se obtiene

$$1 = f'(g(x)) \frac{d}{dx}[g(x)]$$

Como $f'(g(x)) \neq 0$, podemos dividir por esa cantidad, lo que da

$$\frac{d}{dx}[g(x)] = \frac{1}{f'(g(x))}$$ □

TEOREMA 5.15 UN LÍMITE QUE INVOLUCRA AL NÚMERO *e* (página 401)

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = e$$

Demostración: Sea $y = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Tomando logaritmos naturales en ambos lados, obtenemos

$$\ln y = \ln \left[\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]$$

Y puesto que la función logaritmo natural es continua, podemos escribir

$$\ln y = \lim_{x \to \infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x \to \infty} \left\{\frac{\ln\ [1 + (1/x)]}{1/x}\right\}$$

Haciendo $x = \frac{1}{t}$, se tiene

$$\begin{aligned} \ln y &= \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln\ (1 + t)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln\ (1 + t) - \ln 1}{t} \\ &= \frac{d}{dx} \ln x \text{ en } x = 1 \\ &= \frac{1}{x} \text{ en } x = 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Finalmente, de $\ln y = 1$ deducimos que $y = e$, luego

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$ □

TEOREMA 7.3 EL TEOREMA GENERAL DEL VALOR MEDIO (página 594)

Si f y g son derivables en un intervalo abierto (a, b) y continuas en $[a, b]$, y si además $g'(x) \neq 0$ para todo x en (a, b), existe algún punto c en (a, b) tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Demostración: Podemos suponer que $g(a) \neq g(b)$, ya que de no ser así el teorema de Rolle aseguraría la existencia de un x en (a, b) en el que $g'(x) = 0$. Definimos la función

$$h(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right]g(x)$$

entonces

$$h(a) = f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right]g(a) = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)}$$

y

$$h(b) = f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right]g(b) = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)}$$

y por el teorema de Rolle existe un c en (a, b) tal que

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0$$

lo cual implica que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$ □

TEOREMA 7.4 **LA REGLA DE L'HÔPITAL** (página 594)

Sean f y g funciones derivables en un intervalo abierto (a, b) que contiene a c, excepto posiblemente en el propio c. Supongamos que $g'(x) \neq 0$ para todo x en (a, b), excepto posiblemente en el propio c. Si el límite de $f(x)/g(x)$ cuando x tiende a c produce la forma indeterminada 0/0, entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

supuesto que el límite de la derecha existe o es infinito. Este resultado es válido también si el límite de $f(x)/g(x)$ produce cualquiera de las formas indeterminadas ∞/∞, $(-\infty)/\infty$, $\infty/(-\infty)$, o $(-\infty)/(-\infty)$

Se puede utilizar este teorema para demostrar la regla de L'Hôpital. Haremos en detalle sólo uno de los diversos casos de esta regla, dejando los demás como ejercicio.

Demostración: Consideremos el caso en que

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c^+} g(x) = 0$$

Definamos las funciones auxiliares

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq c \\ 0, & x = c \end{cases} \quad \text{y} \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq c \\ 0, & x = c \end{cases}$$

Para cualquier x, con $c < x < b$, F y G son derivables en $(c, x]$ y continuas en $[c, x]$. Así pues, podemos aplicar el teorema general del valor medio, que lleva a la conclusión de que existe algún número z en (c, x) tal que

$$\frac{F'(z)}{G'(z)} = \frac{F(x) - F(c)}{G(x) - G(c)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Finalmente, si hacemos que x tienda a c por la derecha, $x \to c^+$, se sigue que $z \to c^+$ ya que $c < z < x$, y

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c^+} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{x \to c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La demostración de los casos $x \to c^-$ y $x \to c$ se deja al cuidado del lector. □

TEOREMA 8.19 EL TEOREMA DE TAYLOR (página 683)

Si una función f es derivable hasta orden $n + 1$ en un intervalo I que contiene a c, entonces, para cada x en I existe algún z entre x y c tal que

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + R_n(x)$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n + 1)!}(x - c)^{n+1}$$

Demostración Para hallar $R_n(x)$, fijamos x en I $(x \neq c)$ y escribimos

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

donde $P_n(x)$ es el n-ésimo polinomio de Taylor para $f(x)$. Definamos ahora una función g de t dada por

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n - R_n(x)\frac{(x - t)^{n+1}}{(x - c)^{n+1}}$$

La razón que nos mueve a definir g así es que, con ello, la derivación en t tiene un efecto telescópico. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[-f(t) - f'(t)(x - t)] &= -f'(t) + f'(t) - f''(t)(x - t) \\ &= -f''(t)(x - t) \end{aligned}$$

Como consecuencia, la derivada de $g'(t)$ se simplifica a

$$g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + (n+1)R_n(x)\frac{(x-t)^n}{(x-c)^{n+1}}$$

para todo t entre c y x. Además, para un x fijo,

$$g(c) = f(x) - [P_n(x) + R_n(x)] = f(x) - f(x) = 0$$

y

$$g(x) = f(x) - f(x) - 0 - \cdots - 0 = f(x) - f(x) = 0$$

Por tanto, g satisface las condiciones del teorema de Rolle, del que se sigue que existe un número z entre c y x tal que $g'(z) = 0$. Sustituyendo t por z en la expresión que daba $g'(t)$ y despejando a continuación $R_n(x)$ se obtiene

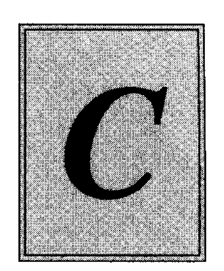
$$g'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n + (n+1)R_n(x)\frac{(x-z)^n}{(x-c)^{n+1}} = 0$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Finalmente, como $g(c) = 0$, resulta

$$0 = f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) - \cdots - \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n - R_n(x)$$

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x) \qquad \square$$



Reglas básicas de derivación de funciones elementales

1. $\dfrac{d}{dx}[cu] = cu'$

2. $\dfrac{d}{dx}[u \pm v] = u' \pm v'$

3. $\dfrac{d}{dx}[uv] = uv' + vu'$

4. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{u}{v}\right] = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$

5. $\dfrac{d}{dx}[c] = 0$

6. $\dfrac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$

7. $\dfrac{d}{dx}[x] = 1$

8. $\dfrac{d}{dx}[|u|] = \dfrac{u}{|u|}(u'),\ u \neq 0$

9. $\dfrac{d}{dx}[\ln u] = \dfrac{u'}{u}$

10. $\dfrac{d}{dx}[e^u] = e^u u'$

11. $\dfrac{d}{dx}[\text{sen } u] = (\cos u)u'$

12. $\dfrac{d}{dx}[\cos u] = -(\text{sen } u)u'$

13. $\dfrac{d}{dx}[\text{tg } u] = (\sec^2 u)u'$

14. $\dfrac{d}{dx}[\text{ctg } u] = -(\text{cosec}^2\, u)u'$

15. $\dfrac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \text{ tg } u)u'$

16. $\dfrac{d}{dx}[\text{cosec } u] = -(\text{cosec } u \text{ ctg } u)u'$

17. $\dfrac{d}{dx}[\text{arcsen } u] = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

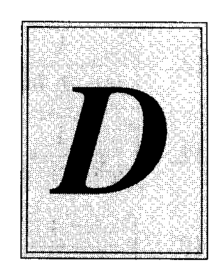
18. $\dfrac{d}{dx}[\arccos u] = \dfrac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

19. $\dfrac{d}{dx}[\text{arctg } u] = \dfrac{u'}{1 + u^2}$

20. $\dfrac{d}{dx}[\text{arctg } u] = \dfrac{-u'}{1 + u^2}$

21. $\dfrac{d}{dx}[\text{arcsec } u] = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$

22. $\dfrac{d}{dx}[\text{arccosec } u] = \dfrac{-u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$



Tablas de integrales

Formas que contienen u^n

1. $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$

Formas que contienen $a + bu$

3. $\displaystyle\int \frac{u}{a+bu}\,du = \frac{1}{b^2}(bu - a\ln|a+bu|) + C$

4. $\displaystyle\int \frac{u}{(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a+bu} + \ln|a+bu|\right) + C$

5. $\displaystyle\int \frac{u}{(a+bu)^n}\,du = \frac{1}{b^2}\left[\frac{-1}{(n-2)(a+bu)^{n-2}} + \frac{a}{(n-1)(a+bu)^{n-1}}\right] + C,\ n \neq 1, 2$

6. $\displaystyle\int \frac{u^2}{a+bu}\,du = \frac{1}{b^3}\left[-\frac{bu}{2}(2a - bu) + a^2\ln|a+bu|\right] + C$

7. $\displaystyle\int \frac{u^2}{(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{b^3}\left(bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a+bu|\right) + C$

8. $\displaystyle\int \frac{u^2}{(a+bu)^3}\,du = \frac{1}{b^3}\left[\frac{2a}{a+bu} - \frac{a^2}{2(a+bu)^2} + \ln|a+bu|\right] + C$

9. $\displaystyle\int \frac{u^2}{(a+bu)^n}\,du = \frac{1}{b^3}\left[\frac{-1}{(n-3)(a+bu)^{n-3}} + \frac{2a}{(n-2)(a+bu)^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)(a+bu)^{n-1}}\right] + C,\ n \neq 1, 2, 3$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{u(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$

11. $$\int \frac{1}{u(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a+bu} + \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|\right) + C$$

12. $$\int \frac{1}{u^2(a+bu)}\,du = -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{u} + \frac{b}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|\right) + C$$

13. $$\int \frac{1}{u^2(a+bu)^2}\,du = -\frac{1}{a^2}\left[\frac{a+2bu}{u(a+bu)} + \frac{2b}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|\right] + C$$

Formas que contienen $a + bu + cu^2$, $b^2 \neq 4ac$

14. $$\int \frac{1}{a+bu+cu^2}\,du = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \dfrac{2cu+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C & b^2 < 4ac \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln\left|\dfrac{2cu+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cu+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| + C, & b^2 > 4ac \end{cases}$$

15. $$\int \frac{u}{a+bu+cu^2}\,du = \frac{1}{2c}\left(\ln|a+bu+cu^2| - b\int \frac{1}{a+bu+cu^2}\,du\right)$$

Formas que contienen $\sqrt{a+bu}$

16. $$\int u^n\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{b(2n+3)}\left[u^n(a+bu)^{3/2} - na\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du\right]$$

17. $$\int \frac{1}{u\sqrt{a+bu}}\,du = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\dfrac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C, & a > 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{a+bu}{-a}} + C, & a < 0 \end{cases}$$

18. $$\int \frac{1}{u^n\sqrt{a+bu}}\,du = \frac{-1}{a(n-1)}\left[\frac{\sqrt{a+bu}}{u^{n-1}} + \frac{(2n-3)b}{2}\int \frac{1}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}\,du\right],\ n \neq 1$$

19. $$\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{1}{u\sqrt{a+bu}}\,du$$

20. $$\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^n}\,du = \frac{-1}{a(n-1)}\left[\frac{(a+bu)^{3/2}}{u^{n-1}} + \frac{(2n-5)b}{2}\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^{n-1}}\,du\right],\ n \neq 1$$

21. $$\int \frac{u}{\sqrt{a+bu}}\,du = \frac{-2(2a-bu)}{3b^2}\sqrt{a+bu} + C$$

22. $$\int \frac{u^n}{\sqrt{a+bu}}\,du = \frac{2}{(2n+1)b}\left(u^n\sqrt{a+bu} - na\int \frac{u^{n-1}}{\sqrt{a+bu}}\,du\right)$$

Formas que contienen $a^2 \pm u^2$, $a > 0$

23. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + u^2}\,du = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$

24. $\displaystyle\int \frac{1}{u^2 - a^2}\,du = -\int \frac{1}{a^2 - u^2}\,du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C$

25. $\displaystyle\int \frac{1}{(a^2 \pm u^2)^n}\,du = \frac{1}{2a^2(n - 1)}\left[\frac{u}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}} + (2n - 3)\int \frac{1}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}}\,du\right],\ n \neq 1$

Formas que contienen $\sqrt{u^2 \pm a^2}$, $a > 0$

26. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right) + C$

27. $\displaystyle\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{1}{8}\left[u(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - a^4 \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right] + C$

28. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2 + a^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right| + C$

29. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2 - a^2} - a\operatorname{arcsec}\frac{|u|}{a} + C$

30. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u^2}\,du = \frac{-\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}\,du = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

32. $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 + a^2}}\,du = \frac{-1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right| + C$

33. $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}}\,du = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{|u|}{a} + C$

34. $\displaystyle\int \frac{u^2}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \mp a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right) + C$

35. $\displaystyle\int \frac{1}{u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}}\,du = \mp\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{a^2 u} + C$

36. $\displaystyle\int \frac{1}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}}\,du = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$

Formas que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$, $a > 0$

37. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \operatorname{arcsen}\frac{u}{a}\right) + C$

38. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{1}{8}\left[u(2u^2 - a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + a^4 \operatorname{arcsen}\frac{u}{a}\right] + C$

39. $$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

40. $$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}\,du = \frac{-\sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + C$$

41. $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + C$$

42. $$\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \frac{-1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

43. $$\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \frac{1}{2}\left(-u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \operatorname{arcsen} \frac{u}{a}\right) + C$$

44. $$\int \frac{1}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \frac{-\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C$$

45. $$\int \frac{1}{(a^2 - u^2)^{3/2}}\,du = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$$

Formas que contienen sen u o cos u

46. $$\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$$

47. $$\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$$

48. $$\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \frac{1}{2}(u - \operatorname{sen} u \cos u) + C$$

49. $$\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}(u + \operatorname{sen} u \cos u) + C$$

50. $$\int \operatorname{sen}^n u\,du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u}{n} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} u\,du$$

51. $$\int \cos^n u\,du = \frac{\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u\,du$$

52. $$\int u \operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$$

53. $$\int u \cos u\,du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$$

54. $$\int u^n \operatorname{sen} u\,du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u\,du$$

55. $$\int u^n \cos u\,du = u^n \operatorname{sen} u - n \int u^{n-1} \operatorname{sen} u\,du$$

56. $$\int \frac{1}{1 \pm \operatorname{sen} u}\,du = \operatorname{tg} u \mp \sec u + C$$

57. $\int \frac{1}{1 \pm \cos u}\, du = -\text{ctg}\, u \pm \text{cosec}\, u + C$

58. $\int \frac{1}{\text{sen}\, u \cos u}\, du = \ln |\text{tg}\, u| + C$

Formas que contienen tg u, ctg u, sec u, cosec u

59. $\int \text{tg}\, u\, du = -\ln |\cos u| + C$

60. $\int \text{ctg}\, u\, du = \ln |\text{sen}\, u| + C$

61. $\int \sec u\, du = \ln |\sec u + \text{tg}\, u| + C$

62. $\int \text{cosec}\, u\, du = \ln |\text{cosec}\, u - \text{ctg}\, u| + C$

63. $\int \text{tg}^2\, u\, du = -u + \text{tg}\, u + C$

64. $\int \text{ctg}^2\, u\, du = -u - \text{ctg}\, u + C$

65. $\int \sec^2 u\, du = \text{tg}\, u + C$

66. $\int \text{cosec}^2\, u\, du = -\text{ctg}\, u + C$

67. $\int \text{tg}^n\, u\, du = \frac{\text{tg}^{n-1}\, u}{n-1} - \int \text{tg}^{n-2}\, u\, du,\ n \neq 1$

68. $\int \text{ctg}^n\, u\, du = -\frac{\text{ctg}^{n-1}\, u}{n-1} - \int (\text{ctg}^{n-2}\, u)\, du,\ n \neq 1$

69. $\int \sec^n u\, du = \frac{\sec^{n-2} u\ \text{tg}\, u}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\, du,\ n \neq 1$

70. $\int \text{cosec}^n\, u\, du = -\frac{\text{cosec}^{n-2}\, u\ \text{ctg}\, u}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \text{cosec}^{n-2}\, u\, du,\ n \neq 1$

71. $\int \frac{1}{1 \pm \text{tg}\, u}\, du = \frac{1}{2}(u \pm \ln |\cos u \pm \text{sen}\, u|) + C$

72. $\int \frac{1}{1 \pm \text{ctg}\, u}\, du = \frac{1}{2}(u \mp \ln |\text{sen}\, u \pm \cos u|) + C$

73. $\int \frac{1}{1 \pm \sec u}\, du = u + \text{ctg}\, u \mp \text{cosec}\, u + C$

74. $\int \frac{1}{1 \pm \text{cosec}\, u}\, du = u - \text{tg}\, u \pm \sec u + C$

Formas que contienen funciones trigonométricas inversas

75. $\int \text{arcsen}\, u\, du = u\, \text{arcsen}\, u + \sqrt{1 - u^2} + C$

76. $\int \text{arccos}\, u\, du = u\, \text{arccos}\, u - \sqrt{1 - u^2} + C$

77. $\int \text{arctg}\, u\, du = u\, \text{arctg}\, u - \ln \sqrt{1 + u^2} + C$

78. $\int \text{arcctg}\, u\, du = u\, \text{arcctg}\, u + \ln \sqrt{1 + u^2} + C$

79. $\int \text{arcsec}\, u\, du = u\, \text{arcsec}\, u - \ln \left|u + \sqrt{u^2 - 1}\right| + C$

80. $\int \text{arccosec}\, u\, du = u\, \text{arccosec}\, u + \ln \left|u + \sqrt{u^2 - 1}\right| + C$

Formas que contienen e^u

81. $\int e^u\, du = e^u + C$

82. $\int ue^u\, du = (u - 1)e^u + C$

83. $\int u^n e^u\, du = u^n e^u - n \int u^{n-1} e^u\, du$

84. $\int \frac{1}{1 + e^u}\, du = u - \ln(1 + e^u) + C$

85. $\int e^{au} \text{ sen } bu\, du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2}(a \text{ sen } bu - b \cos bu) + C$

86. $\int e^{au} \cos bu\, du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2}(a \cos bu + b \text{ sen } bu) + C$

Formas que contienen $\ln u$

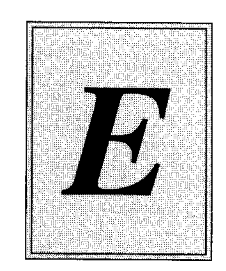
87. $\int \ln u\, du = u(-1 + \ln u) + C$

88. $\int u \ln u\, du = \frac{u^2}{4}(-1 + 2 \ln u) + C$

89. $\int u^n \ln u\, du = \frac{u^{n+1}}{(n + 1)^2}[-1 + (n + 1) \ln u] + C, n \neq -1$

90. $\int (\ln u)^2\, du = u[2 - 2 \ln u + (\ln u)^2] + C$

91. $\int (\ln u)^n\, du = u(\ln u)^n - n \int (\ln u)^{n-1}\, du$



Rotaciones y la ecuación general de segundo grado

Rotación de ejes

En la Sección 9.1 del Volumen 2 veremos que las ecuaciones de las cónicas con ejes paralelos a alguno de los ejes de coordenadas se pueden escribir en la forma general

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \text{Ejes horizontales o verticales}$$

Ahora estudiaremos las ecuaciones de las cónicas cuyos ejes están girados, de manera que ya *no son paralelos* al eje x o al eje y. La ecuación general para tales cónicas contiene un término xy.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \text{Ecuación en el plano } xy$$

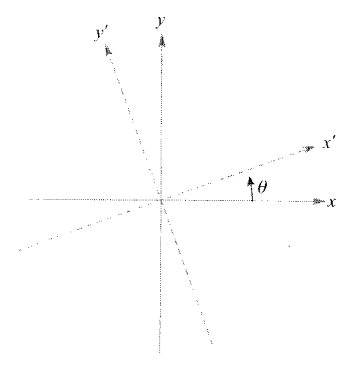


FIGURA A.40
Tras efectuar una rotación de los ejes x e y de ángulo θ (en sentido contrario al de las agujas de un reloj) los nuevos ejes son los denotados por x' e y'.

Este término de tipo xy se puede eliminar con una **rotación de ejes**. Se trata de girar los ejes x e y hasta conseguir que sean paralelos a los ejes de la cónica. (Denotaremos los ejes girados por x', y', como muestra la Fig. A.40). Una vez efectuada la rotación, la ecuación de la cónica en el nuevo plano $x'y'$ tendrá la forma

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \qquad \text{Ecuación en el plano } x'y'$$

Como esta ecuación ya no tiene término $x'y'$, podemos pasarla a forma canónica sin más que completar el cuadrado.

El próximo teorema especifica cuánto hay que girar los ejes si se desea eliminar un término xy, así como las ecuaciones para determinar los nuevos coeficientes A', C', D', E' y F'.

TEOREMA A.1 ROTACIÓN DE EJES

La ecuación general de la cónica

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde $B \neq 0$, puede reescribirse como

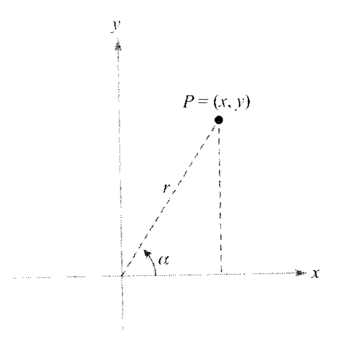
$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

efectuando una rotación de ejes de ángulo θ, donde

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{A - C}{B}$$

Los coeficientes de la nueva ecuación se obtienen haciendo las sustituciones

$$x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta$$
$$y = x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta$$



Original: $x = r \cos \alpha$
$y = r \operatorname{sen} \alpha$

Girado: $x' = r \cos (\alpha - \theta)$
$y' = r \operatorname{sen} (\alpha - \theta)$

FIGURA A.41

Demostración Para averiguar cómo están relacionadas las coordenadas en el sistema xy con las coordenadas en el sistema $x'y'$, consideremos un punto $P = (x, y)$ en el sistema original e intentemos encontrar sus coordenadas (x', y') en el sistema girado. En ambos sistemas, la distancia r de P al origen es la misma, luego las ecuaciones para x, y, x', e y' son las expuestas en la Figura A.41. Usando las fórmulas para la suma y diferencia de ángulos, se obtiene

$$x' = r \cos (\alpha - \theta) = r(\cos \alpha \cos \theta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta)$$
$$= r \cos \alpha \cos \theta + r \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta = x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta$$
$$y' = r \operatorname{sen} (\alpha - \theta) = r(\operatorname{sen} \alpha \cos \theta - \cos \alpha \operatorname{sen} \theta)$$
$$= r \operatorname{sen} \alpha \cos \theta - r \cos \alpha \operatorname{sen} \theta = y \cos \theta - x \operatorname{sen} \theta$$

Despejando x e y vemos que

$$x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta \quad \text{e} \quad y = x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta$$

Finalmente, sustituyendo estas expresiones de x e y en la ecuación original obtenemos

$$A' = A \cos^2 \theta + B \cos \theta \operatorname{sen} \theta + C \operatorname{sen}^2 \theta$$
$$C' = A \operatorname{sen}^2 \theta - B \cos \theta \operatorname{sen} \theta + C \cos^2 \theta$$
$$D' = D \cos \theta + E \operatorname{sen} \theta$$
$$E' = -D \operatorname{sen} \theta + E \cos \theta$$
$$F' = F$$

Ahora, con el fin de eliminar el término $x'y'$ hemos de elegir θ de manera tal que $B' = 0$, es decir

$$\begin{aligned} B' &= 2(C - A) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \\ &= (C - A) \operatorname{sen} 2\theta + B \cos 2\theta \\ &= B(\operatorname{sen} 2\theta)\left(\frac{C - A}{B} + \operatorname{ctg} 2\theta\right) = 0, \quad \operatorname{sen} 2\theta \neq 0 \end{aligned}$$

Si $B = 0$, no es preciso hacer una rotación, ya que el término xy no aparece en la ecuación original. Si $B \neq 0$, la única forma de lograr que $B' = 0$ es hacer

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{A - C}{B}, \quad B \neq 0$$

Así pues, los resultados del enunciado han quedado demostrados. □

EJEMPLO 1 Rotación de una hipérbola

Escribir la ecuación $xy - 1 = 0$ en forma canónica.

Solución: Como $A = 0$, $B = 1$, y $C = 0$, se tiene para $0 < \theta < \pi/2$

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{A - C}{B} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

La ecuación en el sistema $x'y'$ se obtiene haciendo las siguientes sustituciones

$$x = x' \cos \frac{\pi}{4} - y' \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = x'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$$

$$y = x' \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} - y' \cos \frac{\pi}{4} = x'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación $xy - 1 = 0$ resulta

$$\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right) - 1 = 0$$

$$\frac{(x')^2 - (y')^2}{2} - 1 = 0$$

$$\frac{(x')^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{(y')^2}{(\sqrt{2})^2} = 1 \qquad \text{Forma canónica}$$

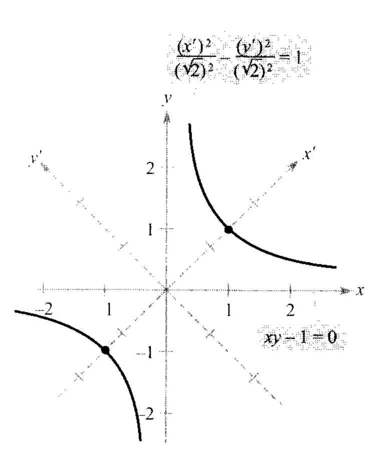


FIGURA A.42
Vértices:
$(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$ en el sistema $x'y'$
$(1, 1)$, $(-1, -1)$ en el sistema xy.

Ésta es la ecuación de una hipérbola centrada en el origen y con vértices en $(\pm\sqrt{2}, 0)$ en el sistema $x'y'$, como muestra la Figura A.42. □

EJEMPLO 2 Rotación de una elipse

Dibujar un esbozo de la gráfica de $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$

Solución: Como $A = 7$, $B = -6\sqrt{3}$, y $C = 13$, vemos que (para $0 < \theta < \pi/2$)

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{7 - 13}{-6\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \theta = \frac{\pi}{6}$$

Por tanto, la ecuación en el sistema $x'y'$ se deduce haciendo las sustituciones

$$x = x' \cos\frac{\pi}{6} - y' \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = x'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}x' - y'}{2}$$

$$y = x' \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + y' \cos\frac{\pi}{6} = x'\left(\frac{1}{2}\right) + y'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{x' + \sqrt{3}y'}{2}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación original, y no sin una dosis considerable de álgebra, se llega a

$$4(x')^2 + 16(y')^2 = 6$$

$$\frac{(x')^2}{(2)^2} + \frac{(y')^2}{(1)^2} = 1 \qquad \text{Forma canónica}$$

Ésta es la ecuación de una elipse centrada en el origen con vértices en $(\pm 2, 0)$ y $(0, \pm 1)$ en el sistema $x'y'$, como se ve en la Figura A.43. □

FIGURA A.43
Vértices:
$(\pm 2, 0)$, $(0, \pm 1)$ en el sistema $x'y'$
$(\pm\sqrt{3}, \pm 1)$, $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ en el sistema xy.

Los Ejemplos 1 y 2 han sido buscados a propósito para que el ángulo de rotación fuera uno de los ángulos comunes: 30°, 45°, etc. Claro está que muchas ecuaciones de segundo grado no llevan a esos ángulos cuando se resuelve la ecuación

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{A - C}{B}$$

El Ejemplo 3 ilustra esta situación más general.

EJEMPLO 3 Rotación de una parábola

Esbozar la gráfica de $x^2 - 4xy + 4y^2 + 5\sqrt{5}y + 1 = 0$

Solución: Como $A = 1$, $B = -4$ y $C = 4$, tenemos

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{1 - 4}{-4} = \frac{3}{4}$$

La identidad trigonométrica $\operatorname{ctg} 2\theta = (\operatorname{ctg}^2 \theta - 1)/(2 \operatorname{ctg} \theta)$ permite escribir

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{3}{4} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta - 1}{2 \operatorname{ctg} \theta}$$

de donde se deduce la ecuación

$$6 \text{ ctg } \theta = 4 \text{ ctg}^2 \theta - 4 \quad \Longrightarrow \quad 4 \text{ ctg}^2 \theta - 6 \text{ ctg } \theta - 4 = 0$$
$$(2 \text{ ctg } \theta - 4)(2 \text{ ctg } \theta + 1) = 0$$

FIGURA A.44

Considerando $0 < \theta < \pi/2$, se sigue de ahí que $2 \text{ ctg } \theta = 4$, así que

$$\text{ctg } \theta = 2 \quad \Longrightarrow \quad \theta \approx 26{,}6°$$

En el triángulo de la Figura A.44 vemos que $\text{sen } \theta = 1/\sqrt{5}$ y $\cos \theta = 2/\sqrt{5}$. Por consiguiente,

$$x = x' \cos \theta - y' \text{ sen } \theta = x'\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - y'\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}$$

$$y = x' \text{ sen } \theta + y' \cos \theta = x'\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + y'\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación original se obtiene

$$\left(\frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4\left(\frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}\right) +$$
$$+ 4\left(\frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}\right) + 5\sqrt{5}\left(\frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}\right) + 1 = 0$$

que se simplifica a

$$5(y')^2 + 5x' + 10y' + 1 = 0$$

Completando el cuadrado se llega a la forma canónica

$$5(y' + 1)^2 = -5x' + 4$$

$$(y' + 1)^2 = 4\left(-\frac{1}{4}\right)\left(x' - \frac{4}{5}\right) \qquad \text{Forma canónica}$$

La gráfica de esta ecuación es una parábola con su vértice en $(\frac{4}{5}, -1)$ y con su eje paralelo al eje x' del sistema $x'y'$, como muestra la Figura A.45. □

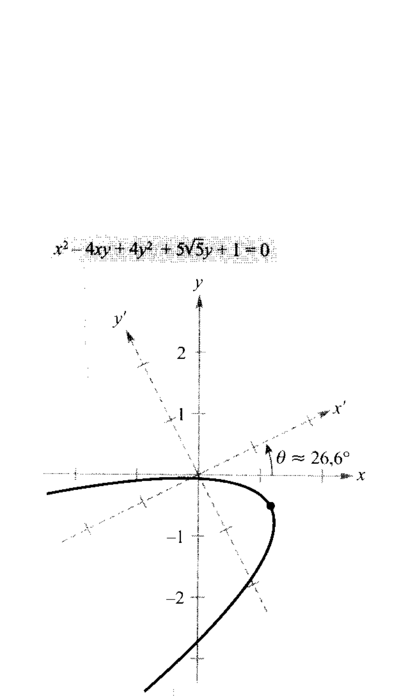


FIGURA A.45
Vértice: $\left(\frac{4}{5}, -1\right)$ en el sistema $x'y'$.
$\left(\frac{13}{5\sqrt{5}}, -\frac{6}{5\sqrt{5}}\right)$ en el sistema xy.

Invariantes bajo rotación

En el Teorema A.1, el término constante $F' = F$ es el mismo en ambas ecuaciones. Por esa razón, se dice que F es **invariante bajo rotación.** El Teorema A.2 presenta algunos invariantes bajo rotación. Su demostración se deja como ejercicio (véase Ejercicio 34).

TEOREMA A.2 INVARIANTES BAJO ROTACIÓN

La rotación de ángulo θ de los ejes coordenados que transforma la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ en la forma

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

tiene los siguientes invariantes:

1. $F = F'$
2. $A + C = A' + C'$
3. $B^2 - 4AC = (B')^2 - 4A'C'$

Gracias a este teorema se pueden clasificar las gráficas de las ecuaciones de segundo grado *con* un término xy de modo análogo a cómo se hacía para las ecuaciones de segundo grado *sin* ese tipo de término. Nótese que, al ser $B' = 0$, el invariante $B^2 - 4AC$ se reduce a

$$\boxed{B^2 - 4AC = -4A'C'}$$ Discriminante

que se llama el **discriminante** de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Como el signo de $A'C'$ determina el tipo de gráfica de la ecuación

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

el signo de $B^2 - 4AC$ determina el tipo de gráfica de la ecuación original. Este resultado queda plasmado en el Teorema A.3.

TEOREMA A.3 CLASIFICACIÓN DE LAS CÓNICAS POR EL DISCRIMINANTE

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

viene determinada, excepto en los casos degenerados, por el discriminante como sigue:

1. *Elipse o círculo* $B^2 - 4AC < 0$
2. *Parábola* $B^2 - 4AC = 0$
3. *Hipérbola* $B^2 - 4AC > 0$

EJEMPLO 4 Uso del discriminante

Clasificar la gráfica de cada una de estas ecuaciones.

a) $4xy - 9 = 0$

b) $2x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x = 0$

c) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 2y + 1 = 0$

d) $3x^2 + 8xy + 4y^2 - 7 = 0$

Solución:

a) La gráfica es una hipérbola, porque $B^2 - 4AC = 16 - 0 > 0$

b) La gráfica es un círculo o una elipse, ya que $B^2 - 4AC = 9 - 16 < 0$

c) La gráfica es una parábola, porque $B^2 - 4AC = 36 - 36 = 0$

d) La gráfica es una hipérbola, porque $B^2 - 4AC = 64 - 48 > 0$ □

Ejercicios del Apéndice E

En los Ejercicios 1-12, girar los ejes con el fin de eliminar el término xy. Escribir las ecuaciones resultantes y dibujar un esbozo de su gráfica que muestre los dos conjuntos de ejes.

1. $xy + 1 = 0$

2. $xy - 4 = 0$

3. $x^2 - 10xy + y^2 + 1 = 0$

4. $xy + x - 2y + 3 = 0$

5. $xy - 2y - 4x = 0$

6. $13x^2 + 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 16 = 0$

7. $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 12 = 0$

8. $2x^2 - 3xy - 2y^2 + 10 = 0$

9. $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 + 2x + 2\sqrt{3}y = 0$

10. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y + 100 = 0$

11. $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 90x - 130y = 0$

12. $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 80x - 60y = 0$

En los Ejercicios 13-18, representar la cónica en la calculadora y determinar el ángulo θ de rotación de sus ejes. Explicar cómo se ha usado la calculadora para obtener la gráfica.

13. $x^2 + xy + y^2 = 10$

14. $x^2 - 4xy + 2y^2 = 6$

15. $17x^2 + 32xy - 7y^2 = 75$

16. $40x^2 + 36xy + 25y^2 = 52$

17. $32x^2 + 50xy + 7y^2 = 52$

18. $4x^2 - 12xy + 9y^2 + (4\sqrt{13} + 12)x - (6\sqrt{13} + 8)y = 91$

En los Ejercicios 19-26, determinar, usando el discriminante, si la gráfica de la ecuación es una parábola, una elipse o una hipérbola.

19. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 30x - 40y = 0$

20. $x^2 - 4xy - 2y^2 - 6 = 0$

21. $13x^2 - 8xy + 7y^2 - 45 = 0$

22. $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 3x - 4y - 20 = 0$

23. $x^2 - 6xy - 5y^2 + 4x - 22 = 0$

24. $36x^2 - 60xy + 25y^2 + 9y = 0$

25. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 5x - y - 3 = 0$

26. $x^2 + xy + 4y^2 + x + y - 4 = 0$

En los Ejercicios 27-32, dibujar (si resulta posible) la gráfica de la cónica degenerada.

27. $y^2 - 4x^2 = 0$

28. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

29. $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$

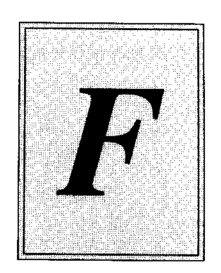
30. $x^2 - 10xy + y^2 = 0$

31. $(x - 2y + 1)(x + 2y - 3) = 0$

32. $(2x + y - 3)^2 = 0$

33. Probar que la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ es invariante bajo rotación.

34. Demostrar el Teorema A.2.



Números complejos

Operaciones con números complejos

Algunas ecuaciones no tienen soluciones reales. Tal ocurre, por ejemplo, con la ecuación cuadrática

$$x^2 + 1 = 0 \qquad \text{Ecuación sin soluciones reales}$$

no admite soluciones reales, ya que ningún número real elevado al cuadrado puede dar como resultado -1. Para soslayar esta carencia, los matemáticos han creado un sistema ampliado de números que utiliza la **unidad imaginaria** i, definida como

$$i = \sqrt{-1} \qquad \text{Unidad imaginaria}$$

donde $i^2 = -1$. Sumando números reales a múltiplos reales de esta unidad imaginaria se obtiene el conjunto de los llamados **números complejos**. Cada número complejo puede expresarse en la forma canónica $a + bi$.

DEFINICIÓN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Para cada par de números reales a, b, **el número**

$$a + bi$$

es un número complejo. Si $b \neq 0$, se dice que $a + bi$ es un **número imaginario**, y que bi es un **número imaginario puro.**

Para sumar o restar dos números complejos se suman o restan sus partes reales y sus partes imaginarias por separado.

SUMA Y RESTA DE NÚMEROS COMPLEJOS

Si $a + bi$ y $c + di$ son dos números complejos escritos en forma canónica, su suma y su diferencia se definen como sigue.

Suma: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Diferencia: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

La identidad aditiva para el sistema de los números complejos es el cero (la misma que para el sistema de los números reales). Además, el inverso aditivo del número complejo $a + bi$ es

$$-(a + bi) = -a - bi \qquad \text{Inverso aditivo}$$

En efecto,

$$(a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0i = 0$$

EJEMPLO 1 Suma y diferencia de números complejos

a) $(3 - i) + (2 + 3i) = 3 - i + 2 + 3i$ — Remover paréntesis

$= 3 + 2 - i + 3i$ — Agrupar términos análogos

$= (3 + 2) + (-1 + 3)i$

$= 5 + 2i$ — Forma canónica

Nota. En el Ejemplo 1*b* vemos que la suma de dos números complejos puede ser un número real.

b) $2i + (-4 - 2i) = 2i - 4 - 2i$ — Remover paréntesis

$= -4 + 2i - 2i$ — Agrupar términos análogos

$= -4$ — Forma canónica

c) $3 - (-2 + 3i) + (-5 + i) = 3 + 2 - 3i - 5 + i$

$= 3 + 2 - 5 - 3i + i$

$= 0 - 2i$

$= -2i$ □

Muchas de las propiedades de los números reales siguen siendo válidas para los números complejos, en particular

Las propiedades asociativas de la suma y del producto

Las propiedades conmutativas de la suma y del producto

La propiedad distributiva de la suma frente al producto

ADVERTENCIA En lugar de intentar memorizar la regla de la multiplicación, es suficiente recordar cómo se usa la propiedad distributiva al efectuar el producto de dos números complejos. El procedimiento es semejante al que se usa para multiplicar dos polinomios y agrupar sus términos análogos.

A continuación se ilustra cómo utilizarlas en el producto de dos números complejos.

$(a + bi)(c + di) = a(c + di) + bi(c + di)$	Distributiva
$= ac + (ad)i + (bc)i + (bd)i^2$	Distributiva
$= ac + (ad)i + (bc)i + (bd)(-1)$	Definición de i
$= ac - bd + (ad)i + (bc)i$	Conmutativa
$= (ac - bd) + (ad + bc)i$	Asociativa

EJEMPLO 2 Multiplicación de números complejos

a) $(3 + 2i)(3 - 2i) = 9 - 6i + 6i - 4i^2$	Producto de binomios
$= 9 - 4(-1)$	$i^2 = -1$
$= 9 + 4$	Simplificar
$= 13$	Forma canónica
b) $(3 + 2i)^2 = 9 + 6i + 6i + 4i^2$	Producto de binomios
$= 9 + 4(-1) + 12i$	$i^2 = -1$
$= 9 - 4 + 12i$	Simplificar
$= 5 + 12i$	Forma canónica

□

Como puede apreciarse en el Ejemplo 2*a*, el producto de dos números complejos puede ser un número real. Sucede así siempre que se multiplican pares de números complejos de la forma $a + bi$ y $a - bi$, llamados **complejos conjugados**.

$$\begin{aligned}(a + bi)(a - bi) &= a^2 - abi + abi - b^2i^2\\ &= a^2 - b^2(-1)\\ &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

Para hallar el cociente de $a + bi$ y $c + di$, donde c y d no son ambos nulos a la vez, multiplicamos numerador y denominador por el complejo conjugado del denominador:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di}\left(\frac{c - di}{c - di}\right) = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

EJEMPLO 3 División de números complejos

$\dfrac{2 + 3i}{4 - 2i} = \dfrac{2 + 3i}{4 - 2i}\left(\dfrac{4 + 2i}{4 + 2i}\right)$	Multiplicar por el conjugado
$= \dfrac{8 + 4i + 12i + 6i^2}{16 - 4i^2}$	Desarrollar

$$= \frac{8 - 6 + 16i}{16 + 4} \qquad i^2 = -1$$

$$= \frac{1}{20}(2 + 16i) \qquad \text{Simplificar}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{4}{5}i \qquad \text{Forma canónica}$$

□

Soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas

Cuando se utiliza la fórmula cuadrática para resolver una ecuación de segundo grado, se encuentra con frecuencia un resultado como $\sqrt{-3}$ del que se sabe que no es un número real. Sacando un factor $i = \sqrt{-1}$ podemos escribir ese número en forma canónica

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3(-1)} = \sqrt{3}\sqrt{-1} = \sqrt{3}i$$

El número $\sqrt{3}i$ se llama la raíz cuadrada principal de -3.

ADVERTENCIA La definición de la raíz cuadrada principal usa la propiedad

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

para $a > 0$ y $b < 0$. Esta regla no es válida si a y b son *ambos* negativos. Por ejemplo,

$$\sqrt{-5}\sqrt{-5} = \sqrt{5}i\sqrt{5}i$$
$$= \sqrt{25}i^2$$
$$= 5i^2 = -5$$

mientras que

$$\sqrt{(-5)(-5)} = \sqrt{25} = 5$$

Para evitar problemas con la multiplicación de raíces cuadradas de números negativos, transforme siempre los números complejos a forma canónica *antes* de efectuar su producto.

RAÍZ CUADRADA PRINCIPAL DE UN NÚMERO NEGATIVO

Si a es un número positivo, la raíz cuadrada principal del número negativo $-a$ es

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$$

EJEMPLO 4 Expresión de números complejos en forma canónica

a) $\sqrt{-3}\sqrt{-12} = \sqrt{3}i\sqrt{12}i = \sqrt{36}i^2 = 6(-1) = -6$

b) $\sqrt{-48} - \sqrt{-27} = \sqrt{48}i - \sqrt{27}i = 4\sqrt{3}i - 3\sqrt{3}i = \sqrt{3}i$

c) $(-1 + \sqrt{-3})^2 = (-1 + \sqrt{3}i)^2$

$$= (-1)^2 - 2\sqrt{3}i + (\sqrt{3})^2(i^2)$$
$$= 1 - 2\sqrt{3}i + 3(-1)$$
$$= -2 - 2\sqrt{3}i$$

□

EJEMPLO 5 Soluciones complejas de una ecuación cuadrática

Resolver $3x^2 - 2x + 5 = 0$

Solución:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(5)}}{2(3)} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-56}}{6} \qquad \text{Simplificar}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{14}i}{6} \qquad \text{Escribir en términos de } i$$

$$= \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{14}}{3}i \qquad \text{Forma canónica}$$

□

Forma polar de un número complejo

Así como los números reales se pueden representar como puntos en la recta real, un número complejo

$$z = a + bi$$

se puede representar como el punto (a, b) de un plano coordenado (el **plano complejo**). Su eje horizontal se llama **eje real** y su eje vertical se llama **eje imaginario**, como muestra la Figura A.46.

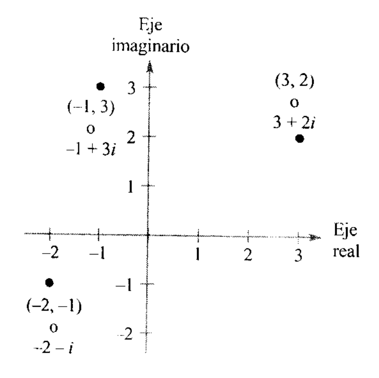


FIGURA A.46

El **valor absoluto** del número complejo $a + bi$ se define como la distancia del punto (a, b) al origen.

VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

El valor absoluto del número complejo $z = a + bi$ viene dado por

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Nota. Si el número complejo $a + bi$ es un número real (es decir, si $b = 0$), esta definición coincide con la del valor absoluto de un número real.

Para manejar eficazmente productos y cocientes de números complejos es conveniente expresar los números complejos en **forma polar**. En la Figura A.47, consideremos el número complejo $a + bi$. Denotando por θ el ángulo, medido en sentido contrario al de giro de las agujas de un reloj, entre el eje x positivo y el segmento recto que une el punto (a, b) y el origen, podemos escribir

$$a = r \cos \theta \qquad \text{y} \qquad b = r \operatorname{sen} \theta$$

donde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. En consecuencia,

$$a + bi = (r \cos \theta) + (r \operatorname{sen} \theta)i$$

de donde se obtiene la llamada **forma polar de un número complejo**.

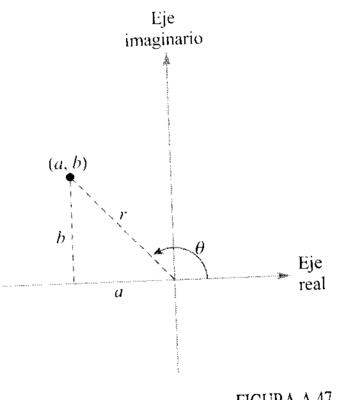


FIGURA A.47

FORMA POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

La **forma polar** del número complejo $z = a + bi$ es

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

donde $a = r\cos\theta$, $b = r \operatorname{sen} \theta$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, y $\operatorname{tg} \theta = b/a$. Se dice que el número r es el **módulo** de z, y θ es un **argumento** de z.

Nota. La forma polar de un número complejo se llama asimismo **forma trigonométrica**. Puesto que hay infinitas elecciones posibles para θ, la forma polar de un número complejo no es única. Normalmente, se restringe θ al intervalo $0 \leqslant \theta < 2\pi$, si bien en ocasiones es conveniente usar $\theta < 0$.

EJEMPLO 6 Expresión de un número complejo en forma polar

Expresar en forma polar el número complejo $z = -2 - 2\sqrt{3}i$

Solución: El valor absoluto de z es

$$r = |-2 - 2\sqrt{3}i| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$$

y el ángulo θ viene dado por

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}$$

Como $\operatorname{tg}(\pi/3) = \sqrt{3}$ y $z = -2 - 2\sqrt{3}i$ está en el tercer cuadrante, elegimos para θ el valor $\theta = \pi + \pi/3 = 4\pi/3$. Así pues, la forma polar de z es

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen} \theta) = 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}\right)$$

□

(Véase Figura A.48.)

FIGURA A.48

La forma polar se adapta muy bien al producto y al cociente de números complejos. Consideremos dos números complejos.

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \qquad \text{y} \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

El producto de z_1 y z_2 es

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2)] \end{aligned}$$

Usando las fórmulas de suma y diferencia para el seno y el coseno, se puede reescribir esa ecuación como

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \text{ sen } (\theta_1 + \theta_2)]$$

Esto completa la primera parte de la regla siguiente. Intente demostrar la segunda por sus propios medios.

PRODUCTO Y COCIENTE DE DOS NÚMEROS COMPLEJOS

Dados dos números complejos $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \text{ sen } \theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i$ sen $\theta_2)$, se tiene

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \text{ sen } (\theta_1 + \theta_1)] \qquad \text{Producto}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \text{ sen } (\theta_1 - \theta_2)] \qquad \text{Cociente}$$

Estas fórmulas dicen que para multiplicar dos números complejos basta multiplicar sus módulos y sumar sus argumentos, mientras que para dividir números complejos basta dividir los módulos y restar los argumentos.

EJEMPLO 7 Producto de números complejos en forma polar

Calcular el producto de los números complejos

$$z_1 = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{2\pi}{3}\right) \qquad z_2 = 8\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \text{ sen } \frac{11\pi}{6}\right)$$

Solución:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{2\pi}{3}\right) \cdot 8\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \text{ sen } \frac{11\pi}{6}\right) \\ &= 16\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right) + i \text{ sen } \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right)\right] \\ &= 16\left[\cos \frac{5\pi}{2} + i \text{ sen } \frac{5\pi}{2}\right] \\ &= 16\left[\cos \frac{\pi}{2} + i \text{ sen } \frac{\pi}{2}\right] \\ &= 16[0 + i(1)] = 16i \end{aligned}$$

Comprobar este resultado transformando primero a forma canónica $z_1 = -1 +$ $+ \sqrt{3}i$ y $z_2 = 4\sqrt{3} - 4i$ y multiplicando a continuación algebraicamente. □

EJEMPLO 8 División de números complejos en forma polar

Hallar el cociente z_1/z_2 de los números complejos

$$z_1 = 24(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ) \qquad z_2 = 8(\cos 75^\circ + i \operatorname{sen} 75^\circ)$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{24(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ)}{8(\cos 75^\circ + i \operatorname{sen} 75^\circ)}\\ &= \frac{24}{8}[\cos(300^\circ - 75^\circ) + i \operatorname{sen}(300^\circ - 75^\circ)]\\ &= 3[\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ]\\ &= 3\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i\end{aligned}$$

□

Potencias y raíces de números complejos

Para elevar un número complejo a una potencia, basta efectuar productos sucesivos.

$$\begin{aligned}z &= r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\\ z^2 &= r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)\\ z^3 &= r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta)\\ &\vdots\end{aligned}$$

Esta secuencia sigue una pauta que desemboca en el importante teorema siguiente, que lleva el nombre del matemático francés Abraham DeMoivre (1667-1754).

TEOREMA A.4 TEOREMA DE DEMOIVRE

Si $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ es un número complejo y n un entero positivo,

$$z^n = [r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

EJEMPLO 9 Potencias de un número complejo

Calcular por el teorema de DeMoivre $(-1 + \sqrt{3}i)^{12}$.

Solución: En primer lugar, pasamos a forma polar.

$$-1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$

Ahora, la fórmula de DeMoivre asegura que

$$\begin{aligned}(-1+\sqrt{3}i)^{12} &= \left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\ \text{sen}\ \frac{2\pi}{3}\right)\right]^{12}\\ &= 2^{12}\left[\cos(12)\frac{2\pi}{3}+i\ \text{sen}(12)\frac{2\pi}{3}\right]\\ &= 4.096\ (\cos 8\pi + i\ \text{sen}\ 8\pi)\\ &= 4.096\end{aligned}$$

□

| Nota. Nótese que en el Ejemplo 9 la respuesta es un número real.

Recordemos que, según el teorema fundamental del Álgebra, una ecuación polinómica de grado n tiene n soluciones en el sistema de los números complejos. Cada solución es una raíz n-ésima de la ecuación. Las raíces n-ésimas de un número complejo se definen como sigue.

DEFINICIÓN DE LAS RAÍCES N-ÉSIMAS DE UN NÚMERO COMPLEJO

El número complejo $u = a + bi$ es una raíz n-ésima del número complejo z si

$$z = u^n = (a+bi)^n$$

ADVERTENCIA Las raíces n-ésimas de un número complejo sirven para resolver algunas ecuaciones polinómicas. Por ejemplo, se puede utilizar la fórmula de DeMoivre para resolver la ecuación polinómica

$$x^4 + 16 = 0$$

escribiendo -16 como $16(\cos \pi + i\ \text{sen}\ \pi)$.

Vamos a buscar la forma de las raíces n-ésimas u de un número complejo dado z. Para ello, denotamos

$$u = s(\cos\beta + i\ \text{sen}\ \beta) \qquad \text{y} \qquad z = r(\cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta)$$

Por la fórmula de DeMoivre, el que sea $u^n = z$ se traduce en que

$$s_n(\cos n\beta + i\ \text{sen}\ n\beta) = r(\cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta)$$

Tomando el valor absoluto de cada miembro de esta igualdad y dividiendo por r obtenemos

$$\cos n\beta + i\ \text{sen}\ n\beta = \cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta$$

Así pues, se sigue que

$$\cos n\beta = \cos\theta \qquad \text{y} \qquad \text{sen}\ n\beta = \text{sen}\ \theta$$

| Nota. Cuando k es mayor que $n - 1$, las raíces se repiten. Así, si $k = n$, el ángulo

$$\frac{\theta + 2\pi n}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$

es coterminal con θ/n, que es el obtenido cuando $k = 0$.

Como seno y coseno tiene período 2π, estas dos ecuaciones tienen soluciones si y sólo si los ángulos difieren en un múltiplo de 2π. Por consiguiente, debe existir un entero k tal que

$$n\beta = \theta + 2\pi k$$

$$\beta = \frac{\theta + 2\pi k}{n}$$

Sustituyendo este valor de β en la forma polar de u llegamos al siguiente resultado.

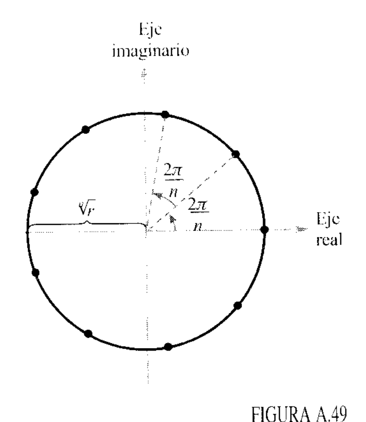


FIGURA A.49

TEOREMA A.5. RAÍCES *N*-ÉSIMAS DE UN NÚMERO COMPLEJO

Si n es un entero positivo, el número complejo $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ tiene exactamente n raíces n-ésimas distintas, dadas por

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)$$

donde $k = 0, 1, 2, \cdots, n - 1$

Esta fórmula admite una interesante interpretación geométrica, que se indica en la Figura A.49. Nótese que todas las raíces n-ésimas de z tienen el mismo módulo $\sqrt[n]{r}$, de manera que todas ellas están situadas en el círculo de radio $\sqrt[n]{r}$ centrado en el origen. Más aún, puesto que los argumentos de dos raíces consecutivas difieren siempre en $2\pi/n$, las n raíces están uniformemente espaciadas sobre ese círculo.

EJEMPLO 10 Cálculo de las raíces n-ésimas de un número complejo

Hallar las tres raíces cúbicas de $z = -2 + 2i$.

Solución: Como z está en el segundo cuadrante, su forma polar es

$$z = -2 + 2i = \sqrt{8}\,(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$$

Por la fórmula general de las raíces n-ésimas, las raíces cúbicas de z tienen la forma

$$\sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{135° + 360°k}{3} + i \operatorname{sen}\frac{135° + 360°k}{3}\right)$$

Por tanto, haciendo $k = 0$, 1 y 2 obtenemos las tres raíces

$$\sqrt{2}(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°) = 1 + i$$
$$\sqrt{2}(\cos 165° + i \operatorname{sen} 165°) \approx -1{,}3660 + 0{,}3660i$$
$$\sqrt{2}(\cos 285° + i \operatorname{sen} 285°) \approx 0{,}3660 - 1{,}3660i$$

□

Ejercicios del Apéndice F

En los Ejercicios 1-24, efectuar la operación y expresar el resultado en forma canónica.

1. $(5 + i) + (6 - 2i)$

2. $(13 - 2i) + (-5 + 6i)$

3. $(8 - i) - (4 - i)$

4. $(3 + 2i) - (6 + 13i)$

5. $(-2 + \sqrt{-8}) + (5 - \sqrt{-50})$

6. $(8 + \sqrt{-18}) - (4 + 3\sqrt{2}i)$

7. $13i - (14 - 7i)$

8. $22 + (-5 + 8i) + 10i$

9. $-\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i\right) + \left(\frac{5}{3} + \frac{11}{3}i\right)$

10. $(1{,}6 + 3{,}2i) + (-5{,}8 + 4{,}3i)$

11. $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-2}$

12. $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-10}$

13. $(\sqrt{-10})^2$

14. $(\sqrt{-75})^2$

15. $(1 + i)(3 - 2i)$

16. $(6 - 2i)(2 - 3i)$

17. $6i(5 - 2i)$

18. $-8i(9 + 4i)$

19. $(\sqrt{14} + \sqrt{10}i)(\sqrt{14} - \sqrt{10}i)$

20. $(3 + \sqrt{-5})(7 - \sqrt{-10})$

21. $(4 + 5i)^2$

22. $(2 - 3i)^2$

23. $(2 + 3i)^2 + (2 - 3i)^2$

24. $(1 - 2i)^2 - (1 + 2i)^2$

En los Ejercicios 25-32, escribir el conjugado del número complejo dado y efectuar el producto de ambos.

25. $5 + 3i$

26. $9 - 12i$

27. $-2 - \sqrt{5}i$

28. $-4 + \sqrt{2}i$

29. $20i$

30. $\sqrt{-15}$

31. $\sqrt{8}$

32. $1 + \sqrt{8}$

En los Ejercicios 33-46, efectuar la operación indicada y expresar el resultado en forma canónica.

33. $\frac{6}{i}$

34. $-\frac{10}{2i}$

35. $\frac{4}{4 - 5i}$

36. $\frac{3}{1 - i}$

37. $\frac{2 + i}{2 - i}$

38. $\frac{8 - 7i}{1 - 2i}$

39. $\frac{6 - 7i}{i}$

40. $\frac{8 + 20i}{2i}$

41. $\frac{1}{(4 - 5i)^2}$

42. $\frac{(2 - 3i)(5i)}{2 + 3i}$

43. $\frac{2}{1 + i} - \frac{3}{1 - i}$

44. $\frac{2i}{2 + i} + \frac{5}{2 - i}$

45. $\frac{i}{3 - 2i} + \frac{2i}{3 + 8i}$

46. $\frac{1 + i}{i} - \frac{3}{4 - i}$

En los Ejercicios 47-54, resolver la ecuación usando la fórmula cuadrática.

47. $x^2 - 2x + 2 = 0$

48. $x^2 + 6x + 10 = 0$

49. $4x^2 + 16x + 17 = 0$

50. $9x^2 - 6x + 37 = 0$

51. $4x^2 + 16x + 15 = 0$

52. $9x^2 - 6x - 35 = 0$

53. $16t^2 - 4t + 3 = 0$

54. $5s^2 + 6s + 3 = 0$

En los Ejercicios 55-62, simplificar el número complejo y escribirlo en forma canónica.

55. $-6i^3 + i^2$

56. $4i^2 - 2i^3$

57. $-5i^5$

58. $(-i)^3$

59. $(\sqrt{-75})^3$

60. $(\sqrt{-2})^6$

61. $\frac{1}{i^3}$

62. $\frac{1}{(2i)^3}$

En los Ejercicios 63-68, representar el número complejo en el plano complejo y calcular su valor absoluto.

63. $-5i$ **64.** -5

65. $-4 + 4i$ **66.** $5 - 12i$

67. $6 - 7i$ **68.** $-8 + 3i$

En los Ejercicios 69-76, representar el número complejo en el plano complejo y expresarlo en forma polar.

69. $3 - 3i$ **70.** $2 + 2i$

71. $\sqrt{3} + i$ **72.** $-1 + \sqrt{3}i$

73. $-2(1 + \sqrt{3}i)$ **74.** $\frac{5}{2}(\sqrt{3} - i)$

75. $6i$ **76.** 4

En los Ejercicios 77-82, representar el número complejo en el plano complejo y expresarlo en forma canónica.

77. $2(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$

78. $5(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$

79. $\frac{3}{2}(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°)$

80. $\frac{3}{4}(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$

81. $3{,}75\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}\right)$

82. $8\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{12}\right)$

En los Ejercicios 83-86, efectuar la operación y expresar el resultado en forma polar.

83. $\left[3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)\right]\left[4\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right)\right]$

84. $\left[\frac{3}{2}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)\right]\left[6\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)\right]$

85. $\left[\frac{5}{3}(\cos 140° + i \operatorname{sen} 140°)\right]\left[\frac{3}{2}(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)\right]$

86. $\frac{\cos (5\pi/3) + i \operatorname{sen} (5\pi/3)}{\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi}$

En los Ejercicios 87-94, usar la fórmula de DeMoivre para calcular la potencia indicada. Expresar el resultado en forma canónica.

87. $(1 + i)^5$

88. $(2 + 2i)^6$

89. $(-1 + i)^{10}$

90. $(1 - i)^{12}$

91. $2(\sqrt{3} + i)^7$

92. $4(1 - \sqrt{3}i)^3$

93. $\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}\right)^{10}$

94. $\left[2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)\right]^8$

En los Ejercicios 95-100, *a*) usar el Teorema A.5 para calcular las raíces que se especifican, *b*) representarlas en el plano complejo, y *c*) expresar cada una de las raíces en forma canónica.

95. Raíces cuadradas de $5(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$

96. Raíces cuadradas de $16(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$

97. Raíces cuartas de $16\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}\right)$

98. Raíces quintas de $32\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right)$

99. Raíces cúbicas de $-\frac{125}{2}(1 + \sqrt{3}i)$

100. Raíces cúbicas de $-4\sqrt{2}(1 - i)$

En los Ejercicios 101-108, usar el Teorema A.5 para hallar todas las soluciones de la ecuación y representarlas gráficamente.

101. $x^4 - i = 0$ **102.** $x^3 + 1 = 0$

103. $x^5 + 243 = 0$ **104.** $x^4 - 81 = 0$

105. $x^3 + 64i = 0$ **106.** $x^6 - 64i = 0$

107. $x^3 - (1 - i) = 0$ **108.** $x^4 + (1 + i) = 0$

Soluciones de los ejercicios impares

CAPÍTULO P

Sección P.1 *(página 12)*

1. b **2.** d **3.** a **4.** c

5. (0, −2), (−2, 0), (1, 0)

7. (0, 0), (−3, 0), (3, 0) **9.** (0, 0)

11. Simetría respecto del eje y.

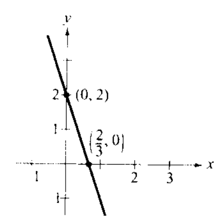
13. Simetría respecto del eje x.

15. Simetría respecto del origen.

17. Simetría respecto del origen.

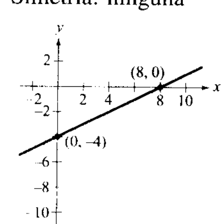
19. $y = -3x + 2$

Simetría: ninguna



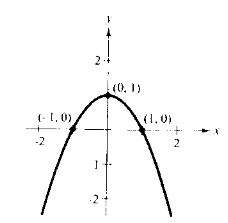
21. $y = \frac{1}{2}x - 4$

Simetría: ninguna



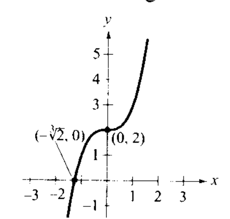
23. $y = 1 - x^2$

Simetría: eje y



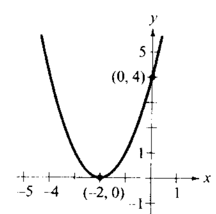
25. $y = x^3 + 2$

Simetría: ninguna



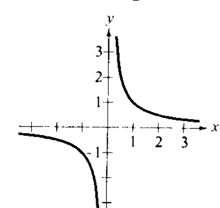
27. $y = (x + 2)^2$

Simetría: ninguna

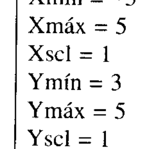


29. $y = \frac{1}{x}$

Simetría: origen

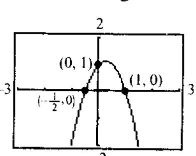


31.



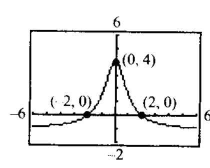
33. $y = -2x^2 + x + 1$

Simetría: ninguna

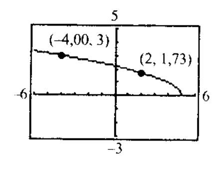


35. $y = \dfrac{5}{x^2 + 1} - 1$

Simetría: eje y



37. $y = \sqrt{5 - x}$

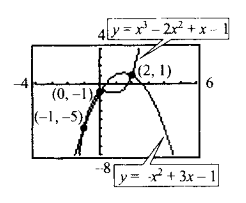


39. $y = (x + 2)(x - 4)(x - 6)$ **41.** $y = x$ **43.** (1, 1)

45. (5, 2) **47.** (−1, −2), (2, 1)

49. (−1, −1), (0, 0), (1, 1)

51. (−1, −5), (0, −1), (2, 1) **53.** $x \approx 3.133$ unidades



55. *a)* $y = 0{,}0127t^2 + 4{,}4181t + 36{,}2896$

b) 250 0 0 25 *c)* 180,3

57. 400 0 0 100

Aproximadamente 1/4

59. Falso: (−1, −2) no es un punto de la gráfica de $x = \frac{1}{4}y^2$.

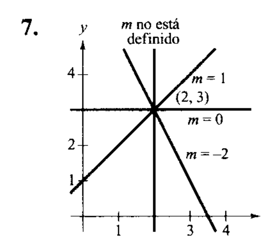
60. Verdadero **61.** Verdadero **62.** Verdadero

63. $(1 - K^2)x^2 + (1 - K^2)y^2 + 4K^2x - 4K^2 = 0$

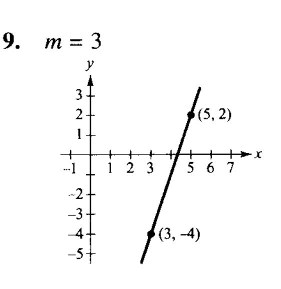
Sección P.2 *(página 21)*

1. $m = 1$ **3.** $m = 0$ **5.** $m = -12$

7.



9. $m = 3$

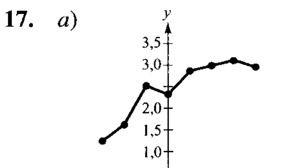


11. $m = -\frac{2}{3}$ **13.** (0, 1), (1, 1), (3, 1)

(−2, 4) (1, 2)

15. (0, 10), (2, 4), (3, 1)

17. *a)*



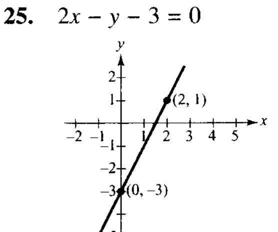
b) Decrece más rápidamente en 1989-1990

Crece más rápidamente en 1988-1989

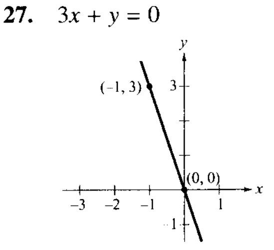
19. Puede usarse cualquier par de puntos, ya que el ritmo de cambio permanece constante.

21. $m = -\frac{1}{5}$, (0, 4) **23.** m no está definido, no hay y-intersección.

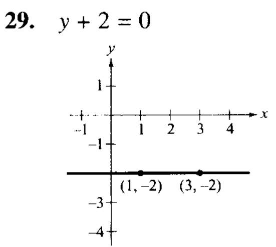
25. $2x - y - 3 = 0$



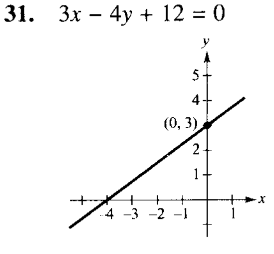
27. $3x + y = 0$



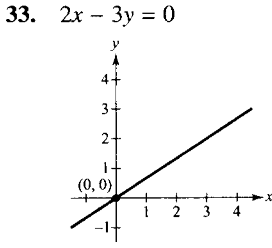
29. $y + 2 = 0$



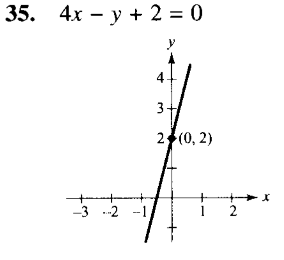
31. $3x - 4y + 12 = 0$



33. $2x - 3y = 0$



35. $4x - y + 2 = 0$



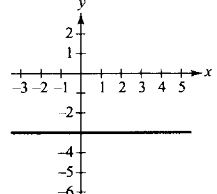
37. $x - 3 = 0$ **39.** $3x + 2y - 6 = 0$ **41.** $x + y - 3 = 0$

43. *a)* $2x - y - 3 = 0$ *b)* $x + 2y - 4 = 0$

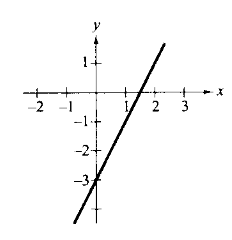
45. *a)* $40x + 24y - 53 = 0$ *b)* $24x - 40y + 9 = 0$

47. *a)* $x - 2 = 0$ *b)* $y - 5 = 0$

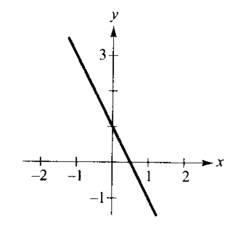
49.



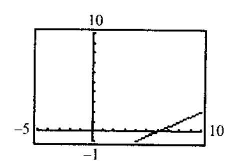
51.

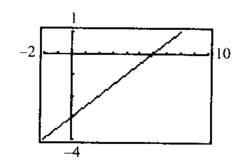


53.



55.

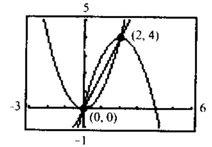




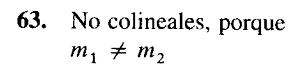
La segunda proporciona una gráfica más completa.

57. $V = 125t + 1.540$ **59.** $V = 36.400 - 2.000t$

61. $y = 2x$



63.


No colineales, porque $m_1 \neq m_2$

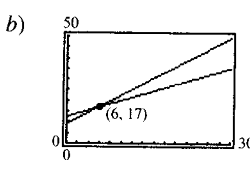
65. $\left(0, \dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}\right)$ **67.** $\left(b, \dfrac{a^2 - b^2}{c}\right)$

69. $5F - 9C - 160 = 0$

72 °F ≈ 22,2 °C

71. *a)* $W_1 = 12{,}50 + 0{,}75x$
$W_2 = 9{,}20 + 1{,}30x$

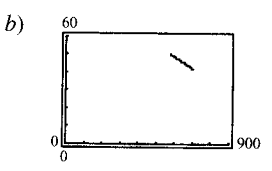
b)



c) Elegir la posición 1 cuando se producen menos de 6 unidades y la posición 2 en caso contrario.

73. *a)* $x(p) = \dfrac{1330 - p}{15}$

b)



$x(655) = 45$

c) $x(595) = 49$

75. 2 **77.** $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ **79.** $2\sqrt{2}$

87. Verdadero **88.** Falso: Si m_1 es positiva, entonces $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$ es negativa

Sección P.3 *(página 33)*

1. *a)* -3 *b)* -9 *c)* $2b - 3$ *d)* $2x - 5$

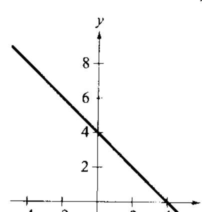
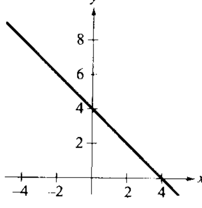
3. *a)* -1 *b)* 2 *c)* 6 *d)* $= 2t^2 + 4$

5. *a)* 1 *b)* 0 *c)* $-\frac{1}{2}$

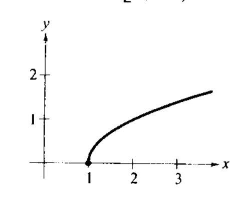
7. $3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2, \ \Delta x \neq 0$

9. $\dfrac{-1}{\sqrt{x-1}\,(1 + \sqrt{x+1})}, \ x \neq 2$

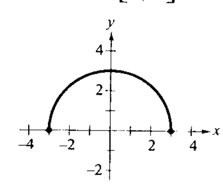
11. $f(x) = 4 - x$
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido: $(-\infty, \infty)$

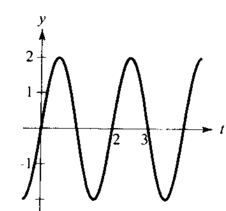
13. $f(x) = \sqrt{x-1}$
Dominio: $[1, \infty)$
Recorrido: $[0, \infty)$



15. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
Dominio: $[-3, 3]$
Recorrido: $[0, 3]$



17. $g(t) = 2 \text{ sen } \pi t$
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido: $(-2, 2)$



19. y no es una función de x.

21. $f(x) = \begin{cases} -2x + 2, & x < 0 \\ 2, & 0 \leqslant x < 2 \\ 2x - 2, & x \geqslant 2 \end{cases}$

23. y no es una función de x

25. y no es una función de x.

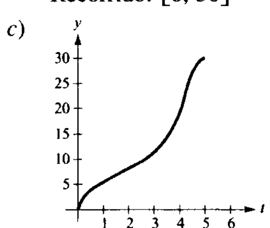
27. No **29.** ii, $c = -2$ **30.** i, $c = \frac{1}{4}$

31. iv, $c = 32$ **32.** iii, $c = 3$

33. *a*) A cada instante t le corresponde una profundidad d.

b) Dominio: [0, 5]; Recorrido: [0, 30]

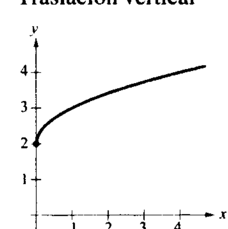
c)



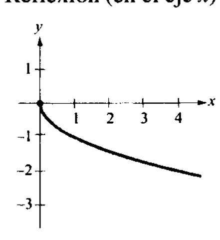
35.

Xmín = −25
Xmáx = 25
Xscl = 5
Ymín = −2.000
Ymáx = 2.000
Yscl = 200

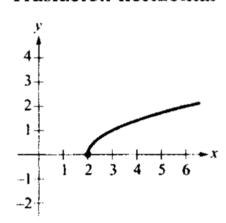
37. *a*) Traslación vertical



b) Reflexión (en el eje x)



c) Traslación horizontal



39. *a*) $T(4) = 16$, $T(15) = 23$

b) El cambio de temperaturas ocurriría una hora después.

c) Las temperaturas son inferiores en 1°.

41. $(f \circ g)(x) = x$

Dominio: $[0, \infty)$

$(g \circ f)(x) = |x|$

Dominio: $(-\infty, \infty)$

43. $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

Dominio: $(-\infty, \infty)$

$(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1$

Dominio: $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$

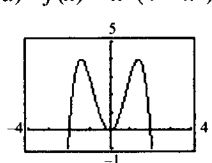
45. $(A \circ r)(t) = 0{,}36\pi t^2$

$A \circ r$ representa el área del círculo en el instante t.

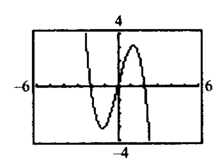
47. Par **49.** Impar

51. *a*) $(\frac{3}{2}, 4)$ *b*) $(\frac{3}{2}, -4)$

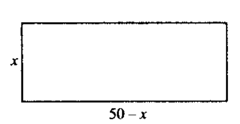
57. *a*) $f(x) = x^2(4 - x^2)$



b) $f(x) = x(4 - x^2)$

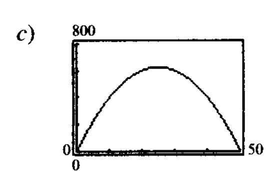


59. *a*)



b) $A = x(50 - x)$

c)



Dominio: (0, 50)

d) 25 × 25 metros

61. *a*)

Altura x	*Longitud y anchura*	*Volumen V*
1	$24 - 2(1)$	$1[24 - 2(1)]^2 = 484$
2	$24 - 2(2)$	$2[24 - 2(2)]^2 = 800$
3	$24 - 2(3)$	$3[24 - 2(3)]^2 = 972$
4	$24 - 2(4)$	$4[24 - 2(4)]^2 = 1.024$
5	$24 - 2(5)$	$5[24 - 2(5)]^2 = 980$
6	$24 - 2(6)$	$6[24 - 2(6)]^2 = 864$

Estimación del volumen máximo: 1.024 cm³.

b) 1.200 0 0 7

V es función de x.

c) $V = 4x(12 - x)^2$
Dominio: (0, 12)

d) 4 × 16 × 16 cm

63. Falso: si $f(x) = x^2$, entonces $f(-1) = f(1)$

64. Verdadero **65.** Verdadero

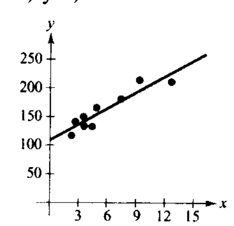
66. Falso: si $f(x) = x^2$, entonces $f(2x) = 4x^2 \neq 2f(x)$

Sección P.4 *(página 40)*

1. Cuadrática **2.** Trigonométrica **3.** Lineal

4. No hay relación

5. *a*) y *b*)

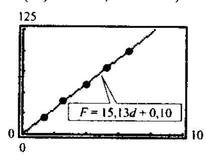


Aproximación lineal

c) 136

7. *a*) $F(d) = 15{,}1d + 0{,}1$

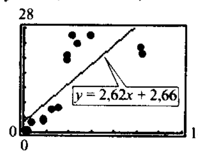
b)



c) 3,6

9. *a*) $y = 2{,}62x + 2{,}66$

b)



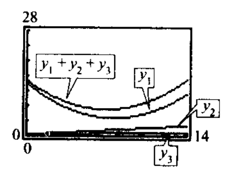
c) Dinamarca, Francia, Italia

11. *a*) $y_1 = 0{,}16t^2 - 2{,}43t + 13{,}96$

$y_2 = 0{,}17t + 0{,}38$

$y_3 = 0{,}04t + 0{,}44$

b)

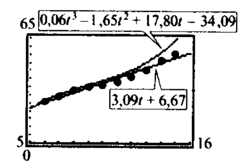


26,66 centavos por milla

13. *a*) $y_1 = 3{,}09t + 6{,}67$

$y_2 = 0{,}06t^3 - 1{,}65t^2 + 17{,}80t - 34{,}09$

b)



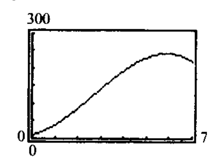
c) Cúbico *d*) $y_3 = 0{,}17t^2 - 0{,}44t + 23{,}82$

e) El crecimiento medio anual del número de personas asistidas.

f) Lineal: 68,5; cúbico: 141,5

15. *a*) $y = -1{,}81x^3 + 14{,}58x^2 + 16{,}39x + 10$

b)



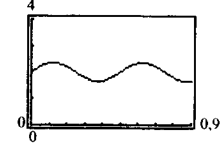
c) 214

17. *a*) Sí. En el instante t hay un desplazamiento y, y sólo uno.

b) Amplitud: 0,35; período: 0,5.

c) $y = 0{,}35 \text{ sen } (4\pi t) + 2$

d)

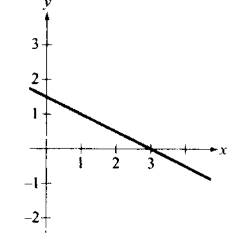


Ejercicios de repaso del Capítulo P (*página 43*)

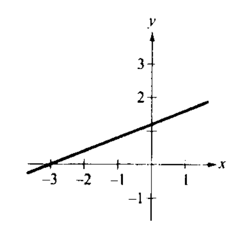
1. $(\frac{3}{2}, 0), (0, -3)$ **3.** $(1, 0), (0, \frac{1}{2})$

5. Simetría respecto del eje y

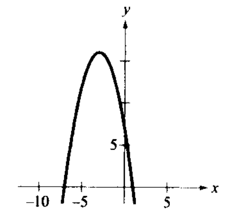
7.



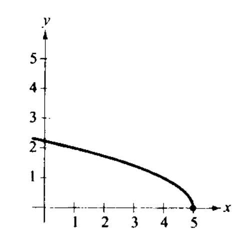
9.



11.



13.

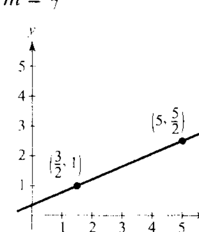


15.

Xmín = −5
Xmáx = 5
Xscl = 1
Ymín = −30
Ymáx = 10
Yscl = 5

17. (4, 1) **19.** $y = x^3 - 4x$

21. $m = \frac{3}{7}$

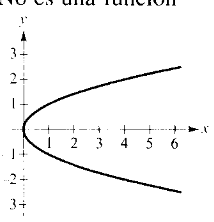


23. $t = \frac{7}{3}$

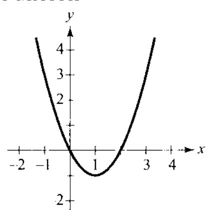
25. *a*) $7x - 16y + 78 = 0$
b) $5x - 3y + 22 = 0$
c) $y + 2x = 0$
d) $x + 2 = 0$

27. $V = 12.500 - 850t$
$9.950

29. No es una función

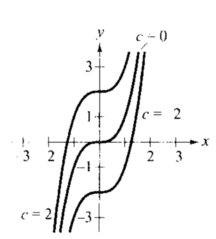


31. Función

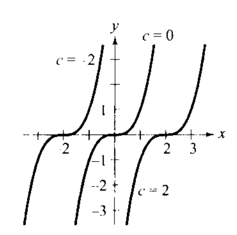


33. *a*) No está definido *b*) $\dfrac{-1}{1 + \Delta x}$, $\Delta x \neq 0$

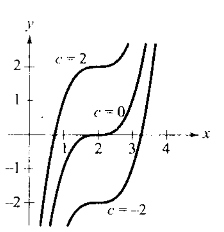
35. *a*)



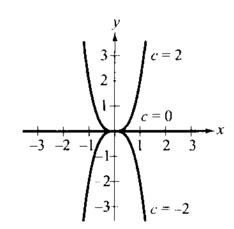
b)



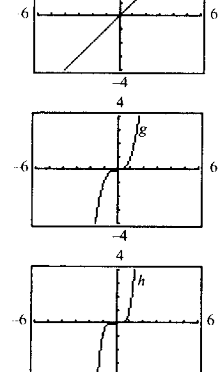
c)

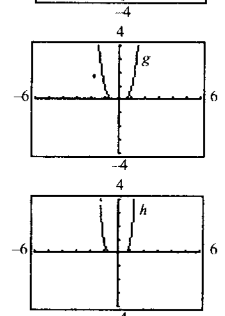


d)



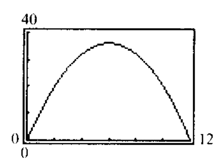
37. *a*)





b) Todas las gráficas pasan por el origen. Las de las potencias impares de x son simétricas respecto del origen y las de las potencias pares respecto del eje y. Al crecer la potencia, las gráficas se aplastan contra el eje x en el intervalo $-1 < x < 1$.

39. *a*) $A = x(12 - x)$
b) Dominio: (0, 12)
c) Área máxima: 36
6 × 6 pulgadas



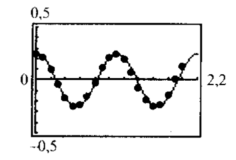
41. *a*) Grado mínimo: 3; coeficiente dominante: negativo.
b) Grado mínimo: 4; coeficiente dominante: positivo.
c) Grado mínimo: 2; coeficiente dominante: negativo.
d) Grado mínimo: 5; coeficiente dominante: positivo.

43. *a*) Sí. A cada instante t le corresponde un desplazamiento y, y sólo uno.

b) Amplitud: 0,25; período: 1,1

c) $y = \frac{1}{4}\cos(5{,}7t)$

d)



CAPÍTULO 1

Sección 1.1 *(página 54)*

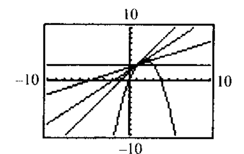
1. Matemáticas previas al Cálculo: 300 pies.

3. Cálculo: La pendiente de la recta tangente en $x = 2$ es 0,15.

5. Matemáticas previas al Cálculo: $\frac{15}{2}$

7. Matemáticas previas al Cálculo: 24

9. *a*)



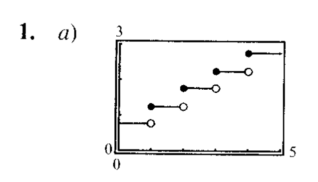
b) Las gráficas de y_2 se acercan a la recta tangente y_1 en $x = 1$.

c) 2; {0,2, 0,1, 0,01, 0,001}

11. *a*) 5,66
b) 6,11
c) Aumentando el número de segmentos rectos.

Sección 1.2 *(página 62)*

1. *a*)



b)

t	3	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	4
C	1,75	2,25	2,25	?	2,25	2,25	2,25

$\lim_{t \to 3,5} C(t) = 2,25$

c)

t	2	2,5	2,9	3	3,1	3,5	4
C	1,25	1,75	1,75	?	2,25	2,25	2,25

No existe el límite, ya que los límites laterales no coinciden.

3.

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	0,3448	0,3344	0,3334	0,3332	0,3322	0,3226

$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-x-2} \approx 0,3333 \left(\text{El límite exacto es } \frac{1}{3}\right)$

5.

x	−0,1	−0,01	−0,001	0,001	0,01	0,1
$f(x)$	0,2911	0,2889	0,2887	0,2887	0,2884	0,2863

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} \approx 0,2887 \left(\text{El límite exacto es } \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$

7.

x	2,9	2,99	2,999	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	−0,0641	−0,0627	−0,0625	−0,0625	−0,0623	−0,0610

$\lim_{x \to 3} \frac{[1/(x+1)]-(1/4)}{x-3} \approx -0,0625$ (El límite exacto es $-\frac{1}{16}$)

9.

x	−0,1	−0,01	−0,001	0,001	0,01	0,1
$f(x)$	0,9983	0,99998	1,0000	1,0000	0,99998	0,9983

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \approx 1,0000$ (El límite exacto es 1)

11. 1 **13.** 2 **15.** No existe el límite.

17. No existe el límite. **19.** No existe el límite.

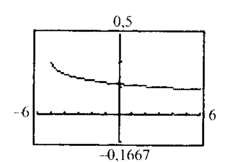
21. $L = 8$. Tómese $\delta = \frac{0,01}{3} \approx 0,0033$

23. $L = 1$. Supóngase $1 < x < 3$ y tómese $\delta = \frac{0,01}{5} = 0,002$.

25. 5 **27.** −3 **29.** 3 **31.** 0

33. 4 **35** 2

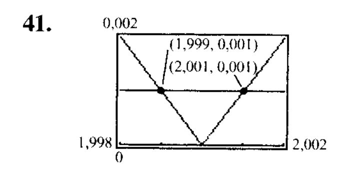
37. En la gráfica no es evidente el hecho de que el límite en $x = 4$ no existe.



Dominio: $[-5, 4), (4, \infty)$

$\lim_{x \to 4} f(x) = \frac{1}{6}$

41.



43. Falso: el que exista o no $f(x)$ en $x = c$ no influye en la existencia del límite de $f(x)$ cuando $x \to c$.

44. Verdadero. **45.** Falso: véase Ejercicio 13.

46. Falso: el que exista o no el límite de $f(x)$ cuando $x \to c$ no influye en la existencia de $f(c)$.

Sección 1.3 *(página 75)*

1.

a) 0 *b*) 6

3.

a) 0 *b*) ≈ 0,52

5. 16

7. −1 **9.** −4 **11.** 2 **13.** 1

15. $\frac{1}{2}$ **17** −2 **19.** 1 **21.** −1

23. 1 **25.** $\frac{1}{2}$ **27.** −1

29. *a*) 15 *b*) 5 *c*) 6 *d*) $\frac{2}{3}$

31. *a*) 64 *b*) 2 *c*) 12 *d*) 8

33. *a*) 1 *b*) 3

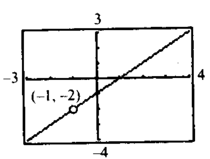
$$g(x) = \frac{-2x^2 + x}{x} = -2x + 1, \qquad x \neq 0$$

35. *a*) 2 *b*) 0

$$g(x) = \frac{x^3 - x}{x - 1} = x^2 + x, x \neq 1$$

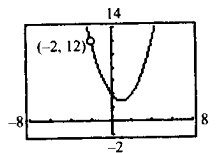
37. −2

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1 = g(x), x \neq -1$$



39. 12

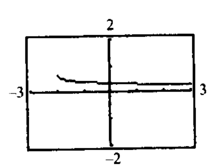
$$f(x) = \frac{x^3 + 8}{x + 2} = x^2 - 2x + 4, \quad x \neq -2$$



41. $\frac{1}{10}$ **43.** $\frac{3}{2}$ **45.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **47.** $-\frac{1}{4}$

49. 2 **51.** $2x - 2$

53.

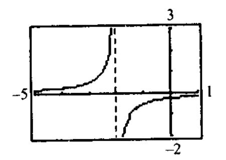


x	−0,1	−0,01	−0,001	0,001	0,01	0,1
$f(x)$	0,358	0,354	0,354	0,354	0,353	0,349

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} \approx 0{,}354 \left(\text{El límite exacto es } \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$



55.

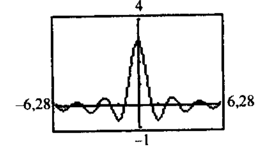


x	−0,1	−0,01	−0,001	0	0,001	0,01	0,1
$f(x)$	−0,263	−0,251	−0,250	?	−0,250	−0,249	−0,238

$$\lim_{x\to 0} \frac{[1/(2+x)] - (1/2)}{x} \approx -0{,}250 \text{ (El límite exacto es } -\tfrac{1}{4})$$

57. $\frac{1}{5}$ **59.** 0 **61.** 0 **63.** 0 **65.** 1 **67.** 1

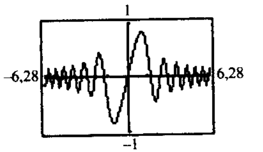
69.



t	−0,1	−0,01	0	0,01	0,1
$f(t)$	2,96	2,9996	?	2,9996	2,96

$$\lim_{t\to 0} \frac{\text{sen } 3t}{t} = 3$$

71.

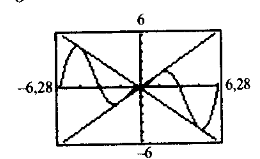


x	−0,1	−0,01	−0,001	0	0,001	0,01	0,1
$f(x)$	−0,1	−0,01	−0,001	?	0,001	0,01	0,1

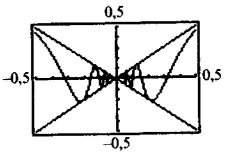
$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x^2}{x} = 0$$

73. 2 **75.** $-\frac{4}{x^2}$ **77.** 4

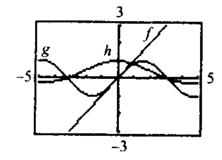
79. 0 **81.** 0



83 0



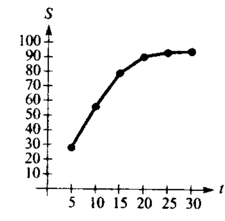
85.



Las magnitudes de $f(x)$ y $g(x)$ son aproximadamente iguales cuando x está «cerca» de 0. Por tanto, su cociente es aproximadamente 1.

87. −160 pies/s **89.** −29,4

91. *a)*



b) Sí. Al crecer el tiempo, S crece a ritmo más lento.

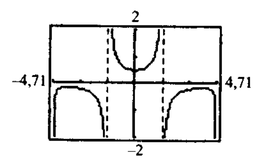
97. Falso. Sean $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ y $g(x) = x^2$

Entonces $f(x) < g(x)$ para todo $x \neq 0$

Sin embargo, $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$

105. *a)* Dominio: toda la recta real excepto $x = 0$ y los múltiplos impares de $\pi/2$

b)



No resulta obvio que $f(0)$ no está definido.

c) 0,5 *d)* $\frac{1}{2}$

107. f y g coinciden salvo en un punto si c es un número real tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq c$

Sección 1.4 *(página 89)*

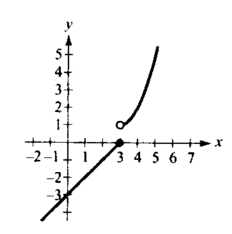
1. *a)* No existe el límite en $x = c$

b) La función no está definida en $x = c$

c) Existe el límite pero no es igual al valor de la función en $x = c$

d) No existe el límite en $x = c$

3.



No es continua porque no existe $\lim_{x \to 3} f(x)$

5. *a)* 1 *b)* 1 *c)* 1

7. *a)* 0 *b)* 0 *c)* 0

9. *a)* 3 *b)* −3 *c)* No existe límite

11. $\frac{1}{10}$ **13.** No existe límite **15.** No existe límite

17. $-\frac{1}{x^2}$ **19.** No existe límite **21.** 2

23. No existe límite **25.** 3

27. Discontinua en $x = -2$ y en $x = 2$

29. Discontinua en todos los enteros

31. Continua en toda la recta real

33. Continua en toda la recta real

35. Discontinuidad no evitable en $x = 1$

37. Continua para todo x real

39. Discontinuidad evitable en $x = -2$ y no evitable en $x = 5$

41. Discontinuidad no evitable en $x = -2$

43. Continua en toda la recta real x

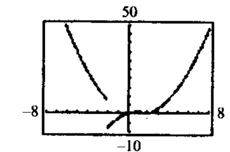
45. Discontinuidad no evitable en $x = 2$

47. Continua en toda la recta real x

49. Discontinuidades no evitables en todos los múltiplos enteros de $\pi/2$

51. Discontinuidades no evitables en todos los enteros

53.



$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

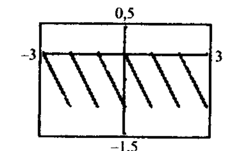
Discontinuidad en $x = -2$

55. $a = 2$ **57.** $a = -1, b = 1$

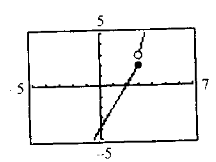
59. Continua en toda la recta real x

61. Discontinuidades no evitables en $x = 1$ y en $x = -1$

63. Discontinuidades no evitables en todos los enteros



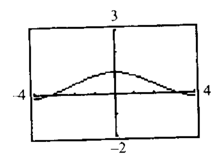
65. Discontinua en $x = 3$



67. Continua en $(-\infty, \infty)$

69. Continua en..., $(-2\pi, 0)$, $(0, 2\pi)$, $(2\pi, 4\pi)$, ...

71.



No es evidente en la gráfica que la función sea discontinua en $x = 0$.

73. $f(x)$ es continua en $[2, 4]$.

$f(2) = -1$ y $f(4) = 3$

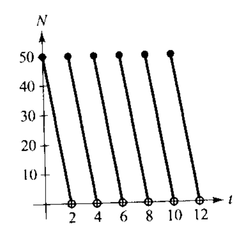
Por el teorema del valor intermedio, $f(c) = 0$ al menos en un valor de c entre 2 y 4.

75. 0,68; 0,6823 **77.** 0,56; 0,5636 **79.** $f(3) = 11$

81. $f(2) = 4$

83. Como $V(0) = 0$ y $V(5) = 523{,}6$ y V es continua, existe al menos un número real r, con $0 \leqslant r \leqslant 5$, tal que $V(r) = 275$.

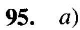
85. La función es discontinua en todos los enteros pares positivos. La empresa debe reabastecerse cada 2 meses.

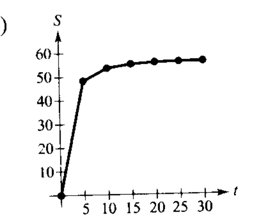


91. Verdadero **92.** Verdadero

93. Falso: la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ tienen a lo sumo n discontinuidades, si n denota el grado de $q(x)$.

94. Falso: es discontinua en $x = 1$.

95.  *a)*



b) Parece haber una velocidad límite y la causa puede ser la resistencia del aire.

99. Dominio: $[-c^2, 0)$, $(0, \infty)$

Tomar $f(0) = \dfrac{1}{2c}$

Sección 1.5 *(página 98)*

1. $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{1}{(x+2)^2} = \infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{1}{(x+2)^2} = \infty$

3. $\lim\limits_{x \to -2^+} \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4} = \infty$

5.

x	−3,5	−3,1	−3,01	−3,001	−2,999	−2,99
$f(x)$	0,31	1,64	16,6	167	−167	−16,6

x	−2,9	−2,5
$f(x)$	−1,7	−0,36

$\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \infty$

7.

x	−3,5	−3,1	−3,01	−3,001	−2,999	−2,99
$f(x)$	3,8	16	151	1.501	−1.499	−149

x	−2,9	−2,5
$f(x)$	−14	−2,3

$\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \infty$

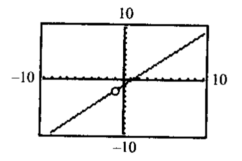
9. $x = 0$ **11.** $x = 2$, $x = -1$ **13.** $x = \pm 1$

15. $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{n\pi}{2}$, n entero **17.** $t = 0$

19. $x = -2$, $x = 1$ **21.** No hay asíntotas verticales

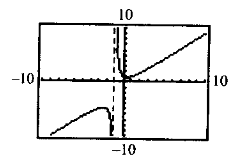
23. $t = n\pi$, n entero no nulo

25.



Discontinuidad evitable en $x = -1$

27.

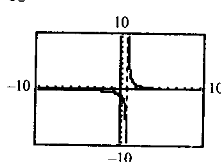


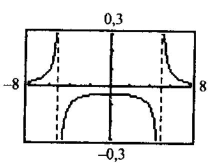
Asíntota vertical $x = -1$

29. $-\infty$ **31.** ∞ **33.** $\frac{4}{5}$ **35.** $-\infty$

37. ∞ **39.** $\frac{1}{2}$

41. ∞ **43.** $-\infty$





$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty$

45. ∞

47. *a)* $\frac{7}{12}$ pies/s *b)* $\frac{3}{2}$ pies/s *c)* ∞

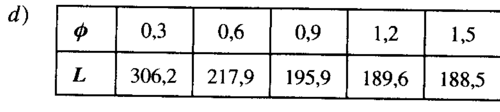
49. *a)* \$176 millones *b)* \$528 millones
c) \$1.584 millones *d)* ∞

51. ∞

53. *a)* 850 revoluciones por minuto
b) Invierte la dirección
c) $L = 60 \text{ ctg } \phi + 30(\pi + 2\phi)$

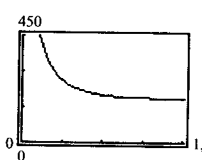
Dominio: $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

d)



ϕ	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5
L	306,2	217,9	195,9	189,6	188,5

e)



f) 60π *g)* ∞

55. Falso: entonces $p(x) = x^2 - 1$.

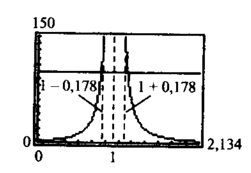
56. Falso: entonces $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

57. Verdadero

58. Falso: entonces $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

59. Tomar $f(x) = 1/x^2$, $g(x) = 1/x^4$, y $c = 0$

63. *a)*

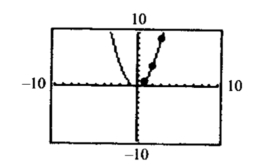


b) 1.500 / 1 − 0,055 / 1 + 0,055 / 0 / 0 / 1 / 2,134

c) δ decrece al crecer M.

Ejercicios de repaso del Capítulo 1 *(página 101)*

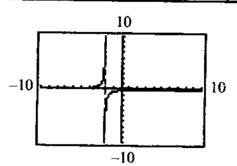
1. Cálculo



Estimación: 8.261

3.

x	−0,1	−0,01	−0,001	0,001	0,01	0,1
$f(x)$	−0,26	−0,25	−0,250	−0,2499	−0,249	−0,24



$\lim_{x \to 0} f(x) \approx 0{,}25$

5. *a)* −2 *b)* −3

7. 7 **9.** 77 **11.** $\frac{10}{3}$ **13.** $-\frac{1}{4}$ **15.** −1

17. 75 **19.** $-\infty$ **21.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **23.** $-\infty$

25. $\frac{1}{3}$ **27.** $-\infty$ **29.** $\frac{4}{5}$ **31.** ∞

33.

x	1,1	1,01	1,001	1,0001
$f(x)$	0,5680	0,5764	0,5773	0,5773

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1} \approx 0{,}577 \left(\text{El límite exacto es } \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

35. Discontinuidad evitable en cada entero. Continua en $(k, k+1)$ para todo entero k.

37. Discontinuidad evitable en $x = 1$
Continua en $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

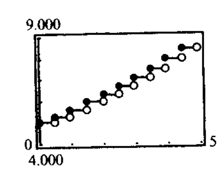
39. Discontinuidad no evitable en $x = 2$
Continua en $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

41. Discontinuidad no evitable en $x = -1$
Continua en $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

43. Discontinuidad no evitable en todo entero par.
Continua en $(2k, 2k+2)$ para todo entero k

45. $c = -\frac{1}{2}$

47. Discontinuidad no evitable cada 6 meses



49. $x = 0$ **51.** $x = 10$

53. *a)* \$14.117,65 *b)* \$80.000,00
c) \$720.000,00 *d)* ∞

55. −39,2 m/s

57. Falso: $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ **58.** Verdadero

59. Verdadero.

60. Falso: la existencia del límite de $f(x)$ cuando $x \to c$ no influye en la existencia de $f(c)$

61. Verdadero **62.** Falso: el límite no existe

63. Verdadero

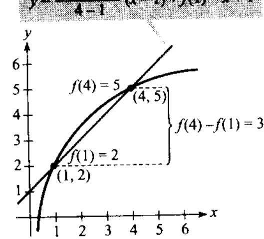
65. *a)* Dominio: $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$
b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$
c) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$

CAPÍTULO 2

Sección 2.1 *(página 114)*

1. *a)* $m = 0$ *b)* $m = -3$

3.



5. $f'(x) = 0$

7. $f'(x) = -5$ **9.** $f'(x) = 4x + 1$

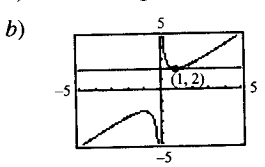
11. $f'(x) = 3x^2 - 12$

13. $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ **15.** $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-4}}$

17. *a)* Recta tangente: $y = 4x - 3$
b) (2, 5)

19. *a)* Recta tangente: $y = 12x - 16$
b) (2, 8)

21. *a)* Recta tangente: $y = 2$
b)



23. $y = 3x - 2$
$y = 3x + 2$

25. $y = 2x + 1$
$y = -2x + 9$

27. b **28.** e **29.** c **30.** a **31.** f **32.** d

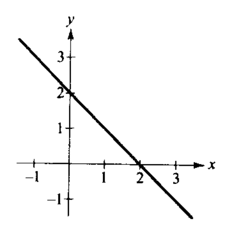
33. *a)* −3
b) 0
c) La gráfica desciende hacia la derecha cuando $x = 1$

d) La gráfica asciende hacia la derecha cuando $x = -4$

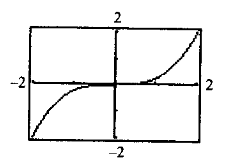
e) Positivo. Como $g'(x) > 0$ en $[3, 6]$, la gráfica de g asciende hacia la derecha.

f) No, conocer sólo $g'(2)$ no es suficiente información; $g'(2)$ mantiene su valor en cualquier traslación vertical de g.

35.

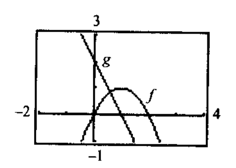


37.



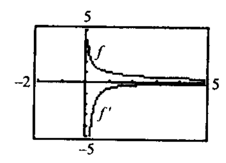
x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$f(x)$	-2	$-\frac{27}{32}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{32}$	0	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{27}{32}$	2
$f'(x)$	3	$\frac{27}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{27}{16}$	3

39.

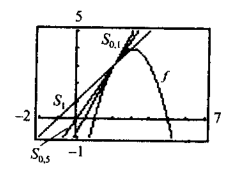


$g(x) \approx f'(x)$

41.



43. *a*)



b) Las gráficas de S para valores decrecientes de Δx son rectas secantes que aproximan la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(2, f(2))$.

45. $f(x) = x^2 - 1$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - 1) - 3}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

47. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$

$$f'(-2) = \lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x^3 + 2x^2 + 1) - 1}{x + 2} = \lim_{x \to -2} x^2 = 4$$

49. $f(x) = (x - 1)^{2/3}$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)^{2/3} - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x - 1)^{1/3}}$$

No existe el límite.

f no es derivable en $x = 1$.

51. $(-\infty, -3), (-3, \infty)$

53. $(-\infty, -1), (-1, \infty)$ **55.** $(-\infty, 3), (3, \infty)$

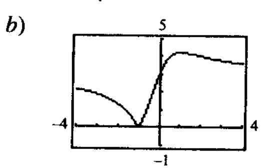
57. $(1, \infty)$ **59.** $(-\infty, 0), (0, \infty)$

61. f no es derivable en $x = 1$ **63.** $f'(1) = 0$

65. f es derivable en $x = 2$

67. *a*) $d = \dfrac{3|m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}}$

b)



No es derivable en $m = -1$

69. Falso: considerar $f(x) = |x|$ en $x = 0$

70. Falso: considerar $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$ en $x = 0$

71. Verdadero

Sección 2.2 *(página 126)*

1. *a*) $\frac{1}{2}$ *b*) $\frac{3}{2}$ *c*) 2 *d*) 3

3. 0 **5.** 1 **7.** $2x$ **9.** $-4t + 3$ **11.** $3t^2 - 2$

13. $2x + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x$ **15.** $-\dfrac{1}{x^2} - 3\cos x$

	Función	*Reescribir*	*Derivada*	*Simplificar*
17.	$y = \frac{1}{3x^3}$	$y = \frac{1}{3}x^{-3}$	$y' = -x^{-4}$	$y' = -\frac{1}{x^4}$
19.	$y = \frac{1}{(3x)^3}$	$y = \frac{1}{27}x^{-3}$	$y' = -\frac{1}{9}x^{-4}$	$y' = -\frac{1}{9x^4}$
21.	$y = \frac{\sqrt{x}}{x}$	$y = x^{-1/2}$	$y' = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$	$y' = -\frac{1}{2x^{3/2}}$

23. -1 **25.** 0 **27.** 4 **29.** 3

31. $3x^2 - 3 + \frac{8}{x^5}$ **33.** $2t + \frac{4}{t^2}$ **35.** $\frac{x^3 - 8}{x^3}$

37. $3x^2 + 1$ **39.** $\frac{4}{5s^{1/5}}$ **41.** $\frac{2}{\sqrt{x}} - 3 \operatorname{sen} x$

43. *a*) $2x + y - 2 = 0$

b)

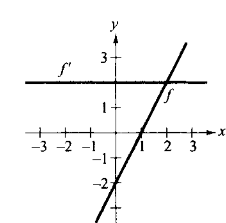
45. *a*) $x + 48y - 20 = 0$

b)

47. $(0, 2)$, $(-2, -14)$, $(2, -14)$

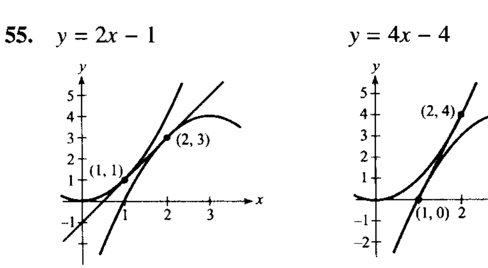
49. No hay tangentes horizontales **51.** (π, π)

53.



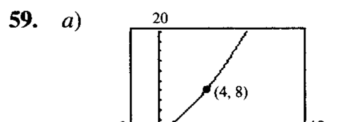
El ritmo de cambio de f es constante y por tanto f' es una función constante.

55. $y = 2x - 1$ $y = 4x - 4$



57. $x - 4y + 4 = 0$

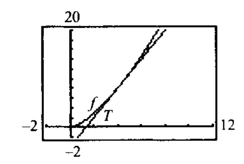
59. *a*)



$(3{,}9;\ 7{,}7019)$, $S(x) = 2{,}981x - 3{,}924$

b) $T(x) = 3(x - 4) + 8 = 3x - 4$

c) Pierde precisión.



d)

Δx	-3	-2	-1	$-0{,}5$	$-0{,}1$	0
$f(4 + \Delta x)$	1	2,828	5,196	6,458	7,702	8
$T(4 + \Delta x)$	-1	2	5	6,5	7,7	8

Δx	0,1	0,5	1	2	3
$f(4 + \Delta x)$	8,302	9,546	11,180	14,697	18,520
$T(4 + \Delta x)$	8,3	9,5	11	14	17

61. Falso: tomar $f(x) = x$ y $g(x) = x + 1$

62. Verdadero

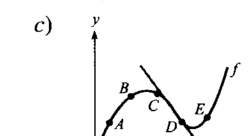
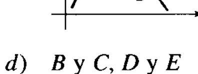
63. Falso: $dy/dx = 0$ **64.** Verdadero

65. Ritmo medio: 2
Ritmos instantáneos
$f'(1) = 2$
$f'(2) = 2$

67. Ritmo medio: $1/2$
Ritmos instantáneos:
$f'(1) = 1$
$f'(2) = 1/4$

69. *a*) A y B *b*) Mayor

c)

d) B y C, D y E

71. *a*) $s(t) = -16t^2 + 1.362$
$v(t) = -32t$

b) -48 pies/s

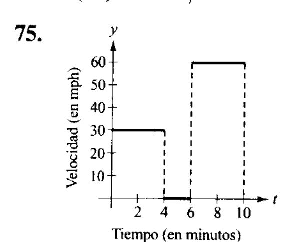
c) $s'(1) = -32$ pies/s
$s'(2) = -64$ pies/s

d) $t = \frac{\sqrt{1.362}}{4} \approx 9{,}226$ segundos

e) $-295{,}242$ pies/s

73. $v(5) = 71$ m/s
$v(10) = 22$ m/s

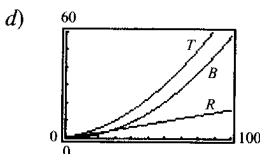
75.



77.

y
10
8
6
4
2
Distancia (en millas)
(10, 6)
(6, 4)
(8, 4)
(0, 0)
2 4 6 8 10
t
Tiempo (en minutos)

79. *a*) $R(v) = 0{,}167v - 0{,}02$
b) $B(v) = 0{,}006v^2 - 0{,}024v + 0{,}460$
c) $T(v) = 0{,}006v^2 + 0{,}143v + 0{,}440$
d)



e) $T'(v) = 0{,}012v + 0{,}143$
$T'(40) = 0{,}623$
$T'(80) = 1{,}103$
$T'(100) = 1{,}343$
f) La distancia de frenada crece a ritmo creciente.

81. 8 m^2 **83.** $-\$1{,}91, -\$1{,}93$

85. No fue eliminado. Las explicaciones pueden variar.

87. $y = 2x^2 - 3x + 1$ **89.** $y = -9x,\ y = -\frac{9}{4}x - \frac{27}{4}$

91. $a = \frac{1}{3},\ b = -\frac{4}{3}$

Sección 2.3 *(página 138)*

---

1. $f'(x) = 2x^2$
$f'(0) = 0$

3. $f'(x) = (x^3 - 3x)(4x + 3) + (2x^2 + 3x + 5)(3x^2 - 3)$
$= 10x^4 + 12x^3 - 3x^2 - 18x - 15$
$f'(0) = -15$

5. $f'(x) = \cos x - x \operatorname{sen} x$
$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}(4 - \pi)$

	Función	*Reescribir*	*Derivada*	*Simplificar*
7.	$y = \frac{x^2 + 2x}{x}$	$y = x + 2$	$y' = 1$	$y' = 1$
9.	$y = \frac{7}{3x^3}$	$y = \frac{7}{3}x^{-3}$	$y' = -7x^{-4}$	$y' = -\frac{7}{x^4}$
11.	$y = \frac{3x^2 - 5}{7}$	$y = \frac{1}{7}(3x^2 - 5)$	$y' = \frac{1}{7}(6x)$	$y' = \frac{6x}{7}$

13. $\frac{(2x - 3)(3) - (3x - 2)(2)}{(2x - 3)^2} = -\frac{5}{(2x - 3)^2}$

15. $\frac{(x^2 - 1)(-2 - 2x) - (3 - 2x - x^2)(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2}{(x + 1)^2},\quad x \neq 1$

17. $\frac{\sqrt{x}(1) - (x + 1)[1/(2\sqrt{x})]}{x} = \frac{x - 1}{2x^{3/2}}$

19. $6s^2(s^3 - 2)$

21. $\frac{(t^2 + 2t + 2)(1) - (t + 1)(2t + 2)}{(t^2 + 2t + 2)^2} = \frac{-t^2 - 2t}{(t^2 + 2t + 2)^2}$

23. $(3x^3 + 4x)[(x - 5) \cdot 1 + (x + 1) \cdot 1]$
$+ [(x - 5)(x + 1)](9x^2 + 4)$
$= 15x^4 - 48x^3 - 33x^2 - 32x - 20$

25. $\frac{(x^2 - c^2)(2x) - (x^2 + c^2)(2x)}{(x^2 - c^2)^2} = -\frac{4xc^2}{(x^2 - c^2)^2}$

27. $t(t \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$ **29.** $-\frac{t \operatorname{sen} t + \cos t}{t^2}$

31. $-1 + \sec^2 x = \operatorname{tg}^2 x$ **33.** $\frac{1}{2\sqrt{t}} + 4 \sec t \operatorname{tg} t$

35. $-5x \operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x + 5 \operatorname{cosec} x = 5 \operatorname{cosec} x(1 - x \operatorname{ctg} x)$

37. $\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x - \cos x = \cos x \operatorname{ctg}^2 x$

39. $x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x - 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x$
$= x^2 \cos x + 2 \cos x$

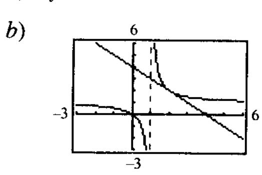
41. $x(x \sec^2 x + 2 \operatorname{tg} x)$

43. $\left(\frac{x + 1}{x + 2}\right)(2) + (2x - 5)\left[\frac{(x + 2)(1) - (x + 1)(1)}{(x + 2)^2}\right]$
$= \frac{2x^2 + 8x - 1}{(x + 2)^2}$

45. $\frac{1 - \operatorname{sen}\theta + \theta\cos\theta}{(1 - \operatorname{sen}\theta)^2}$ **47.** $y' = \frac{-2 \operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x}{(1 - \operatorname{cosec} x)^2},\ -4\sqrt{3}$

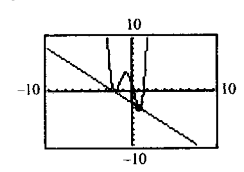
49. $h'(t) = \frac{\sec t(t \operatorname{tg} t - 1)}{t^2},\ \frac{1}{\pi^2}$

51. *a*) $y = -x + 4$
b)



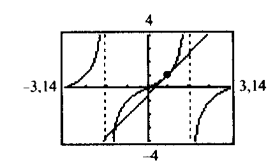
53. *a)* $y = -x - 2$

b)



55. *a)* $4x - 2y - \pi + 2 = 0$

b)



57. (0, 0), (2, 4) **59.** 0 **61.** −10

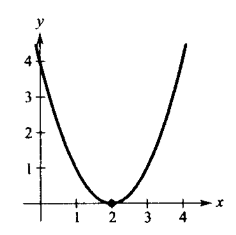
63. $n = 1, f'(x) = x \cos x + \operatorname{sen} x$
$n = 2, f'(x) = x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$
$n = 3, f'(x) = x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x$
$n = 4, f'(x) = x^4 \cos x + 4x^3 \operatorname{sen} x$
$f'(x) = x^n \cos x + nx^{n-1} \operatorname{sen} x$

65. *a)* −$38,13 *b)* −$10,37 *c)* −$3,80

El coste disminuye al crecer el tamaño del pedido.

67. 31,55 bacterias por hora

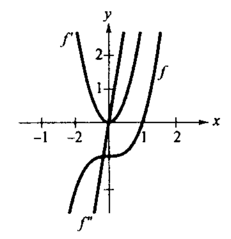
71.



73. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ **75.** $\frac{2}{(x-1)^3}$ **77.** $-3 \operatorname{sen} x$

79. $2x$ **81.** $\frac{1}{\sqrt{x}}$

83.



85. *a)* $f''(x) = g(x)h''(x) + 2g'(x)h'(x) + g''(x)h(x)$

$f'''(x) = g(x)h'''(x) + 3g'(x)h''(x) + 3g''(x)h'(x) + g'''(x)h(x)$

$f^{(4)}(x) = g(x)h^{(4)}(x) + 4g'(x)h'''(x) + 6g''(x)h''(x) + 4g'''(x)h'(x) + g^{(4)}(x)h(x)$

b) $$f^{(n)}(x) = g(x)h^{(n)}(x) + \frac{n!}{1!(n-1)!}g'(x)h^{(n-1)}(x) + \frac{n!}{2!(n-2)!}g''(x)h^{(n-2)}(x) + \cdots + \frac{n!}{(n-1)!1!}g^{(n-1)}(x)h'(x) + g^{(n)}(x)h(x)$$

87. $v(3) = 27$ m/s

$a(3) = -6$ m/s^2

La velocidad del objeto está decreciendo, pero el ritmo al que decrece es creciente.

89.

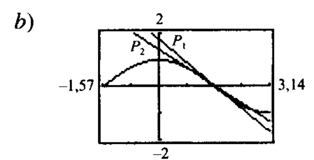
x	0	1	2	3	4
$s(t)$	0	57,75	99	123,75	132
$v(t)$	66	49,5	33	16,5	0
$a(t)$	−16,5	−16,5	−16,5	−16,5	−16,5

La velocidad media en:
[0, 1] es 57,75
[1, 2] es 41,25
[2, 3] es 24,75
[3, 4] es 8,25

91. *a)* $P_1(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$

$P_2(x) = -\frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$

b)



c) P_2

d) P_1 y P_2 pierden precisión cuando nos alejamos de $x = a$

93. Falso: $dy/dx = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

94. Verdadero **95.** Verdadero **96.** Verdadero

97. Verdadero **98.** Verdadero

99. $f'(x) = 2|x|$

No existe $f''(0)$

Sección 2.4 *(página 149)*

	$y = f(g(x))$	$u = g(x)$	$y = f(u)$
1.	$y = (6x - 5)^4$	$u = 6x - 5$	$y = u^4$
3.	$y = \sqrt{x^2 - 1}$	$u = x^2 - 1$	$y = \sqrt{u}$
5.	$y = \operatorname{cosec}^3 x$	$u = \operatorname{cosec} x$	$y = u^3$

7. $6(2x - 7)^2$ **9.** $-108(4 - 9x)^3$

11. $\frac{2}{3}(9 - x^2)^{-1/3}(-2x) = -\frac{4x}{3(9 - x^2)^{1/3}}$

13. $\frac{1}{2}(1 - t)^{-1/2}(-1) = -\frac{1}{2\sqrt{1 - t}}$

15. $\frac{1}{3}(9x^2 + 4)^{-2/3}(18x) = \frac{6x}{(9x^2 + 4)^{2/3}}$

17. $(4 - x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{2x}{\sqrt{4 - x^2}}$

19. $-\frac{1}{(x - 2)^2}$ **21.** $-2(t - 3)^{-3}(1) = -\frac{2}{(t - 3)^3}$

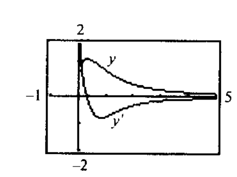
23. $-\frac{1}{2(x + 2)^{3/2}}$

25. $x^2[4(x - 2)^3(1)] + (x - 2)^4(2x) = 2x(x - 2)^3(3x - 2)$

27. $x\left(\frac{1}{2}\right)(1 - x^2)^{-1/2}(-2x) + (1 - x^2)^{1/2}(1) = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$

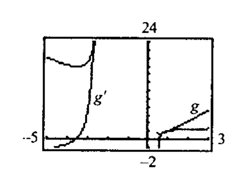
29. $\frac{(x^2 + 1)^{1/2}(1) - x(1/2)(x^2 + 1)^{-1/2}(2x)}{x^2 + 1} = \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}}$

31. $\frac{1 - 3x^2 - 4x^{3/2}}{2\sqrt{x}(x^2 + 1)^2}$



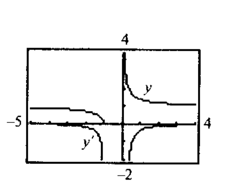
El cero de $g'(x)$ corresponde al punto de la gráfica de la función donde la recta tangente es horizontal.

33. $\frac{3t(t^2 + 3t - 2)}{(t^2 + 2t - 1)^{3/2}}$



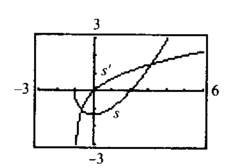
El cero de $g'(x)$ corresponde al punto de la gráfica de la función donde la recta tangente es horizontal.

35. $-\frac{\sqrt{\frac{x + 1}{x}}}{2x(x + 1)}$



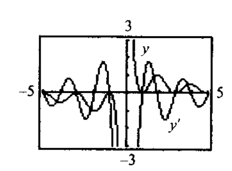
y' no tiene ceros.

37. $\frac{t}{\sqrt{1 + t}}$



El cero de $s'(t)$ corresponde al punto de la gráfica de la función donde la recta tangente es horizontal.

39. $y' = -\frac{\pi x \operatorname{sen} \pi x + \cos \pi x + 1}{x^2}$



Los ceros de y' corresponden a los puntos de la gráfica de la función donde las rectas tangentes son horizontales.

41. *a)* 1 *b)* 2 **43.** $-3 \operatorname{sen} 3x$ **45.** $12 \sec^2 4x$

47. $\operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 4\theta$ **49.** $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x \cos (2x)^2$

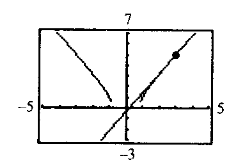
51. $-\operatorname{sen} x \cos (\cos x)$ **53.** $s'(t) = \frac{t + 1}{\sqrt{t^2 + 2t + 8}}, \frac{3}{4}$

55. $f'(x) = \frac{-9x^2}{(x^3 - 4)^2}, -\frac{9}{25}$ **57.** $f'(t) = \frac{-5}{(t - 1)^2}, -5$

59. $y' = -6 \sec^3 (2x) \operatorname{tg} (2x), 0$

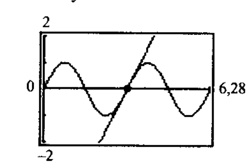
61. *a)* $9x - 5y - 2 = 0$

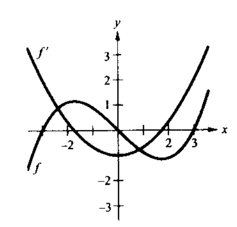
b)



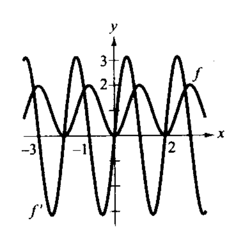
63. *a)* $2x - y - 2\pi = 0$

b)



65. 

Los ceros de f' corresponden a los puntos de la gráfica de f donde las rectas tangentes son horizontales.

67. 

Los ceros de f' corresponden a los puntos de la gráfica de f donde las rectas tangentes son horizontales.

69. $12(5x^2 - 1)(x^2 - 1)$ **71.** $2(\cos x^2 - 2x^2 \operatorname{sen} x^2)$

73. *a)* 24
b) No es posible porque no se conoce $g'(h(5))$
c) $\frac{4}{3}$
d) 162

75. *a)* 1,461 *b)* −1,016

77. 0,2 radianes, 1,45 radianes por segundo

79. 0,04224

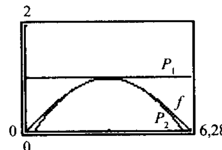
81.

x	−2	−1	0	1	2	3
$f'(x)$	4	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	−1	−2	−4
$g'(x)$	4	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	−1	−2	−4
$h'(x)$	8	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	−2	−4	−8
$r'(x)$	—	12	1	—	—	—
$s'(x)$	$-\frac{1}{3}$	−1	−2	−4	—	—

83. *a)* Sí *b)* Sí **87.** $\dfrac{2(2x-3)}{|2x-3|}\ x \neq \dfrac{3}{2}$

89. $-|x| \operatorname{sen} x + \dfrac{x}{|x|}\cos x,\ x \neq 0$

91. *a)* $P_1 = 1 \quad P_2 = -\frac{1}{8}(x - \pi)^2 + 1$

b) 

c) P_2
d) P_1 y P_2 pierden precisión cuando nos alejamos de $x = \pi$

93. Falso: $y' = \frac{1}{2}(1 - x)^{-1/2}(1)$

94. Falso: $f'(x) = 2(\operatorname{sen} 2x)(\cos 2x)(2) = 4 \operatorname{sen} 2x \cos 2x$ **95.** Verdadero

Sección 2.5 *(página 158)*

1. $-\dfrac{x}{y}$ **3.** $-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ **5.** $\dfrac{y - 3x^2}{2y - x}$ **7.** $\dfrac{1 - 3x^2y^3}{3x^3y^2 - 1}$

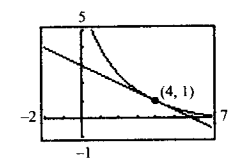
9. $\dfrac{4xy - 3x^2 - 3y^2}{2x(3y - x)}$ **11.** $\dfrac{\cos x}{4 \operatorname{sen} 2y}$

13. $\dfrac{\cos x - \operatorname{tg} y - 1}{x \sec^2 y}$ **15.** $\dfrac{y \cos(xy)}{1 - x\cos(xy)}$

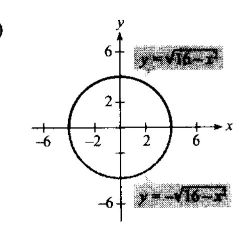
17. $-\dfrac{y}{x}, -\dfrac{1}{4}$ **19.** $\dfrac{18x}{(x^2 + 9)^2 y}$, no definido

21. $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}, -\dfrac{1}{2}$ **23.** $-\operatorname{sen}^2(x + y)$ o $-\dfrac{x^2}{x^2 + 1}$, 0

25. $x + 2y - 6 = 0$ **27.** $-\frac{1}{2}$ **29.** 0

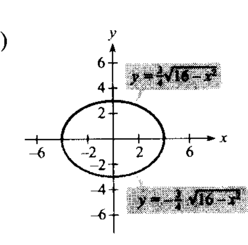


31. *a)* $y_1 = \sqrt{16 - x^2}$
$y_2 = -\sqrt{16 - x^2}$

b) 

c) $y' = \mp \dfrac{x}{\sqrt{16 - x^2}} = -\dfrac{x}{y}$ *d)* $y' = -\dfrac{x}{y}$

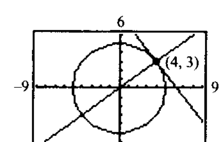
33. *a)* $y_1 = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$
$y_2 = -\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$

b) 

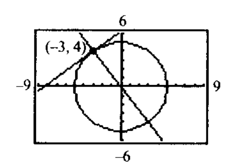
c) $y' = \mp \dfrac{3x}{4\sqrt{16 - x^2}} = -\dfrac{9x}{16y}$ *d)* $y' = -\dfrac{9x}{16y}$

35. $\dfrac{10}{x^3}$ **37.** $-\dfrac{16}{y^3}$ **39.** $\dfrac{3y}{4x^2} = \dfrac{3x}{4y}$

41. En (4, 3):
Recta tangente: $4x + 3y - 25 = 0$
Recta normal: $3x - 4y = 0$



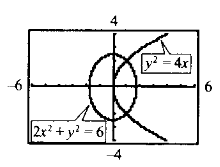
En (−3, 4):
Recta tangente: $3x - 4y + 25 = 0$
Recta normal: $4x + 3y = 0$



45. Tangentes horizontales: (−4, 0), (−4, 10)

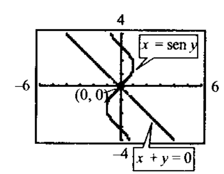
Tangentes verticales: (0, 5), (−8, 5)

47.



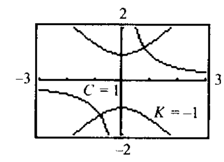
En (1, 2):
Pendiente de la elipse: −1
Pendiente de la parábola: 1
En (1 −2):
Pendiente de la elipse: 1
Pendiente de la parábola: −1

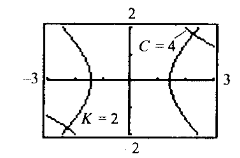
49.



En (0, 0)
Pendiente de la recta: −1
Pendiente de la curva seno: 1

51.





Derivadas: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}, \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$

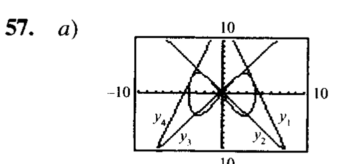
53. *a)* $4y\dfrac{dy}{dx} - 12x^3 = 0$

b) $4y\dfrac{dy}{dt} - 12x^3\dfrac{dx}{dt} = 0$

55. *a)* $-\pi \text{ sen } \pi y\left(\dfrac{dy}{dx}\right) - 3\pi \cos \pi x = 0$

b) $-\pi \text{ sen } \pi y\left(\dfrac{dy}{dt}\right) - 3\pi \cos \pi x\left(\dfrac{dx}{dt}\right) = 0$

57. *a)*



b) $y_1 = \dfrac{1}{3}[(\sqrt{7} + 7)x + (8\sqrt{7} + 23)]$

$y_2 = -\dfrac{1}{3}[(-\sqrt{7} + 7)x - (23 - 8\sqrt{7})]$

$y_3 = -\dfrac{1}{3}[(\sqrt{7} - 7)x - (23 - 8\sqrt{7})]$

$y_4 = -\dfrac{1}{3}[(\sqrt{7} + 7)x - (8\sqrt{7} + 23)]$

c) $\left(\dfrac{8\sqrt{7}}{7}, 5\right)$

Sección 2.6 *(página 166)*

1. *a)* $\frac{3}{4}$ *b)* 20 **3.** *a)* $-\frac{5}{8}$ *b)* $\frac{3}{2}$

5. *a)* −4 cm/s
b) 0 cm/s
c) 4 cm/s
d) 12 cm/s

7. *a)* 8 cm/s
b) 4 cm/s
c) 2 cm/s
d) 6,851 cm/s

9. *a)* Decrece *b)* Crece **11.** $\dfrac{2(2x^3 + 3x)}{\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}}$

13. *a)* 24π cm²/min
b) 96π cm²/min

15. *b)* Cuando $\theta = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{dA}{dt} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}s^2$

Cuando $\theta = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{8}s^2$

c) Si s y $d\theta/dt$ son constantes, dA/dt es proporcional a $\cos \theta$.

17. *a*) $\dfrac{5}{36\pi}$ cm/min

b) $\dfrac{5}{144\pi}$ cm/min

19. *a*) 36 cm^2/s
b) 360 cm^2/s

21. $\dfrac{8}{405\pi}$ pies/min

23. *a*) 12,5 % *b*) $\frac{1}{144}$ metros por minuto

25. *a*) $-\frac{7}{12}$ pies/s
$-\frac{3}{2}$ pies/s
$-\frac{48}{7}$ pies/s
b) $\frac{527}{24}$ pies^2/s
c) $\frac{1}{12}$ radianes/s

27. Ritmo de cambio vertical: 1/5 m/s
Ritmo de cambio horizontal: $-\dfrac{\sqrt{3}}{15}$ m/s

29. *a*) −750 millas/h *b*) 20 minutos

31. $-\dfrac{28}{\sqrt{10}} \approx -8{,}85$ pies/s

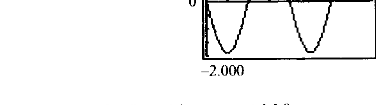
33. *a*) $\frac{25}{3}$ pies/s *b*) $\frac{10}{3}$ pies/s

35. *a*) 12 segundos
b) $\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$ m
c) $\dfrac{\sqrt{5}\,\pi}{120}$ m/s

39. $v^{0,3}\left(1{,}3p\,\dfrac{dv}{dt} + v\,\dfrac{dp}{dt}\right) = 0$ **41.** $\dfrac{1}{20}$ radianes/s

43. *a*) $\frac{1}{2}$ radianes/min *b*) 3/2 radianes/min
c) 1,87 radianes/min

45. *a*) $\dfrac{dx}{dt} = -600\pi \operatorname{sen}\theta$ *b*)



c) $\theta = 90^\circ + n \cdot 180^\circ$; $\theta = 0^\circ + n \cdot 180^\circ$
d) -300π cm/s
$-300\sqrt{3}\,\pi$ cm/s

47. $\dfrac{1}{25}\cos^2\theta,\quad -\dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4}$

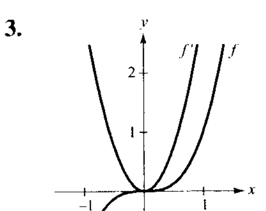
49. −0,1808 pies/s^2

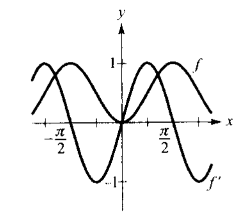
51. *a*) $m(s) = -1{,}014\,s^2 + 31{,}685s - 214{,}436$
b) $(-2{,}028s + 31{,}685)\,\dfrac{ds}{dt}$
c) −2,1 millones

Ejercicios de repaso del Capítulo 2 *(página 171)*

1. $f'(x) = 2x - 2$

3.





$f' > 0$ donde las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de f son positivas.

5. $x \neq -1$ **7.** $3x(x-2)$ **9.** $\dfrac{2(x^3+1)}{x^3}$

11. $-\dfrac{4}{3t^3}$

13. $\dfrac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}$ **15.** $2(6x^3 - 9x^2 + 16x - 7)$

17. $5\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)\left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)$ **19.** $-\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$

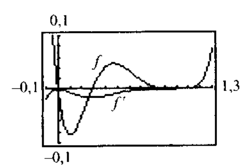
21. $\dfrac{6x}{(4-3x^2)^2}$ **23.** $-9 \operatorname{sen}(3x+1)$

25. $-\operatorname{cosec} 2x \operatorname{ctg} 2x$ **27.** $\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \operatorname{sen}^2 x$

29. $\operatorname{sen}^{1/2}x \cos x - \operatorname{sen}^{5/2}x \cos x = \cos^3 x\sqrt{\operatorname{sen} x}$

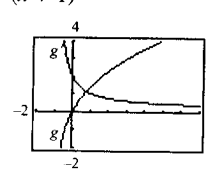
31. $-x \sec^2 x - \operatorname{tg} x$ **33.** $\dfrac{x\cos x - 2\operatorname{sen} x}{x^3}$

35. $t(t-1)^4(7t-2)$



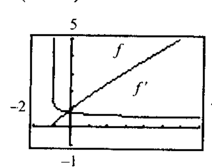
Los ceros de f' corresponden a los puntos de la gráfica de la función en los que las rectas tangentes son horizontales.

37. $\dfrac{x+2}{(x+1)^{3/2}}$



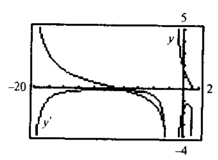
$g'(x)$ no es cero para ningún x.

39. $\dfrac{5}{6(t+1)^{1/6}}$



f' no tiene ceros

41. $-\dfrac{\sec^2\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}$



y' no tiene ceros.

43. $-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{4}$

45. $4 - 4 \text{ sen } 2x$

47. $2 \text{ cosec}^2 x \text{ ctg } x$

49. $\dfrac{2(t+2)}{(1-t)^4}$

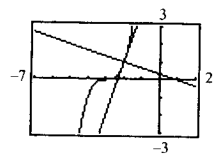
51. $2 \sec^2 x(x \text{ tg } x + 1)$

53. $-\dfrac{2x+3y}{3(x+y^2)}$

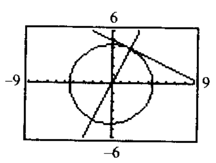
55. $\dfrac{2y\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{2x\sqrt{y} - x\sqrt{x}}$

57. $-\dfrac{y \text{ sen } x + \text{sen } y}{\cos x - x \cos y}$

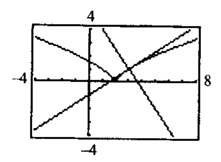
59. Recta tangente: $3x - y + 7 = 0$
Recta normal: $x + 3y - 1 = 0$



61. Recta tangente: $x + 2y - 10 = 0$
Recta normal: $2x - y = 0$



63. Recta tangente: $2x - 3y - 3 = 0$
Recta normal: $3x + 2y - 11 = 0$

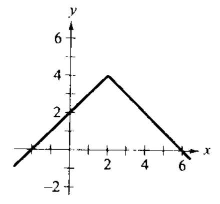


65. *a)* $(0, -1), \left(-2, \frac{7}{3}\right)$ *b)* $(-3, 2), \left(1, -\frac{2}{3}\right)$

c) $\left(-1 + \sqrt{2}, \dfrac{2[1 - 2\sqrt{2}]}{3}\right)$

$\left(-1 - \sqrt{2}, \dfrac{2[1 + 2\sqrt{2}]}{3}\right)$

67. *a)* Sí



b) No. Las derivadas laterales no son iguales.

69. $y'' + y = -(2 \text{ sen } x + 3 \cos x) + (2 \text{ sen } x + 3 \cos x) = 0$

71. *a)* $-18{,}667$ grados por hora
b) $-7{,}284$ grados por hora
c) $-3{,}240$ grados por hora
d) $-0{,}747$ grados por hora

73. *a)* 50 vibraciones por segundo por libra
b) 33,33 vibraciones por segundo por libra

75. 56 pies/s

77. *a)*

b) 50 *c)* $x = 25$
d) $y' = 1 - 0{,}04x$
e) $y'(25) = 0$

x	0	10	25	30	50
y'	1	0,6	0	−0,2	−1

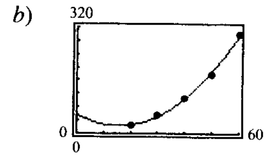
79. *a)* $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ unidades por segundo
b) $3\sqrt{2}$ unidades por segundo
c) $\dfrac{18\sqrt{5}}{5}$ unidades por segundo

81. $\frac{2}{25}$ metros por minuto

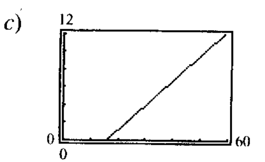
83. 38,34 m/s

85. *a)* $y = 0{,}14x^2 - 4{,}43x + 58{,}4$

b)



c)



d) 365 pies
e) La distancia de frenada crece a ritmo creciente cuando x crece.

CAPÍTULO 3

Sección 3.1 *(página 183)*

1. $f'(0) = 0$ 3. $f'(4) = 0$

5. $f'(-2)$ no está definido   7. $x = 0, x = 2$

9. $t = \frac{8}{3}, t = 4$ 11. $x = 0, x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$

13. Mínimo: (2, 2)
Máximo: (−1, 8)

15. Mínimo: (0, 0) y (3, 0)
Máximo: $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$

17. Mínimo: (−1, −4) y (2, −4)
Máximo: (0, 0) y (3, 0)

19. Mínimo: (0, 0)
Máximo: (−1, 5)

21. Mínimo: (1, 1)
Máximo: (4, 4)

21. Mínimo: (1, −1)
Máximo: $(0, -\frac{1}{2})$

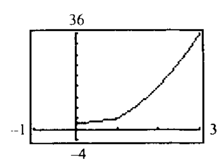
25. Mínimo: $\left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
Máximo: (0, 1)

27. Continua en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
No continua en $[0, \pi]$

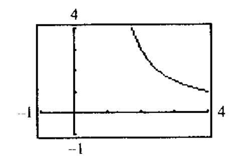
29. *a)* Sí *b)* No   31. *a)* No *b)* Sí

33. *a)* Mínimo: (0, −3); máximo: (2, 1)
b) Mínimo: (0, −3) *c)* Mínimo: (2, 1)
d) No tiene extremos

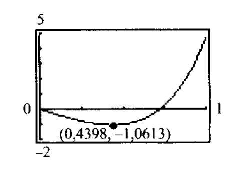
35. *a)* Mínimo: (1, −1); máximo: (−1, 3)
b) Máximo: (3, 3) *c)* Mínimo: (1, −1)
d) Mínimo: (1, −1)

37.


Mínimo: (0, 2)
Máximo: (3, 36)

39.


Mínimo: (4, 1)

41. *a)*


b) Mínimo: (0,4398, −1,0613)

43. Máximo: $|f''(\sqrt[3]{-10+\sqrt{108}})| = f''(\sqrt{3}-1) \approx 1{,}47$

45. Máximo: $|f^{(4)}(0)| = \frac{56}{81}$

47. Máximo: $P(12) = 72$
No: P es decreciente para $I \geqslant 12$

49. La parte del césped más alejada de la boca de riego

51. 0,9553 radianes   53. Verdadero

54. Verdadero   55. Verdadero

56. Falso: Considerar $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x-1)^2$

57. Todos los números reales (la pendiente es cero en los no enteros y no está definida en los enteros)

Sección 3.2 *(página 191)*

1. $f(0) = f(2) = 0$
f no es derivable en (0, 2)

3. $f'(1) = 0$

5. $f'\left(\frac{6-\sqrt{3}}{3}\right) = 0$
$f'\left(\frac{6+\sqrt{3}}{3}\right) = 0$

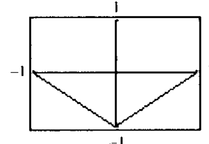
7. No es derivable en $x = 0$

9. $f'(-2+\sqrt{5}) = 0$

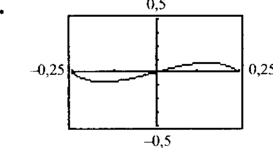
11. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

13. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

15. No es continua en $[0, \pi]$

17.


El teorema de Rolle no es aplicable.

19.


$f'(\pm 0{,}1533) = 0$

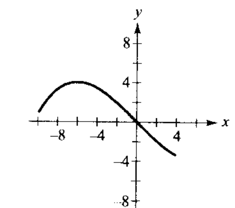
21. *a)* $f(1) = f(2) = 64$
b) La velocidad es 0 en algún t del intervalo $[-1, 2]$

23. No: tomar $f(x) = x^2$ en $[-1, 2]$

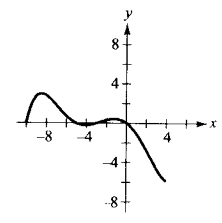
25. *a)* f es continua y cambia de signo en $[-10, 4]$ (teorema del valor intermedio).

b) Existen números reales a y b tales que $-10 < a < b < 4$ y $f(a) = f(b) = 2$. Por tanto, f' tiene un cero en el intervalo por el teorema de Rolle.

c)



d)



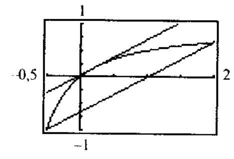
e) No

27. $f'(-\frac{1}{2}) = -1$ **29.** $f'(\frac{8}{27}) = 1$

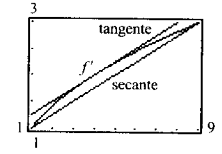
31. $f'(3) = \dfrac{1}{2}$ **33.** $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

35. Recta secante: $2x - 3y - 2 = 0$

Recta tangente: $c = \dfrac{-2 + \sqrt{6}}{2}$, $2x - 3y + 5 - 2\sqrt{6} = 0$

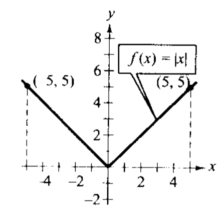


37. Recta secante: $x - 4y + 3 = 0$
Recta tangente: $c = 4$, $x - 4y + 4 = 0$



39. La función es discontinua en [0, 6]

41.



43. *a)* −14,7 m/s *b)* 1,5 segundos

45. Por el teorema del valor medio, hay algún instante en el que la velocidad del avión debe ser igual a la velocidad media (454,5 millas/h). Tuvo que llevar una velocidad de 400 millas/h en algún momento de su aceleración hasta las 454,5 millas/h y en otro al decelerar.

47. Falso: f no es continua en [−1, 1]

48. Falso: considerar $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - 1}$ **49.** Verdadero

50. Verdadero.

Sección 3.3 *(página 201)*

1. Creciente en $(3, \infty)$
Decreciente en $(-\infty, 3)$

3. Creciente en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$
Decreciente en $(-2, 2)$

5. Creciente en $(-\infty, 0)$
Decreciente en $(0, \infty)$

7. Número crítico: $x = 1$
Creciente en $(-\infty, 1)$
Decreciente en $(1, \infty)$
Máximo relativo: $(1, 5)$

9. Número crítico: $x = 3$
Creciente en $(3, \infty)$
Decreciente en $(-\infty, 3)$
Mínimo relativo: $(3, -9)$

11. Números críticos: $x = -2, 1$
Creciente en $(-\infty, -2)$ y $(1, \infty)$
Decreciente en $(-2, 1)$
Máximo relativo: $(-2, 20)$
Mínimo relativo: $(1, -7)$

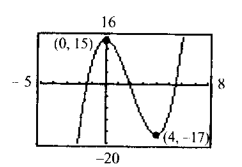
13. Números críticos: $x = -1, 1$
Creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$
Decreciente en $(-1, 1)$
Máximo relativo: $(-1, \frac{4}{5})$
Mínimo relativo: $(1, -\frac{4}{5})$

15. Números críticos: $x = 0$
Creciente en $(-\infty, \infty)$
No tiene extremos

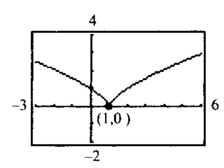
17. Números críticos: $x = 5$
Creciente en $(-\infty, 5)$
Decreciente en $(5, \infty)$
Máximo relativo: $(5, 5)$

19. Números críticos: $x = 0$
Discontinuidades: $x = -3, 3$
Creciente en $(-\infty, -3)$ y $(-3, 0)$
Decreciente en $(0, 3)$ y $(3, \infty)$
Máximo relativo: $(0, 0)$

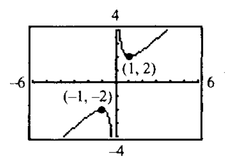
21. Números críticos: $x = 0, 4$
Creciente en $(-\infty, 0)$ y $(4, \infty)$
Decreciente en $(0, 4)$
Máximo relativo: $(0, 15)$
Mínimo relativo: $(4, -17)$



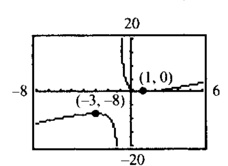
23. Números críticos: $x = 1$
Creciente en $(1, \infty)$
Decreciente en $(-\infty, 1)$
Máximo relativo: $(1, 0)$



25. Números críticos: $x = -1, 1$
Discontinuidad: $x = 0$
Creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$
Decreciente en $(-1, 0)$ y $(0, 1)$
Máximo relativo: $(-1, -2)$
Mínimo relativo: $(1, 2)$



27. Números críticos: $x = -3, 1$
Discontinuidad: $x = -1$
Creciente en $(-\infty, -3)$ y $(1, \infty)$
Decreciente en $(-3, -1)$ y $(-1, 1)$
Máximo relativo: $(-3, -8)$
Mínimo relativo: $(1, 0)$



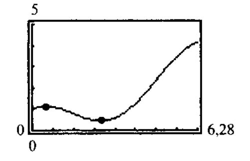
29. Números críticos: $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

Creciente en $\left(0, \frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right)$

Decreciente en $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$

Máximo relativo: $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{[\pi + 6\sqrt{3}]}{12}\right)$

Mínimo relativo: $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{[5\pi - 6\sqrt{3}]}{12}\right)$



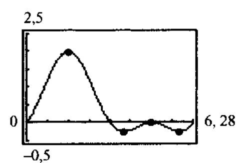
31. Números críticos: $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

Creciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right)$

Decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$

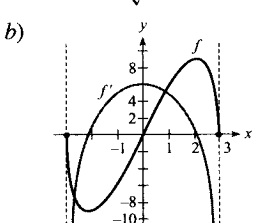
Máximos relativos: $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$

Mínimos relativos: $\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right)$



33. *a*) $f'(x) = \frac{2(9 - 2x^2)}{\sqrt{9 - x^2}}$

b)



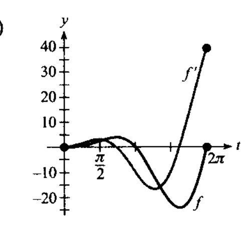
c) Números críticos: $x = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$

d) $f' > 0$ en $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

$f' < 0$ en $\left(-3, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 3\right)$

35. *a*) $f'(t) = t(t \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$

b)

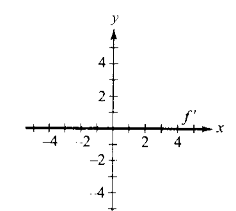


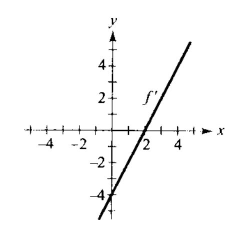
c) Números críticos: $x = 2{,}2889; 5{,}0870$

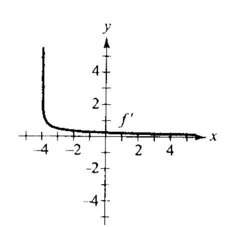
d) $f' > 0$ en $(0, 2{,}2889), (5{,}0870, 2\pi)$

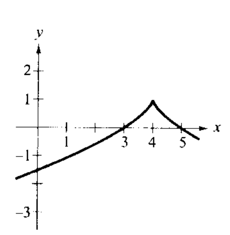
$f' < 0$ en $(2{,}2889, 5{,}0870)$

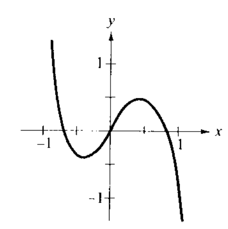
37. $g'(0) < 0$ **39.** $g'(-6) < 0$ **41.** $g'(0) > 0$

43. 

45. 

47. 

49. 

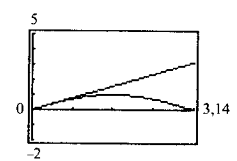
51. 

Mínimo en el número crítico aproximado $x = -0{,}40$
Máximo en el número crítico aproximado $x = 0{,}48$

53. *a*)

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$g(x)$	0,48	0,84	1,00	0,91	0,60	0,14

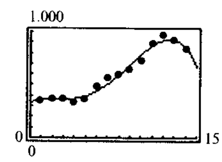
$f(x) > g(x)$

b) 

$f(x) > g(x)$

55. $r = \dfrac{2R}{3}$ **57.** Máximo cuando $R_2 = R_1$

59. *a*) $B = -0{,}154t^4 + 3{,}538t^3 - 19{,}754t^2 + 42{,}391t + 332{,}823$

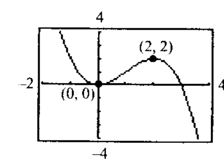
b) 

c) (12,6, 926,6)

61. *a*) 3

b) $a_3(0)^3 + a_2(0)^2 + a_1(0) + a_0 = 0$
$a_3(2)^3 + a_2(2)^2 + a_1(2) + a_0 = 2$
$3a_3(0)^2 + 2a_2(0) + a_1 = 0$
$3a_3(2)^2 + 2a_2(2) + a_1 = 0$

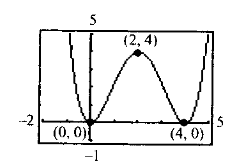
c) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2$

d) 

63. *a*) 4

b) $a_4(0)^4 + a_3(0)^3 + a_2(0)^2 + a_1(0) + a_0 = 0$
$a_4(2)^4 + a_3(2)^3 + a_2(2)^2 + a_1(2) + a_0 = 4$
$a_4(4)^4 + a_3(4)^3 + a_2(4)^2 + a_1(4) + a_0 = 0$
$4a_4(0)^3 + 3a_3(0)^2 + 2a_2(0) + a_1 = 0$
$4a_4(2)^3 + 3a_3(2)^2 + 2a_2(2) + a_1 = 0$

c) $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2$

d) 

65. Verdadero

66. Falso: considerar $f(x) = x$ y $g(x) = x$ en el intervalo $(-\infty, 0)$

67. Falso, tomar $f(x) = x^3$

68. Verdadero

Sección 3.4 *(página 211)*

1. Cóncava hacia arriba: $(-\infty, \infty)$

3. Cóncava hacia arriba: $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$
Cóncava hacia abajo: $(-2, 2)$

5. Cóncava hacia arriba: $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$
Cóncava hacia abajo: $(-1, 1)$

7. Máximo relativo: (3, 9)

9. Mínimo relativo: (5, 0)

11. Máximo relativo: (0, 3)
Mínimo relativo (2, −1)

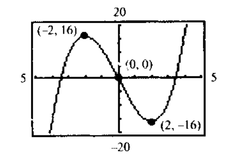
13. Mínimo relativo: $(3, -25)$

15. Mínimo relativo: $(0, -3)$

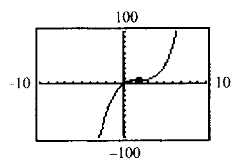
17. Máximo relativo: $(-2, -4)$
Mínimo relativo: $(2, 4)$

19. No hay extremos relativos, porque f es no creciente.

21. Máximo relativo: $(-2, 16)$
Mínimo relativo: $(2, -16)$
Punto de inflexión: $(0, 0)$

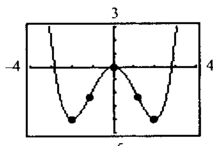


23. Punto de inflexión: $(2, 8)$

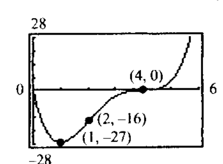


25. Mínimos relativos: $(\pm 2, -4)$
Máximo relativo: $(0, 0)$

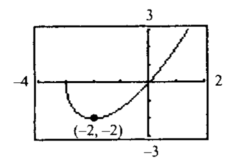
Puntos de inflexión: $\left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{20}{9}\right)$



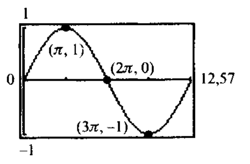
27. Mínimo relativo: $(1, -27)$
Puntos de inflexión: $(2, -16)$, $(4, 0)$



29. Mínimo relativo: $(-2, -2)$

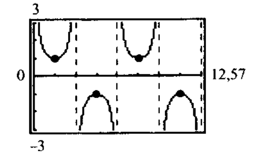


31. Mínimo relativo: $(3\pi, -1)$
Máximo relativo: $(\pi, 1)$
Puntos de inflexión: $(2\pi, 0)$



33. Mínimos relativos: $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(\frac{5\pi}{2}, 1\right)$

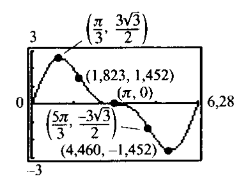
Máximos relativos: $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), \left(\frac{7\pi}{2}, -1\right)$



35. Mínimo relativo: $\left(\frac{5\pi}{3}, -2{,}598\right)$

Máximo relativo: $\left(\frac{\pi}{3}, 2{,}598\right)$

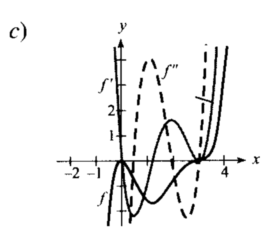
Puntos de inflexión: $(\pi, 0)$, $(1{,}823, 1{,}452)$, $(4{,}46, -1{,}452)$



37. *a*) $f'(x) = 0{,}2x(x-3)^2(5x-6)$
$f''(x) = 0{,}4(x-3)(10x^2 - 24x + 9)$

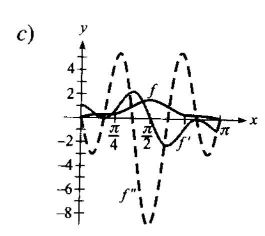
b) Máximos relativos: $(0, 0)$
Mínimo relativo: $(1{,}2, -1{,}6796)$
Puntos de inflexión: $(0{,}4652, -0{,}7048)$, $(1{,}9348, -0{,}9048)$, $(3, 0)$

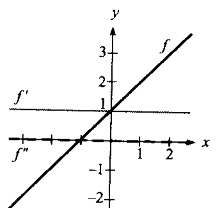
c)

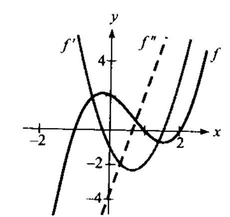


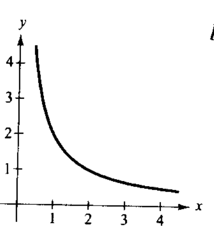
39. *a*) $f'(x) = \cos x - \cos 3x + \cos 5x$
$f''(x) = -\operatorname{sen} x + 3 \operatorname{sen} 3x - 5 \operatorname{sen} 5x$

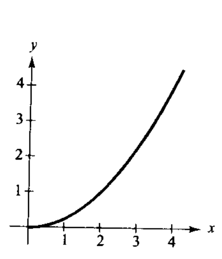
b) Máximo relativo: $(\pi/2,\ 1{,}53333)$
Puntos de inflexión:
(0,5236, 0,2667), (1,1731, 0,9637),
(1,9685, 0,9637), (2,6180, 0,2667)

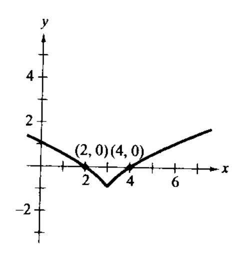
c)


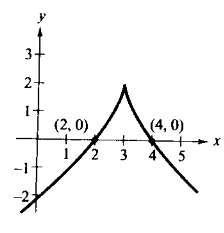
41.


43.


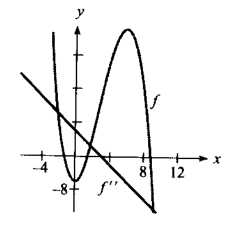
45. *a*)


b)


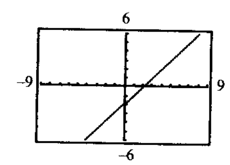
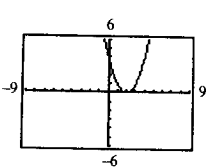
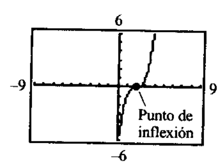
47.


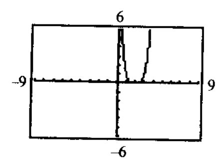
49.


51. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 6x^2 + \frac{45}{2}x - 24$

53.


55. *a*) $f(x) = (x-2)^n$ tiene un punto de inflexión en (2, 0) si n es impar y $n \geqslant 3$.



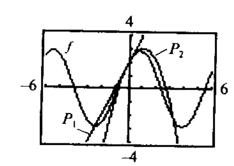
57. *a*) $S'' > 0$ *b*) $S' > 0$ *c*) $S' = C,\ S'' = 0$
d) $S' = 0,\ S'' = 0$ *e*) $S' < 0,\ S'' > 0$ *f*) $S' > 0$

59. *a*) $f(x) = \frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{16}x^2$
b) A dos millas del punto donde toma tierra

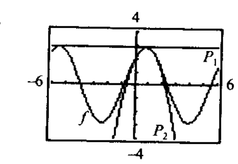
61. $x = \left(\dfrac{15 - \sqrt{33}}{16}\right)L \approx 0{,}578\ L$

63. $x = 100$ unidades

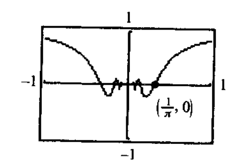
65. $\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi,\quad \theta = \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi$

67.


Los valores de f, P_1 y P_2, así como los de sus primeras derivadas son iguales en $x = 0$

69.


Los valores de f, P_1, y P_2, así como los de sus primeras derivadas son iguales en $x = \pi/4$

71.


77. Verdadero

78. Falso: 0 no está en el dominio de f.

79. Falso: el valor máximo es $\sqrt{13} \approx 3{,}60555$

80. Verdadero

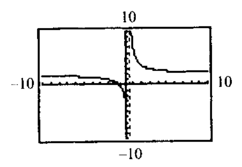
Sección 3.5 *(página 221)*

1. f **2.** c **3.** d **4.** a

5. b **6.** e

7.

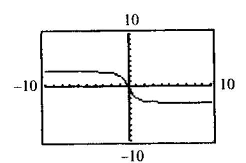
x	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$f(x)$	7	2,2632	2,0251	2,0025	2,0003	2,0000	2,0000



$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+3}{2x-1} = 2$$

9.

x	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$f(x)$	−2	−2,9814	−2,9998	−3,0000	−3,0000	−3,0000	−3,0000



$$\lim_{x\to\infty} \frac{-6x}{\sqrt{4x^2+5}} = -3$$

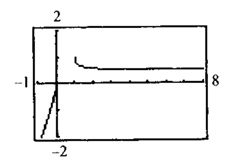
11. $\frac{2}{3}$ **13.** 0 **15.** No existe límite **17.** −1

19. 2 **21.** 0 **23.** 0 **25.** 1

27. 0 **29.** $-\frac{1}{2}$

31.

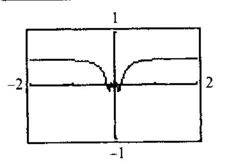
x	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$f(x)$	1,000	0,513	0,501	0,500	0,500	0,500	0,500



$$\lim_{x\to\infty} x - \sqrt{x(x-1)} = \tfrac{1}{2}$$

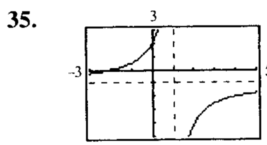
33.

x	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$f(x)$	0,479	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500

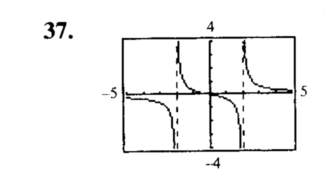


$$\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$$

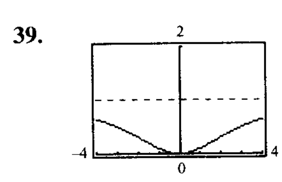
35.



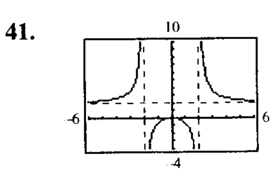
37.



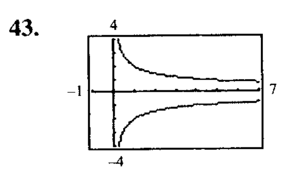
39.



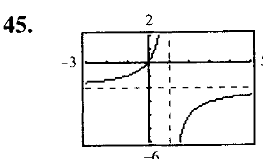
41.



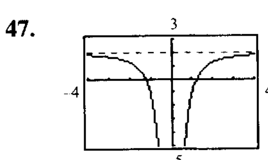
43.



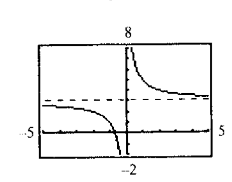
45.



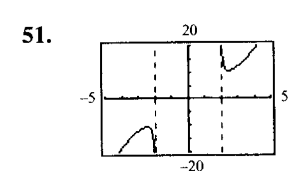
47.



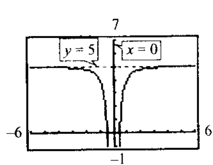
49.



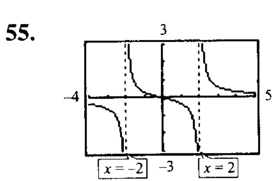
51.



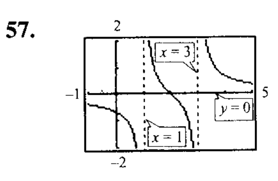
53.



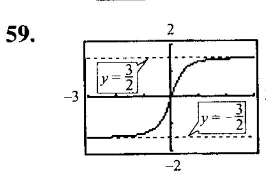
55.



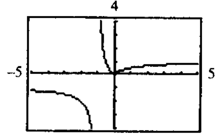
57.



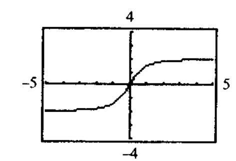
59.



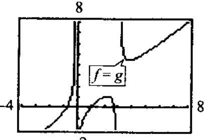
61. *a)*



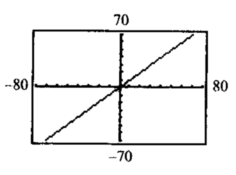
b)



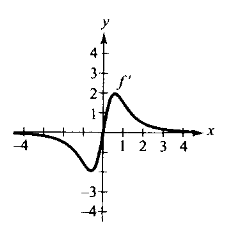
63. *a)*



b)



65. *a)*



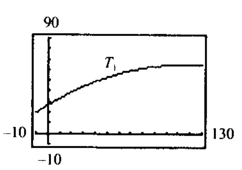
b) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 3, \quad \lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$

c) $y = 3$ es una asíntota horizontal. El ritmo de crecimiento de la función tiende hacia 0 cuando la gráfica tiende a $y = 3$.

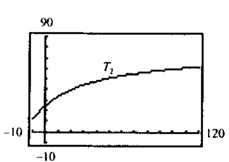
67. 0,5

69. *a)* $T_1 = -0{,}003t^2 + 0{,}677t + 26{,}564$

b)



c)



d) $T_1(0) \approx 26{,}6°$, $T_2(0) \approx 24{,}7°$ *e)* 77,5

f) La temperatura límite es 77,5°.
T_1 no tiene asíntota horizontal.

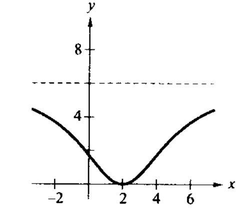
71. Falso: tomar $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

$f'(x) > 0$ en todos los números reales x.

72. Falso: tomar $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 & x < 0 \\ \sqrt{x + 1} & x \geqslant 0 \end{cases}$

$f''(x) < 0, f(x)$ crece sin tope

73.



Sección 3.6 *(página 232)*

1. *a)* D *b)* C *c)* A *d)* B

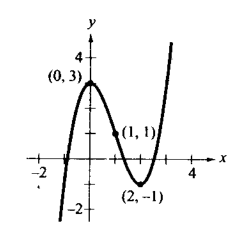
3. 5

5. *a)* $f'(x) = 0$ en $x = \pm 2$
$f'(x) > 0$ en $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$
$f'(x) < 0$ en $(-2, 2)$

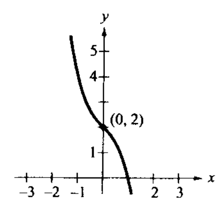
b) $f''(x) = 0$ en $x = 0$
$f''(x) > 0$ en $(0, \infty)$
$f''(x) < 0$ en $(-\infty, 0)$

c) $(0, \infty)$
d) f' es mínimo en $x = 0$
f está decreciendo al ritmo máximo

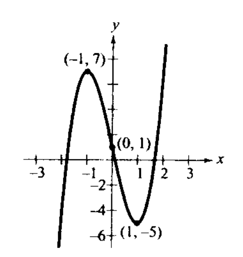
7.



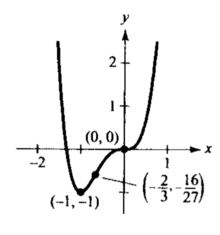
9.



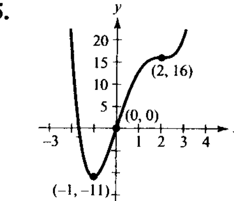
11.



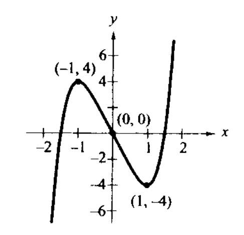
13.



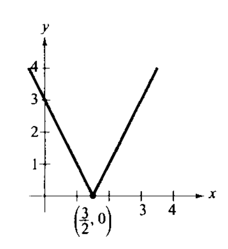
15.



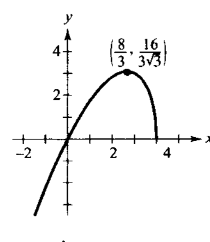
17.



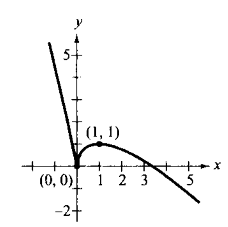
19.



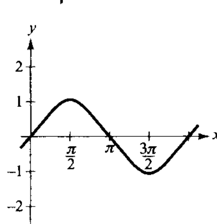
21.



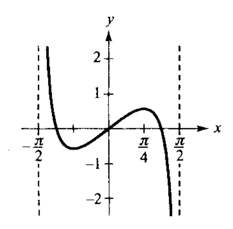
23.



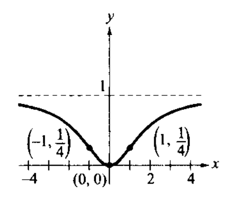
25.



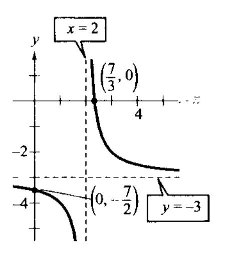
27.



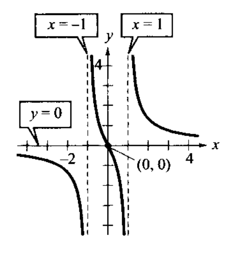
29.



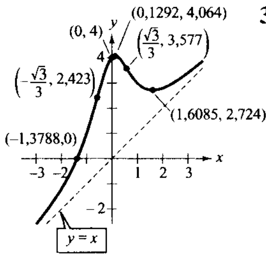
31.



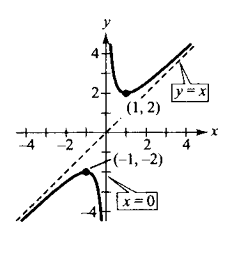
33.



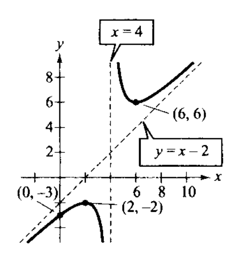
35.



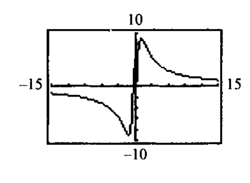
37.



39.

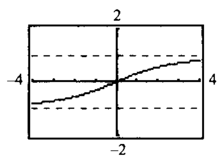


41.



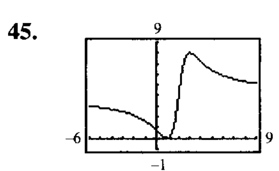
Mínimo: (−1,10, −9,05)
Máximo: (1,10, 9,05)
Puntos de inflexión:
(−1,84, −7,86), (1,84, 7,86)
Asíntota vertical: $x = 0$
Asíntota horizontal: $y = 0$

43.



Punto de inflexión: (0, 0)
Asíntotas horizontales: $y = \pm 1$

45.



La gráfica cruza a la asíntota horizontal $y = 4$. La gráfica de f no cruza la asíntota vertical $x = c$ porque $f(c)$ no existe.

47. [graph: window −2 to 4, −1 to 3]

La función racional no está reducida.

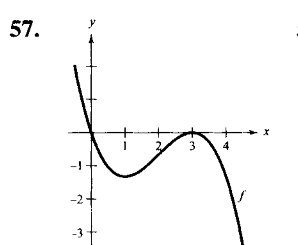
49. [graph: window −3 to 6, −3 to 3]

La gráfica parece acercarse a la recta $y = -x + 1$, que es la asíntota oblicua.

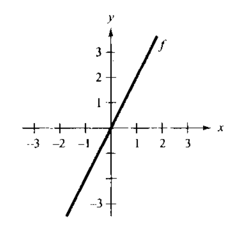
51. $y = \dfrac{1}{x - 5}$ **53.** $y = \dfrac{3x^2 - 13x - 9}{x - 5}$

55. *a*) El ritmo de cambio de f cambia al variar a. Si el signo de a cambia, la gráfica se refleja en el eje x.
b) Las localizaciones de la asíntota vertical y del mínimo (si $a > 0$) o del máximo (si $a < 0$) cambian.

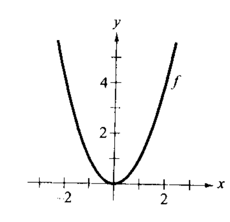
57.



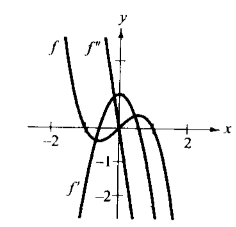
59.



61.



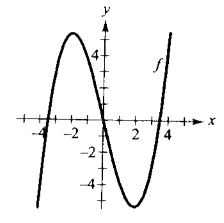
63.

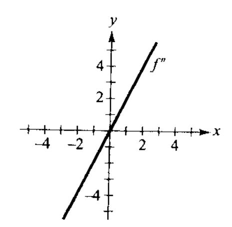


65. $a < 0$ y $b^2 < 3ac$ **67.** $a < 0$ y $b^2 = 3ac$

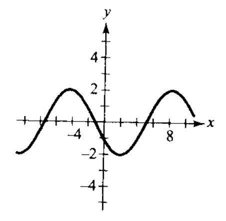
69. $a < 0$ y $b^2 > 3ac$

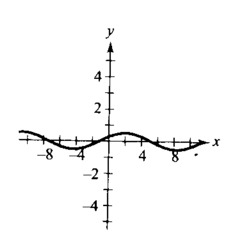
71.





73.





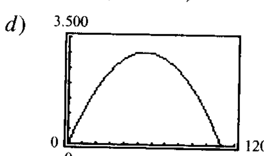
Sección 3.7 *(página 242)*

1. *a)* y *b)*

Primer número x	*Segundo número*	*Producto, P*
10	110 − 10	10(110 − 10) = 1.000
20	110 − 20	20(110 − 20) = 1.800
30	110 − 30	30(110 − 30) = 2.400
40	110 − 40	40(110 − 40) = 2.800
50	110 − 50	50(110 − 50) = 3.000
60	110 − 60	60(110 − 60) = 3.000
70	100 − 70	70(110 − 70) = 2.800
80	110 − 80	80(110 − 80) = 2.400
90	110 − 90	90(110 − 90) = 1.800
100	110 − 100	100(110 − 100) = 1.000

c) $P = x(110 - x)$

d)



e) 55 y 55

3. $\sqrt{192}$ y $\sqrt{192}$ **5.** 1 y 1 **7.** $l = w = 25$ pies

9. $l = w = 8$ pies

11. $\left(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ **13.** $x = \frac{Q_0}{2}$ **15.** 600×300 metros

17. *b)* $V_1 = 99$ pulgadas cuadradas
$V_2 = 125$ pulgadas cuadradas
$V_3 = 117$ pulgadas cuadradas
c) $5 \times 5 \times 5$ pulgadas

19. *a)* $V = x(s - 2x)^2,\ 0 < x < \frac{s}{2}$

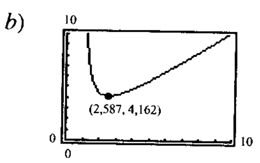
Máximo: $V\left(\frac{s}{6}\right) = \frac{2s^3}{27}$

b) Multiplicado por un factor 8

21. Porción rectangular: $\frac{16}{\pi + 4} \times \frac{32}{\pi + 4}$ pies

23. *a)* $L = \sqrt{x^2 + 4 + \frac{8}{x - 1} + \frac{4}{(x - 1)^2}},\quad x > 1$

b)



Mínimo en $x \approx 2{,}587$

c) (0, 0), (2,587, 0), (0, 3,260)

25. Anchura: $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; Longitud: $5\sqrt{2}$

27. Bases: r y $2r$; Altura: $\frac{\sqrt{3}r}{2}$

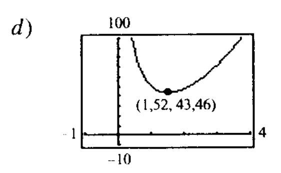
29. *a)* y *b)*

Radio, r	*Altura*	*Área de la superficie, S*
0,2	$\frac{22}{\pi(0{,}2)^2}$	$2\pi(0{,}2)\left[0{,}2 + \frac{22}{\pi(0{,}2)^2}\right] \approx 220{,}3$
0,4	$\frac{22}{\pi(0{,}4)^2}$	$2\pi(0{,}4)\left[0{,}4 + \frac{22}{\pi(0{,}4)^2}\right] \approx 111{,}0$
0,6	$\frac{22}{\pi(0{,}6)^2}$	$2\pi(0{,}6)\left[0{,}6 + \frac{22}{\pi(0{,}6)^2}\right] \approx 75{,}6$
0,8	$\frac{22}{\pi(0{,}8)^2}$	$2\pi(0{,}8)\left[0{,}8 + \frac{22}{\pi(0{,}8)^2}\right] \approx 59{,}0$
1,0	$\frac{22}{\pi(1{,}0)^2}$	$2\pi(1{,}0)\left[1{,}0 + \frac{22}{\pi(1{,}0)^2}\right] \approx 50{,}3$

Radio, r	*Altura*	*Área de la superficie, S*
1,2	$\dfrac{22}{\pi(1{,}2)^2}$	$2\pi(1{,}2)\left[1{,}2 + \dfrac{22}{\pi(1{,}2)^2}\right] \approx 45{,}7$
1,4	$\dfrac{22}{\pi(1{,}4)^2}$	$2\pi(1{,}4)\left[1{,}4 + \dfrac{22}{\pi(1{,}4)^2}\right] \approx 43{,}7$
1,6	$\dfrac{22}{\pi(1{,}6)^2}$	$2\pi(1{,}6)\left[1{,}6 + \dfrac{22}{\pi(1{,}6)^2}\right] \approx 43{,}6$
1,8	$\dfrac{22}{\pi(1{,}8)^2}$	$2\pi(1{,}8)\left[1{,}8 + \dfrac{22}{\pi(1{,}8)^2}\right] \approx 44{,}8$
2,0	$\dfrac{22}{\pi(2{,}0)^2}$	$2\pi(2{,}0)\left[2{,}0 + \dfrac{22}{\pi(2{,}0)^2}\right] \approx 47{,}1$

c) $S = 2\pi r\left(r + \dfrac{22}{\pi r^2}\right)$

d)



e) $r = \sqrt[3]{\dfrac{11}{\pi}},\ h = 2r$

31. $18 \times 18 \times 36$ pulgadas

33. $\dfrac{32\pi r^3}{81}$ **35.** $r = \sqrt[3]{\dfrac{9}{\pi}} \approx 1{,}42$ pulgadas

37. Lado del cuadrado: $\dfrac{10\sqrt{3}}{9 + 4\sqrt{3}}$

Lado del triángulo: $\dfrac{30}{9 + 4\sqrt{3}}$

39. $w = 8\sqrt{3},\ h = 8\sqrt{6}$ **41.** $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

43. *a)*

b) $d = -\dfrac{1}{16}x^4 + x^2$

Máximo en $x = 2\sqrt{2}$

c) $y = 2\sqrt{2}x - 4$

$y = 2\sqrt{2}x - 8$

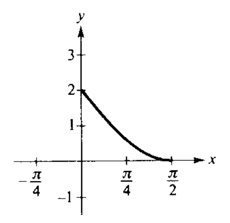
Paralelas

d) Las rectas tangentes son paralelas.

45. $\dfrac{d\sqrt[3]{I_1}}{\sqrt[3]{I_1} + \sqrt[3]{I_2}}$ unidades de la fuente 1

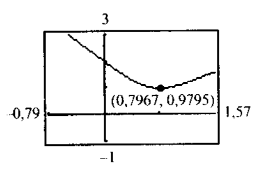
49.





a) Del origen a la y-intersección: 2
Del origen a la x-intersección: $\pi/2$

b) $d = \sqrt{x^2 + (2 - 2 \operatorname{sen} x)^2}$



c) La distancia mínima es 0,9795 en $x \approx 0{,}7967$

51. $\theta = \dfrac{2\pi}{3}(3 - \sqrt{6}) \approx 66°$

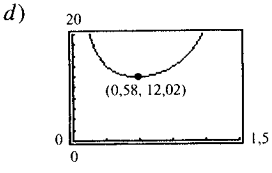
53. *a)* y *b)*

θ	L_1	L_2	$L_1 + L_2$
0,1	$\dfrac{2}{\operatorname{sen}(0{,}1)}$	$\dfrac{7}{\cos(0{,}1)}$	$\approx 27{,}1$
0,2	$\dfrac{2}{\operatorname{sen}(0{,}2)}$	$\dfrac{7}{\cos(0{,}2)}$	$\approx 17{,}2$
0,3	$\dfrac{2}{\operatorname{sen}(0{,}3)}$	$\dfrac{7}{\cos(0{,}3)}$	$\approx 14{,}1$
0,4	$\dfrac{2}{\operatorname{sen}(0{,}4)}$	$\dfrac{7}{\cos(0{,}4)}$	$\approx 12{,}7$
0,5	$\dfrac{2}{\operatorname{sen}(0{,}5)}$	$\dfrac{7}{\cos(0{,}5)}$	$\approx 12{,}1$
0,6	$\dfrac{2}{\operatorname{sen}(0{,}6)}$	$\dfrac{7}{\cos(0{,}6)}$	$\approx 12{,}0$
0,7	$\dfrac{2}{\operatorname{sen}(0{,}7)}$	$\dfrac{7}{\cos(0{,}7)}$	$\approx 12{,}3$

La longitud mínima es aproximadamente 12,0 metros.

c) $L = \dfrac{2}{\operatorname{sen}\theta} + \dfrac{7}{\cos\theta}$

d)



La longitud mínima es aproximadamente 12,02.

e) $\theta = \text{arctg}\,\frac{\sqrt[3]{98}}{7} \approx 0{,}5824$ radianes

f) 6,61 metros

55. Rectángulo: $\frac{3}{2} \times 2$
Círculo: $r = 1$
Semicírculo: $r = 12/7$
El cálculo resulta útil para el caso del rectángulo.

Sección 3.8 *(página 252)*

1.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	1,7000	−0,1100	3,4000	−0,0324	1,7324
2	1,7324	0,0012	3,4648	0,0003	1,7321

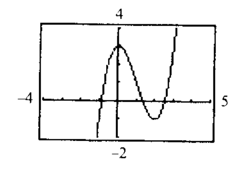
3.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	3	0,1411	−0,9900	−0,1425	3,1425
2	3,1425	−0,0009	−1,0000	0,0009	3,1416

5. 0,682 **7.** 1,146, 7,854 **9.** 0,900, 1,100, 1,900

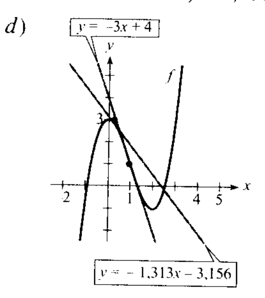
11. −0,489 **13.** 0,569 **15.** 4,493 **17.** 0,74

19. *a)*



b) 1,347 *c)* 2,532

d)



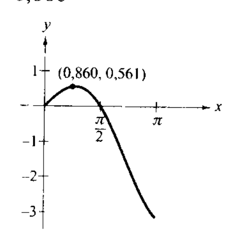
e) Si la estimación inicial $x = x_1$ no es suficientemente próxima al cero buscado, la x-intersección de la correspondiente recta tangente puede aproximar otro cero distinto de la función.

21. $f'(x_1) = 0$ **23.** $1 = x_1 = x_3 = \ldots$
$0 = x_2 = x_4 = \ldots$

25. $x_{i+1} = \frac{x_i^2 + a}{2x_i}$ **27.** 2,646 **29.** 1,565

33. 3,141

35. 0,860



37. (1,939, 0,240) **39.** $x \approx 1{,}563$ millas

41. $384.356 **43.** Falso: considerar $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

44. Verdadero **45.** Verdadero

46. Verdadero **47.** $x \approx 11{,}803$

Sección 3.9 *(página 260)*

1.

x	1,9	1,99	2	2,01	2,1
$f(x)$	3,610	3,960	4	4,040	4,410
$T(x)$	3,600	3,960	4	4,040	4,400

3.

x	**1,9**	**1,99**	**2**	**2,01**	**2,1**
$f(x)$	24,761	31,208	32	32,808	40,841
$T(x)$	24,000	31,200	32	32,800	40,000

5.

x	1,9	1,99	2	2,01	2,1
$f(x)$	0,946	0,913	0,909	0,905	0,863
$T(x)$	0,951	0,913	0,909	0,905	0,868

7. $\Delta y = 0{,}331,\ dy = 0{,}300$

9. $\Delta y = -0{,}039,\ dy = -0{,}040$

11. $6x\,dx$ **13.** $-\frac{3}{(2x-1)^2}\,dx$ **15.** $\frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

17. $\frac{2\sec^2 x(x^2\,\text{tg}\,x + \text{tg}\,x - x)}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

19. $-\pi\,\text{sen}\left(\frac{6\pi x - 1}{2}\right)dx$ **21.** $\pm\frac{3}{8}$ pulgadas cuadradas

23. $\pm 7\pi$ pulgadas cuadradas

25. *a)* $\frac{2}{3}$% *b)* 1,25%

27. *a*) $\pm 2{,}88\pi$ pulgadas cúbicas
b) $\pm 0{,}96\pi$ pulgadas cuadradas
c) $1\,\%$, $\frac{2}{3}\%$

29. 80π cm^3

31. *a*) $\frac{1}{4}\%$ *b*) 216 segundos = 3,6 minutos

35. *a*) 0,87 % *b*) 2,16 % **37.** 4.961 pies

39. $f(x) = \sqrt{x},\ dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$f(99{,}4) \approx \sqrt{100} + \dfrac{1}{2\sqrt{100}}(-0{,}6) = 9{,}97$

Calculadora: 9,97

41. $f(x) = \sqrt[4]{x},\ dy = \dfrac{1}{4x^{3/4}}\,dx$

$f(624) \approx \sqrt[4]{625} + \dfrac{1}{4(625)^{3/4}}(-1) = 4{,}998$

Calculadora: 4,998

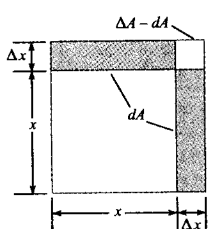
43. $f(x) = x^4,\ dy = 4x^3\,dx$
$f(0{,}99) \approx 1^4 + 4(1)(-0{,}01) = 1 - 4(0{,}01)$

45. $f(x) = \sec x,\ dy = \sec x \operatorname{tg} x\,dx$
$f(0{,}03) \approx \sec 0 + \sec 0 \operatorname{tg} 0(0{,}03) = 1 + 0(0{,}03)$

47. Verdadero **48.** Verdadero **49.** Verdadero

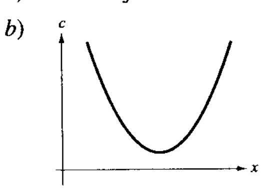
50. Falso: si $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 1$, y $\Delta x = 3$, entonces $dy = \frac{3}{2}$ y $\Delta y = 1$

51. *a*) $dA = 2x\Delta x,\ \Delta A = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$
b) y *c*)



Sección 3.10 *(página 268)*

1. *a*) Coste fijo
b)



c) Sí. Ocurre cuando los costes de producción crecen al ritmo más bajo.

3. 4.500 **5.** 300 **7.** 200 **9.** 200

11. $x = 30$
$p = 60$
13. $x = 1.500$
$p = 35$
15. $x = 3$

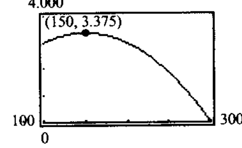
19. *a*)

Tamaño del pedido, x	*Precio*	*Beneficio, P*
102	90 − 2(0,15)	102[90 − 2(0,15)] − 102(60) = 3.029,40
104	90 − 4(0,15)	104[90 − 4(0,15)] − 104(60) = 3.057,60
106	90 − 6(0,15)	106[90 − 6(0,15)] − 106(60) = 3.084,60
108	90 − 8(0,15)	108[90 − 8(0,15)] − 108(60) = 3.110,40
110	90 − 10(0,15)	110[90 − 10(0,15)] − 110(60) = 3.135,00
112	90 − 12(0,15)	112[90 − 12(0,15)] − 112(60) = 3.158,40

b)

Tamaño del pedido, x	*Precio*	*Beneficio, P*
⋮	⋮	⋮
146	90 − 46(0,15)	146[90 − 46(0,15)] − 146(60) = 3.372,60
148	90 − 48(0,15)	148[90 − 48(0,15)] − 148(60) = 3.374,40
150	90 − 50(0,15)	150[90 − 50(0,15)] − 150(60) = 3.375,00
152	90 − 52(0,15)	152[90 − 52(0,15)] − 152(60) = 3.374,40
154	90 − 54(0,15)	154[90 − 54(0,15)] − 154(60) = 3.372,60
⋮	⋮	⋮

c) $P = x[90 - (x - 100)(0{,}15)] - x(60) = x(45 - 0{,}15)x$, $x \geqslant 100$
d) 150 unidades
e)



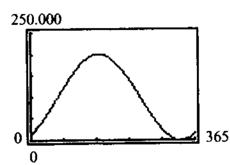
21. $10\sqrt{30} \approx 54{,}8$ millas/h

23. A un punto de la orilla que esté $3/(2\sqrt{7})$ millas corriente abajo.

25. $y = \dfrac{64}{141}x$, 6,2 millas **27.** $y \approx 0{,}3x$, 4,5 millas

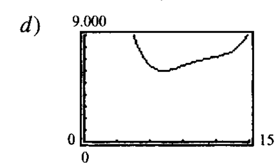
29. 8 % **31.** $x \approx 40$ unidades **33.** $30.000

35. *a*) $t = 151{,}25$, mayo 31
b) $t = 333{,}75$, nov. 30



37. *a*) 1987
b) 1994
c) Mínimo: $5.995 millones

Máximo: \$8.051 millones

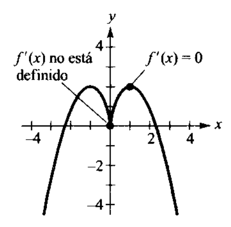
d) 

39. *a)* Función de demanda
b) Función de costes
c) Función de ingresos
d) Función de beneficios

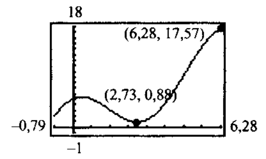
41. $\eta = -\frac{17}{3}$ elástica **43.** $\eta = -\frac{1}{2}$, inelástica

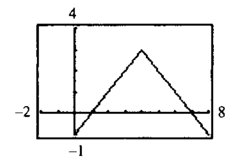
Ejercicios de repaso del Capítulo 3 *(página 271)*

1. Sea f definida en c. Si $f'(c) = 0$ o si f' no está definida en c, entonces c es un número crítico de f.



3. Máximo: $(2\pi, 17{,}57)$
Mínimo: $(2{,}73, 0{,}88)$



5. *a)* 

b) f no es derivable en $x = 4$

7. $f'\left(\frac{2.744}{729}\right) = \frac{3}{7}$ **9.** $f'(0) = 1$ **11.** $c = \frac{x_1 + x_2}{2}$

13. Números críticos: $x = 1, \frac{7}{3}$
Creciente en $(-\infty, 1)$, $(\frac{7}{3}, \infty)$
Decreciente en $(1, \frac{7}{3})$

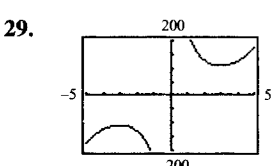
15. Números críticos: $x = 1, 0$
Creciente en $(1, \infty)$
Decreciente en $(0, 1)$

17. Mínimo: $(2, -12)$ **19.** $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

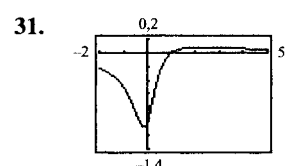
21. $\frac{2}{3}$ **23.** 0

25. Asíntota vertical: $x = 4$
Asíntota horizontal: $y = 2$

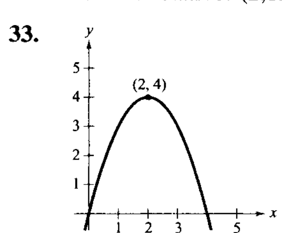
27. Asíntota vertical: $x = 0$
Asíntota horizontal: $y = -2$

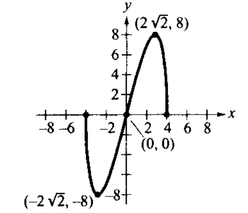
29. 

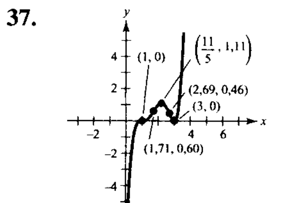
Asíntota vertical: $x = 0$
Mínimo relativo: $(3, 108)$
Máximo relativo: $(-3, -108)$

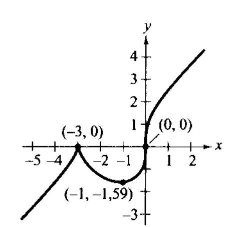
31. 

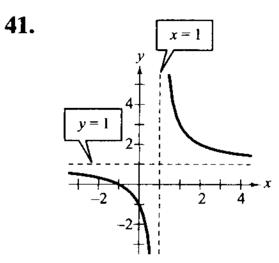
Asíntota horizontal: $y = 0$
Mínimo relativo: $(-0{,}155, -1{,}077)$
Máximo relativo: $(2{,}155, 0{,}077)$

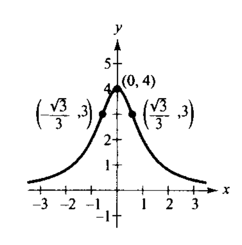
33. 

35. 

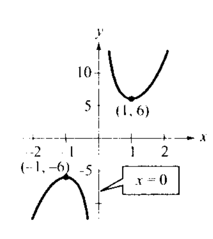
37. 

39. 

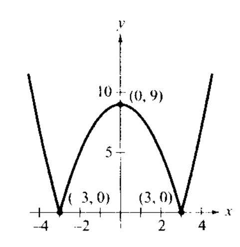
41. 

43. 

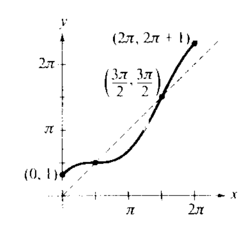
45.



47.



49.



51. $t \approx 4{,}92 \approx$ 4:55 p.m.; $d \approx 64$ km

53. (0, 0), (5, 0), (0, 10) **57.** 14,05 pies

59. $3(3^{2/3} + 2^{2/3})^{3/2} \approx 21{,}07$ pies

61. *a*) $y = \dfrac{1}{4}$ pulgadas, $v = 4$ pulgadas por segundo

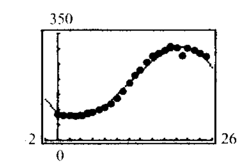
c) Período: $\dfrac{\pi}{6}$ Frecuencia: $\dfrac{6}{\pi}$

63. −0,347, −1,532, 1,879 **65.** −1,164, 1,453

67. $dy = (1 - \cos x + x \operatorname{sen} x)\, dx$

69. *a*) $S = -0{,}081t^3 + 2{,}920t^2 - 15{,}546t + 92{,}325$

b)



c) 1990 *d*) 1982

71. $dS = \pm 1{,}8\pi \text{ cm}^2, \dfrac{dS}{S} \times 100 \approx \pm 0{,}56\,\%$

$dV = \pm 8{,}1\pi \text{ cm}^3, \dfrac{dV}{V} \times 100 \approx \pm 0{,}83\,\%$

73. \$48 **75.** 120 **77.** $x = \sqrt{\dfrac{2Qs}{r}}$

79. Máximo: (1, 3)
Mínimo: (1, 1)

81. Falso: considerar $f(x) = x^3$ y $c = 0$

82. Falso: las asíntotas horizontales de $f(x) = 2x/\sqrt{x^2 + 2}$ son $y = 2$, $y = -2$

83. Creciente y cóncava hacia abajo.

CAPÍTULO 4

Sección 4.1 *(página 286)*

	Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
5.	$\int \sqrt[3]{x}\, dx$	$\int x^{1/3}\, dx$	$\dfrac{x^{4/3}}{4/3} + C$	$\dfrac{3}{4}x^{4/3} + C$
7.	$\int \dfrac{1}{x\sqrt{x}}\, dx$	$\int x^{-3/2}\, dx$	$\dfrac{x^{-1/2}}{-1/2} + C$	$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} + C$
9.	$\int \dfrac{1}{2x^3}\, dx$	$\dfrac{1}{2}\int x^{-3}\, dx$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^{-2}}{-2}\right) + C$	$-\dfrac{1}{4x^2} + C$

11. $y = t^3 + C$ **13.** $y = \frac{2}{5}x^{5/2} + C$ **15.** $\frac{1}{4}x^4 + 2x + C$

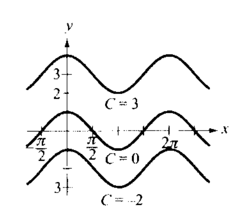
17. $\dfrac{2}{5}x^{5/2} + x^2 + x + C$ **19.** $\dfrac{3}{5}x^{5/3} + C$ **21.** $-\dfrac{1}{2x^2} + C$

23. $\frac{2}{15}x^{1/2}(3x^2 + 5x + 15) + C$ **25.** $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

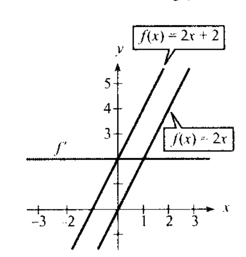
27. $\frac{2}{7}y^{7/2} + C$ **29.** $x + C$ **31.** $-2\cos x + 3 \operatorname{sen} x + C$

33. $t + \operatorname{cosec} t + C$ **35.** $\operatorname{tg} \theta + \cos \theta + C$ **37.** $\operatorname{tg} y + C$

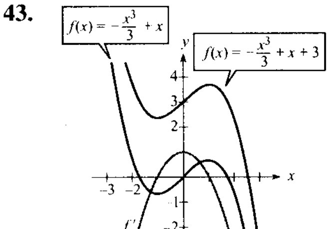
39.



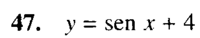
41.



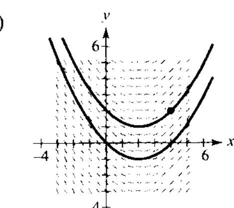
43.



45. $y = x^2 - x + 1$

47.  $y = \operatorname{sen} x + 4$

49. *a*)



b) $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$

51. $f(x) = x^2 + x + 4$

53. $f(x) = -4x^{1/2} + 3x = -4\sqrt{x} + 3x$

55. *a)* $h(t) = \frac{3}{4}t^2 + 5t + 12$ *b)* 69 cm

57. 56,25 pies **59.** $v_0 \approx 187{,}617$ pies/s

63. 5.1 metros **65.** 320 metros, −32 m/s

67. *a)* $v(t) = 3t^2 - 12t + 9,\ a(t) = 6t - 12$
b) (0, 1), (3, 5) *c)* −3

69. $a(t) = \dfrac{-1}{2t^{3/2}},\ s(t) = 2\sqrt{t} + 2$

71. *a)* 1,18 m/s² *b)* 190 metros

73. *a)* 300 pies *b)* 60 pies/s (unas 41 millas/h)

75. 7,45 pies/s²

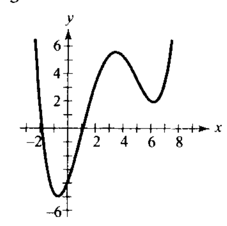
77. $C(x) = x^2 - 12x + 50$ **79.** $R = x(100 - \frac{5}{2}x)$

$\bar{C}(x) = x - 12 + \dfrac{50}{x}$ $p = 100 - \frac{5}{2}x$

81. Verdadero **82.** Verdadero

83. Verdadero **84.** Verdadero

85. *a)* −1
b) No. Las pendientes de las rectas tangentes son mayores que 2 en [0, 2]. Por tanto, f debe crecer más de cuatro unidades en [0, 2].
c) No. La función es decreciente en [4, 5].
d) 3,5 $f'(3{,}5) \approx 0$
e) Cóncava hacia arriba: $(-\infty, 1), (5, \infty)$
Cóncava hacia abajo: (1, 5)
f) 3
g)



Sección 4.2 *(página 300)*

1. 35 **3.** $\frac{158}{85}$ **5.** $4c$ **7.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{9} \frac{1}{3i}$

9. $\displaystyle\sum_{j=1}^{8} \left[2\left(\frac{j}{8}\right) + 3\right]$ **11.** $\displaystyle\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{2i}{n}\right)^3 - \left(\frac{2i}{n}\right)\right]$

13. $\displaystyle\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} \left[2\left(1 + \frac{3i}{n}\right)^2\right]$ **15.** 420 **17.** 2.470

19. 12.040 **21.** 2.930 **23.** $\dfrac{8}{3}$

25. $\dfrac{81}{4}$ **27.** 9 **29.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left[8\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right)\right] = 8$

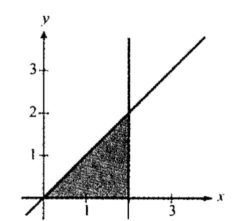
31. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{n^3}\right) = \frac{1}{3}$

33. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{n}\right) = 3$

35. $S \approx 0{,}768$
$s \approx 0{,}518$

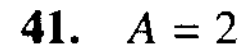
37. $S \approx 0{,}746$
$s \approx 0{,}646$

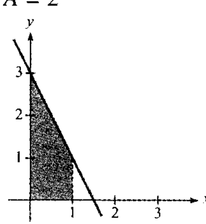
39. *a)*



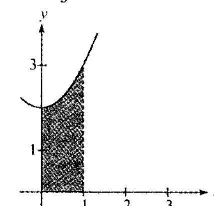
e)

n	5	10	50	100
$s(n)$	1,6	1,8	1,96	1,98
$S(n)$	2,4	2,2	2,04	2,02

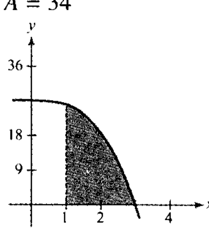

41. $A = 2$



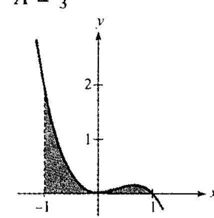

43. $A = \frac{7}{3}$



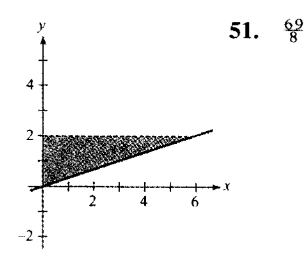

45. $A = 34$



47. $A = \frac{2}{3}$



49. $A = 6$



51. $\frac{69}{8}$ **53.** 0,345

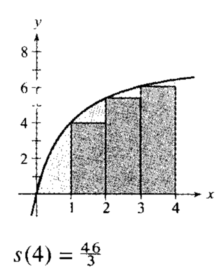
55.

n	4	8	12	16	20
Área aproximada	5,3838	5,3523	5,3439	5,3403	5,3384

57.

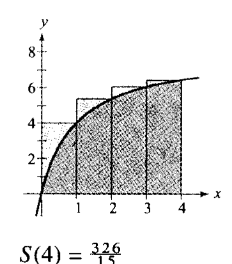
n	4	8	12	16	20
Área aproximada	2,2223	2,2387	2,2418	2,2430	2,2435

59. *a)*



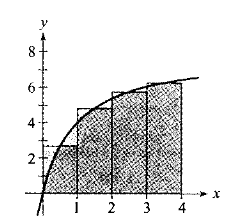
$s(4) = \frac{46}{3}$

b)



$S(4) = \frac{326}{15}$

c)



$m(4) = \frac{6.112}{315}$

e)

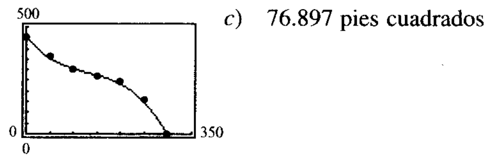
n	4	8	20	100	200
$s(n)$	15,333	17,368	18,459	18,995	19,060
$S(n)$	21,733	20,568	19,739	19,251	19,188
$m(n)$	19,403	19,201	19,137	19,125	19,125

f) f es una función creciente.

61. b **63.** Verdadero **64.** Verdadero

69. *a)* $y = (-4{,}09 \times 10^{-5})x^3 + 0{,}016x^2 - 2{,}67x + 452{,}9$

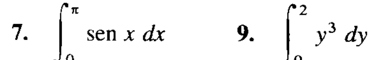
b)



c) 76.897 pies cuadrados

Sección 4.3 *(página 312)*

1. $\int_0^5 3\,dx$ **3.** $\int_{-4}^4 (4-|x|)\,dx$ **5.** $\int_{-2}^2 (4-x^2)\,dx$

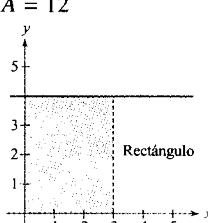


7. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ **9.** $\int_0^2 y^3\,dy$

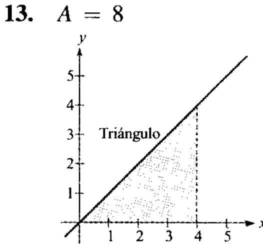
11.



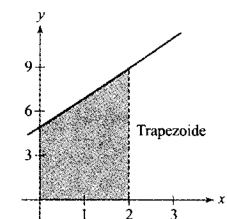
$A = 12$



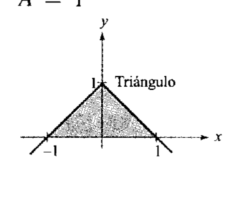
13. $A = 8$



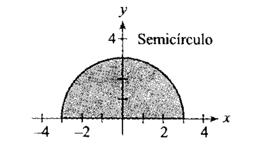
15. $A = 14$



17. $A = 1$



19. $A = \frac{9\pi}{2}$



21. *a)* 13 *b)* -10 *c)* 0 *d)* 30

23. *a)* 8 *b)* -12 *c)* -4 *d)* 30

25. 36 **27.** 0 **29.** $\frac{10}{3}$

31. $\int_{-1}^5 (3x + 10)\,dx$ **33.** $\int_0^3 \sqrt{x^2 + 4}\,dx$

35.

n	4	8	12	16	20
$L(n)$	3,6830	3,9956	4,0707	4,1016	4,1177
$M(n)$	4,3082	4,2076	4,1838	4,1740	4,1690
$R(n)$	3,6830	3,9956	4,0707	4,1016	4,1177

37.

n	4	8	12	16	20
$L(n)$	0,5890	0,6872	0,7199	0,7363	0,7461
$M(n)$	0,7854	0,7854	0,7854	0,7854	0,7854
$R(n)$	0,9817	0,8836	0,8508	0,8345	0,8247

39. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x > \int_1^5 f(x)\,dx$

41. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x < \int_1^5 f(x)\,dx$

43. *a)* $-\pi$ *b)* 4 *c)* $-(1 + 2\pi)$ *d)* $3 - 2\pi$
e) $5 + 2\pi$ *f)* $23 - 2\pi$

45. a **47.** Verdadero

48. Falso: $\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx \neq \left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_0^1 \sqrt{x}\,dx\right)$

49. Verdadero

50. Verdadero **51.** Falso: $\int_0^2 (-x)\,dx = -2$

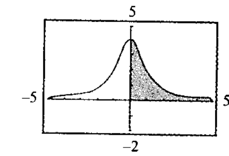
52. Falso: $\int_{-2}^4 x\,dx = 6$ **53.** 272 **55.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

57. No, $f(x)$ es discontinua en $x = 4$ **59.** $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

61. $\frac{1}{3}$

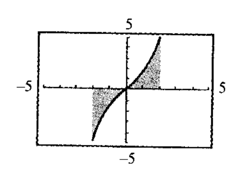
Sección 4.4 *(página 324)*

1.



Positiva

3.



Cero

5. 1 **7.** $-\frac{5}{2}$ **9.** $-\frac{10}{3}$ **11.** $\frac{1}{3}$ **13.** $\frac{1}{2}$

15. $\frac{2}{3}$ **17.** -4 **19.** $-\frac{1}{18}$ **21.** $-\frac{27}{20}$

23. $\frac{9}{2}$ **25.** $\pi + 2$ **27.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **29.** 0

31. $\int_0^3 10.000\,(t-6)\,dt = -\$135.000$

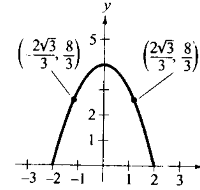
33. $\dfrac{1}{6}$ **35.** $\dfrac{12\sqrt{3}}{5}$ **37.** 1 **39.** 10

41. 6 **43.** 0,4380, 1,7908

45. $\pm\text{arcos}\,\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \approx \pm 0{,}4817$

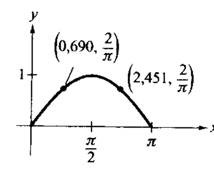
47. Valor medio $= \dfrac{8}{3}$

$x = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \approx \pm 1{,}155$



49. Valor medio $= \dfrac{2}{\pi}$

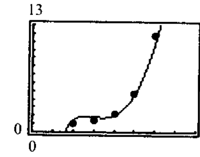
$x \approx 0{,}690,\ x \approx 2{,}451$



51. $-1{,}5$ **53.** 6,5 **55.** 15,5

57. *a)* 8 *b)* $\frac{4}{3}$ *c)* 20, $\frac{10}{3}$

59. *a)*



b) $R'(40) \approx 0{,}12$
$R'(50) \approx 0{,}43$

c) 1,80, 7,35

61. *a)* $F(x) = 500 \sec^2 x$ *b)* 827 newtons

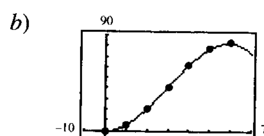
63. *a)* *b)* 4.980

c) $N = -0{,}084t^3 + 0{,}635t^2 + 0{,}791t + 4{,}103$

d) *e)* 5.129 *f)* 12,6

65. *a)* $v = (-8{,}612 \times 10^{-4})t^3 + 0{,}078t^2 - 0{,}208t + 0{,}096$

b)



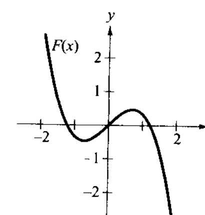
c) 2.457 metros

67. $\frac{1}{2}x^2 + 2x$ **69.** $\frac{3}{4}x^{4/3} - 12$ **71.** $\text{tg}\,x - 1$

73. $x^2 - 2x$ **75.** $\sqrt{x^4 + 1}$ **77.** $x \cos x$

79. 8 **81.** $\cos x\sqrt{\text{sen}\,x}$ **83.** $3x^2\,\text{sen}\,x^6$

85.



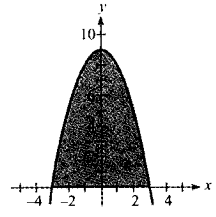
Los extremos de F corresponden a los ceros de f, y los puntos de inflexión de F a los extremos de f.

87. *a)* $C(x) = 1.000(12x^{5/4} + 125)$
b) $C(1) = \$137.000$
$C(5) = \$214.721$
$C(10) = \$338.394$

89. Verdadero **90.** Verdadero

91. Falso: $f(x) = x^{-2}$ tiene una discontinuidad no evitable en $x = 0$

95. *a)*



$$A = \int_{-3}^{3} (9 - x^2)\,dx = 36$$

b) $b = 6,\ h = 9,\ A = 36$

c) $b = 5,\ h = \frac{25}{4},\ A = \frac{125}{6}$

97. 27,37 unidades

Sección 4.5 *(página 339)*

	$\int f(g(x))g'(x)\,dx$	$u = g(x)$	$du = g'(x)\,dx$
1.	$\int (5x^2+1)^2(10x)\,dx$	$5x^2+1$	$10x\,dx$
3.	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$	x^2+1	$2x\,dx$
5.	$\int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\,dx$	$\operatorname{tg} x$	$\sec^2 x\,dx$

7. $\dfrac{(1+2x)^5}{5} + C$ **9.** $\dfrac{2}{3}(9-x^2)^{3/2} + C$

11. $\dfrac{(x^3-1)^5}{15} + C$ **13.** $-\dfrac{15}{8}(1-x^2)^{4/3} + C$

15. $-\dfrac{1}{3(1+x^3)} + C$ **17.** $-\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^4 + C$

19. $\sqrt{2x} + C$

21. $\frac{2}{5}x^{5/2} + 2x^{3/2} + 14x^{1/2} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x}(x^2+5x+35) + C$

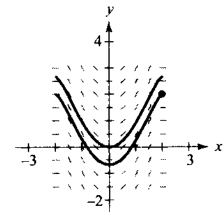
23. $\frac{1}{4}t^4 - t^2 + C$

25. $6y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2} + C = \frac{2}{5}y^{3/2}(15-y) + C$

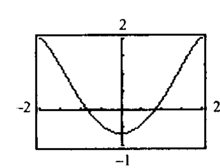
27. $2x^2 - 4\sqrt{16-x^2} + C$

29. $-\dfrac{1}{2(x^2+2x-3)} + C$

31. *a)*



b) $y = -\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2} + 2$



33. $-\dfrac{1}{2}\cos 2x + C$ **35.** $-\operatorname{sen}\dfrac{1}{\theta} + C$

37. $\dfrac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x + C_1$ o $-\dfrac{1}{4}\cos^2 2x + C_2$ o $-\dfrac{1}{8}\cos 4x + C_3$

39. $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C$ **41.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + C$ o $\frac{1}{2}\sec^2 x + C_1$

43. $-\operatorname{ctg} x - x + C$ **45.** $f(x) = 2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2} + 3$

47. $\frac{2}{15}(x+2)^{3/2}(3x-4) + C$

49. $-\frac{2}{105}(1-x)^{3/2}(15x^2+12x+8) + C$

51. $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{15}(3x^2+2x-13) + C$

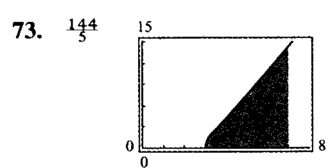
53. $-x - 1 - 2\sqrt{x+1} + C$ o $-(x+2\sqrt{x+1}) + C_1$

55. 0 **57.** 2 **61.** $\dfrac{4}{15}$ **63.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

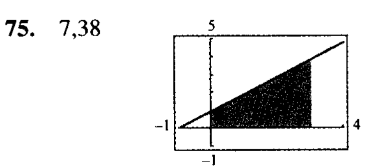
65. $\dfrac{1.209}{28}$ **67.** 4 **69.** $2(\sqrt{3}-1)$

71. $\frac{10}{3}$

73. $\frac{144}{5}$



75. 7,38



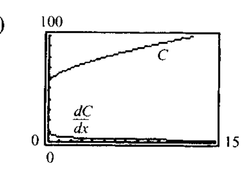
77. $\frac{1}{6}(2x-1)^3 + C_1 = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x - \frac{1}{6} + C_1$
o $\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x + C_2$
Las respuestas difieren en una constante: $C_2 = C_1 - \frac{1}{6}$

79. *a)* $\frac{8}{3}$ *b)* $\frac{16}{3}$ *c)* $-\frac{8}{3}$ *d)* 8

81. $2\int_0^4 (6x^2 - 3)\, dx = 232$

83. $V(t) = \dfrac{200.000}{t + 1} + 300.000$
$340.000

85. *a)* $C(x) = \frac{3}{2}(12x + 1)^{2/3} + 56{,}35$
b)



87. *a)* 102,352 miles de unidades
b) 102,352 miles de unidades
c) 74,5 miles de unidades

89. *a)* 1,273 amperios
b) 1,382 amperios
c) 0 amperios

91. Falso $\int (2x + 1)^2\, dx = \frac{1}{6}(2x + 1)^3 + C$

92. Falso $\int x(x^2 + 1)\, dx = \frac{1}{4}(x^2 + 1)^2 + C$

93. Verdadero **94.** Verdadero **95.** Verdadero

96. Falso: $\int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\, dx = \frac{1}{6} \operatorname{sen}^3 2x + C$

Sección 4.6 *(página 348)*

	Exacto	*Trapecios*	*Simpson*
1.	2,6667	2,7500	2,6667
3.	4,0000	4,2500	4,0000
5.	4,0000	4,0625	4,0000
7.	12,6667	12,6640	12,6667
9.	0,1667	0,1676	1,1667

	Trapecios	*Simpson*	*Calculadora*
11.	3,283	3,240	3,241
13.	0,342	0,372	0,393
15.	0,957	0,978	0,977
17.	0,089	0,089	0,089
19.	0,194	0,186	0,186

21. *a)* 0,500 *b)* 0,000

23. *a)* $n = 366$ *b)* $n = 26$

25. *a)* $n = 130$ *b)* $n = 12$

27. *a)* $n = 643$ *b)* $n = 48$

31.

n	$L(n)$	$M(n)$	$R(n)$	$T(n)$	$S(n)$
4	12,7771	15,3965	18,4340	15,6055	15,4845
8	14,0868	15,4480	16,9152	15,5010	15,4662
10	14,3569	15,4544	16,6197	15,4883	15,4658
12	14,5386	15,4578	16,4242	15,4814	15,4657
16	14,7674	15,4613	16,1816	15,4745	15,4657
20	14,9056	15,4628	16,0370	15,4713	15,4657

33.

n	$L(n)$	$M(n)$	$R(n)$	$T(n)$	$S(n)$
4	2,8163	3,5456	3,7256	3,2709	3,3996
8	3,1809	3,5053	3,6356	3,4083	3,4541
10	3,2478	3,4990	3,6115	3,4296	3,4624
12	3,2909	3,4952	3,5940	3,4425	3,4674
16	3,3431	3,4910	3,5704	3,4568	3,4730
20	3,3734	3,4888	3,5552	3,4643	3,4759

35. 0,701 **37.** 10.233,58 libras-pies

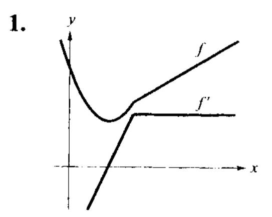
39. *a)* 9.920 pies cuadrados
b) 10, 413$\frac{1}{3}$ pies cuadrados

41. 89.250 m^2 **43.** 2,477

45. *a)* 0 *b)* $L'(x) = \dfrac{1}{x},\ L'(1) = 1$ *c)* 2,718

Ejercicios de repaso del Capítulo 4 *(página 350)*

1.



3. $\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$

5. $\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{x} + C$ **7.** $2x^2 + 3\cos x + C$ **9.** $y = 2 - x^2$

11. 240 pies/s

13. *a)* 3 segundos *b)* 144 pies
c) $\frac{3}{2}$ segundos *d)* 108 pies

15. *a)* $\sum_{i=1}^{10} (2i - 1)$ *b)* $\sum_{i=1}^{n} i^3$ *c)* $\sum_{i=1}^{10} (4i + 2)$

17. *a*) $S = \dfrac{5mb^2}{8}, \qquad s = \dfrac{3mb^2}{8}$

b) $S(n) = \dfrac{mb^2(n+1)}{2n}, \quad s(n) = \dfrac{mb^2(n-1)}{2n}$

c) $\dfrac{1}{2}mb^2$ *d*) $\dfrac{1}{2}mb^2$

19. *a*) 13 *b*) 7 *c*) 11 *d*) 50

21. $\dfrac{1}{7}x^7 + \dfrac{3}{5}x^5 + x^3 + x + C$ **23.** $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3+3} + C$

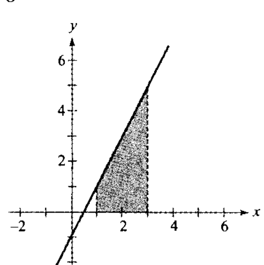
25. $\dfrac{(3x^2-1)^5}{30} + C$ **27.** $\dfrac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x + C$

29. $2\sqrt{1-\cos\theta} + C$ **31.** $\dfrac{\operatorname{tg}^{n+1} x}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

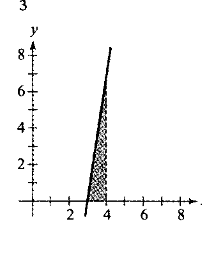
33. $\dfrac{1}{3\pi}(1+\sec \pi x)^3 + C$ **35.** 16 **37.** 0

39. 2 **41.** $\dfrac{422}{5}$ **43.** $\dfrac{28\pi}{15}$ **45.** 2

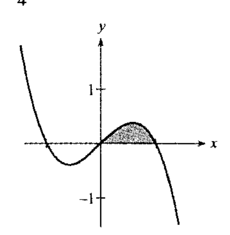
47. 6



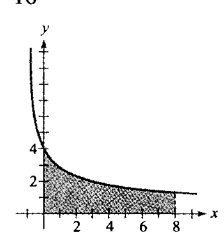
49. $\frac{10}{3}$



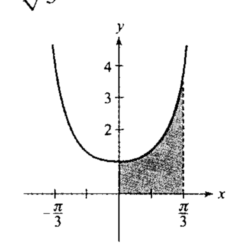
51. $\frac{1}{4}$



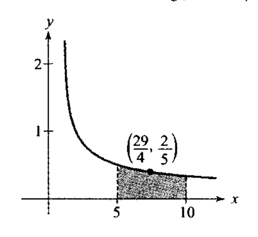
53. 16



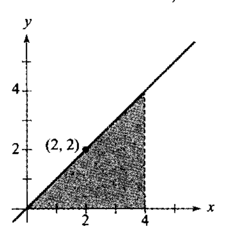
55. $\sqrt{3}$



57. Valor medio = $\frac{2}{5}$, $x = \frac{29}{4}$



59. Valor medio = 2, $x = 2$



61. Regla de los trapecios: 0,257
Regla de Simpson: 0,254
Calculadora: 0,254

63. *a*) $C \approx \$9{,}17$ *b*) $C \approx \$3{,}14$; Ahorro $\approx \$6{,}03$

65. 1,6234 litros **67.** *a*) $\dfrac{24.300}{M}$ *b*) $\dfrac{27.300}{M}$

69. *a*) 0,025 = 2,5 % *b*) 0,736 = 73,6 %

70. Falso: sólo las constantes pueden sacarse fuera del signo integral.

71. Falso: $\dfrac{d}{dx}\left[-\dfrac{1}{x^2}\right] \neq \dfrac{1}{x}$ **72.** Verdadero

73. Verdadero **74.** Falso: $\dfrac{d}{dx}\sec^2 x \neq \operatorname{tg} x$

CAPÍTULO 5

Sección 5.1 (*página 364*)

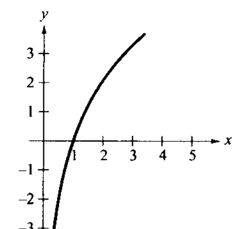
1.

x	0,5	1,5	2	2,5	3
$\int_1^x (1/t)\,dt$	−0,6932	0,4055	0,6932	0,9163	1,0987

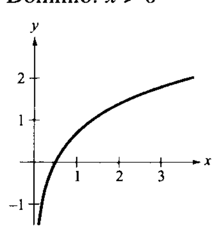
x	3,5	4			
$\int_1^x (1/t)\,dt$	1,2529	1,3865			

3. b **4.** d **5.** a **6.** c

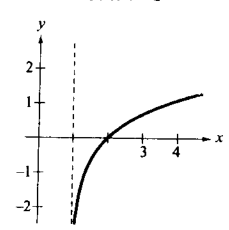
7. Dominio: $x > 0$



9. Dominio: $x > 0$



11. Dominio: $x > 1$



13. *a)* 1,7917 *b)* −0,4055
c) 4,3944 *d)* 0,5493

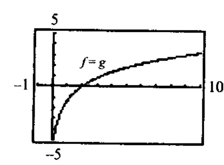
15. $\ln 2 - \ln 3$ **17.** $\ln x + \ln y - \ln z$ **19.** $\frac{3}{2}\ln 2$

21. $3[\ln(x+1) + \ln(x-1) - 3\ln x]$

23. $\ln z + 2\ln(z-1)$ **25.** $\ln \dfrac{x-2}{x+2}$

27. $\ln \sqrt[3]{\dfrac{x(x+3)^2}{x^2-1}}$ **29.** $\ln \dfrac{9}{\sqrt{x^2+1}}$

31.



33. $-\infty$ **35.** $\ln 4$

37. 3 **39.** 2 **41.** $\dfrac{2}{x}$ **43.** $\dfrac{4(\ln x)^3}{x}$

45. $\dfrac{2x^2-1}{x(x^2-1)}$ **47.** $\dfrac{1-x^2}{x(x^2+1)}$ **49.** $\dfrac{1-2\ln t}{t^3}$

51. $\dfrac{2}{x\ln x^2} = \dfrac{1}{x\ln x}$ **53.** $\dfrac{1}{1-x^2}$ **55.** $\dfrac{-4}{x(x^2+4)}$

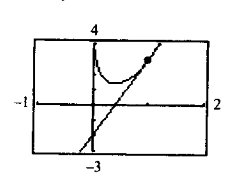
57. $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}$ **59.** $\operatorname{ctg} x$ **61.** $-\operatorname{tg} x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x - 1}$

63. $\dfrac{3\cos x}{(\operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 2)}$

65. $\dfrac{2}{x}(\operatorname{sen} 2x + x\cos 2x \ln x^2)$

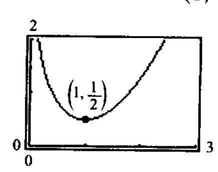
67. *a)* $5x - y - 2 = 0$

b)

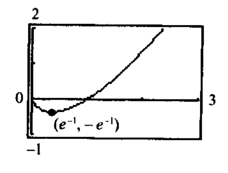


69. $\dfrac{2xy}{3-2y^2}$ **71.** $xy'' + y' = x\left(\dfrac{-2}{x^2}\right) + \dfrac{2}{x} = 0$

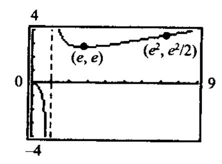
73. Mínimo relativo: $(1, \frac{1}{2})$



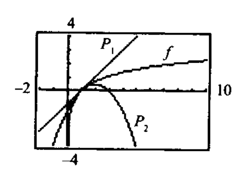
75. Mínimo relativo: $(e^{-1}, -e^{-1})$



77. Mínimo relativo: (e, e)
Punto de inflexión: $\left(e^2, \dfrac{e^2}{2}\right)$



79.



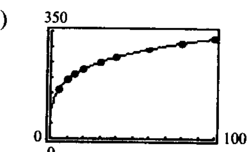
Los valores de f, P_1, y P_2, así como los de sus primeras derivadas, coinciden en $x = 1$

81. $x \approx 0{,}567$ **83.** $\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$

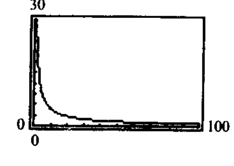
85. $\dfrac{3x^3 - 15x^2 + 8x}{2(x-1)^3\sqrt{3x-2}}$ **87.** $\dfrac{(2x^2+2x-1)\sqrt{x-1}}{(x+1)^{3/2}}$

89. $\beta = \dfrac{10}{\ln 10}(\ln I + 16\ln 10)$
60 decibelios

91. *a)*



c)



$\lim\limits_{p \to \infty} T'(p) = 0$

b) $p = 10$: 4,75 °F por libra por pulgada cuadrada
$p = 70$: 0,97 °F por libra por pulgada cuadrada

93. *a*) $h = 0$ no está en el dominio de la función.
b) $h = 0{,}86 - 6{,}45 \ln p$
c)

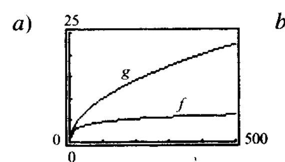


d) 2,7 km
e) 0,15 atmósferas
f) $h = 5$: $\dfrac{dp}{dh} = -0{,}085$
$h = 20$: $\dfrac{dp}{dh} = -0{,}009$

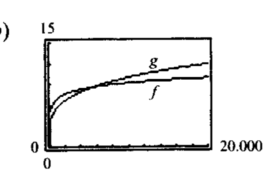
Al crecer la altura, la presión va disminuyendo a ritmo decreciente.

95. Para valores de x, g crece a un ritmo mayor que f en ambos casos. La función logaritmo natural crece muy despacio para valores muy grandes de x.

a)



b)



97. Falso: $\ln x + \ln 25 = \ln 25x$ **98.** Falso $y' = 0$

Sección 5.2 *(página 374)*

1. $\ln |x + 1| + C$ **3.** $-\frac{1}{2} \ln |3 - 2x| + C$

5. $\ln \sqrt{x^2 + 1} + C$ **7.** $\dfrac{x^2}{2} - 4 \ln |x| + C$

9. $\frac{1}{3} \ln |x^3 + 3x^2 + 9x| + C$ **11.** $\frac{1}{3} (\ln x)^3 + C$

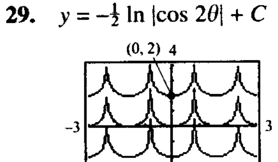
13. $2\sqrt{x + 1} + C$ **15.** $x + 6\sqrt{x} + 18 \ln |\sqrt{x} - 3| + C$

17. $2 \ln |x - 1| - \dfrac{2}{x - 1} + C$ **19.** $\ln |\operatorname{sen} \theta| + C$

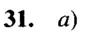
21. $-\frac{1}{2} \ln |\operatorname{cosec} 2x + \operatorname{ctg} 2x| + C$ **23.** $\ln |1 + \operatorname{sen} t| + C$

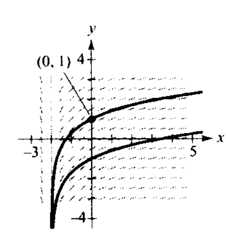
25. $\ln |\sec x - 1| + C$

27. $y = -3 \ln |2 - x| + C$ **29.** $y = -\frac{1}{2} \ln |\cos 2\theta| + C$

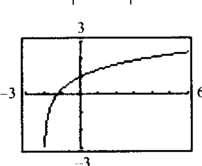


31. *a*)



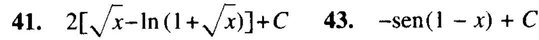


b) $y = \ln \left|\dfrac{x + 2}{2}\right| + 1$

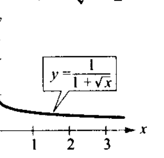


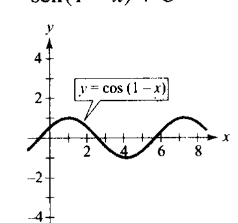
33. $\frac{5}{3} \ln 13 \approx 4{,}275$ **35.** $\frac{7}{3}$ **37.** $-\ln 3$

39. $\ln \left|\dfrac{2 - \operatorname{sen} 2}{1 - \operatorname{sen} 1}\right| \approx 1{,}929$

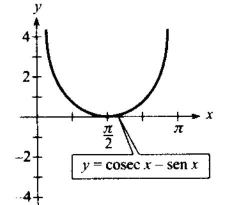


41. $2[\sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x})] + C$ **43.** $-\operatorname{sen}(1 - x) + C$



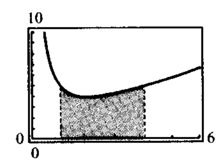


45. $\ln(\sqrt{2} + 1) - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}174$

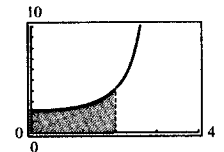


51. $\dfrac{1}{x}$ **53.** 0 **55.** d

57. $\frac{15}{2} + 8 \ln 2 \approx 13{,}045$



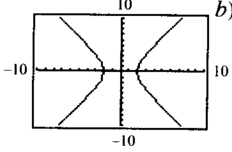
59. $\dfrac{12}{\pi} [2 \ln(\sqrt{3} + 1) - \ln 2] \approx 5{,}03$



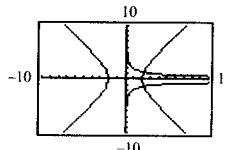
61. $P(t) = 1.000(12 \ln |1 + 0{,}25t| + 1)$
$P(3) \approx 7.715$

63. \$168,27

65. *a)*



b) $y^2 = e^{-\ln x + \ln 4} = \dfrac{4}{x}$



67. Falso: $\dfrac{1}{2}(\ln x) = \ln x^{1/2}$

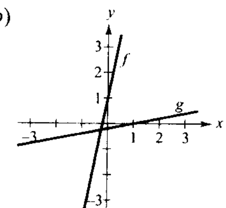
68. Falso: $\dfrac{d}{dx}[\ln x] = \dfrac{1}{x}$

69. Verdadero

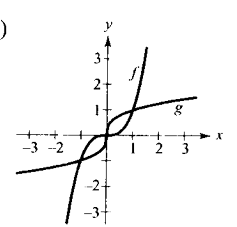
70. Falso: el integrando, $1/x$ tiene una discontinuidad no evitable en el intervalo $[-1, 2]$.

Sección 5.3 *(página 383)*

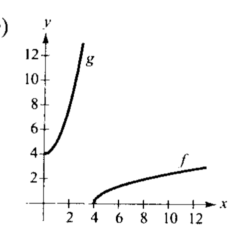
1. *b)*



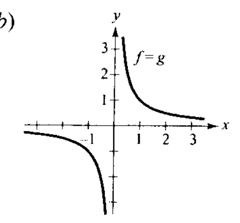
3. *b)*



5. *b)*

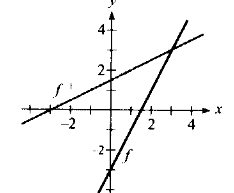


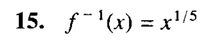
7. *b)*



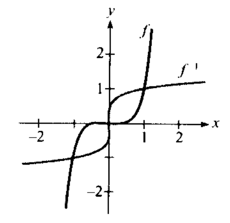
9. c **10.** b **11.** a **12.** d

13. $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$

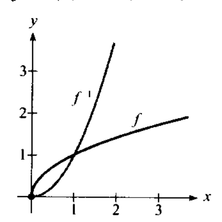




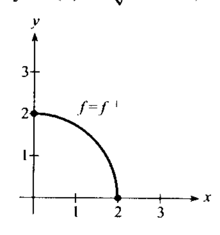
15. $f^{-1}(x) = x^{1/5}$



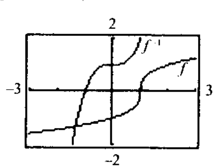
17. $f^{-1}(x) = x^2, \quad x \geqslant 0$



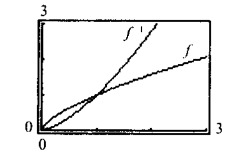
19. $f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$



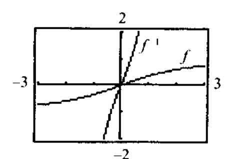
21. $f^{-1}(x) = x^3 + 1$



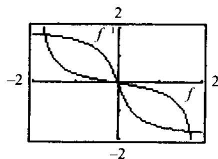
23. $f^{-1}(x) = x^{3/2}, \quad x \geqslant 0$



25. $f^{-1}(x) = \dfrac{\sqrt{7}x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1$



27. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{1 + 16x^2}}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$



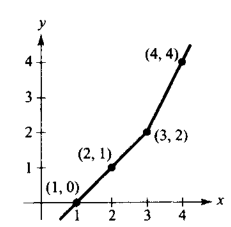
La gráfica de f^{-1} es la reflejada de la gráfica de f en la recta $y = x$

29. f es inyectiva y admite función inversa

31. g no es inyectiva, luego no admite función inversa

33.

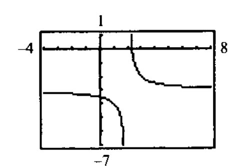
x	1	2	3	4
$f^{-1}(x)$	0	1	2	4

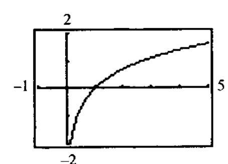


35. *b*) $y = \frac{20}{7}(80 - x)$
x: coste total
y: número de libras del más barato
c) [62,5, 80]
d) 20 libras

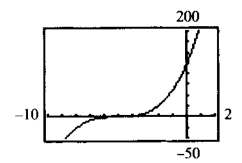
37. Existe inversa **39.** No existe inversa

41. Inyectiva **43.** Inyectiva





45. Inyectiva



47. Existe inversa **49.** No existe inversa

51. Existe inversa **53.** $f'(x) = 2(x - 4) > 0$ en $(4, \infty)$

55. $f'(x) = -\dfrac{8}{x^3} < 0$ en $(0, \infty)$

57. $f'(x) = -\operatorname{sen} x < 0$ en $(0, \pi)$

59. No es continua en $\dfrac{(2n-1)\pi}{2}$

61. Inyectiva
$f^{-1}(x) = x^2 + 2, \quad x \geqslant 0$

63. Inyectiva
$f^{-1}(x) = 2 - x, \quad x \geqslant 0$

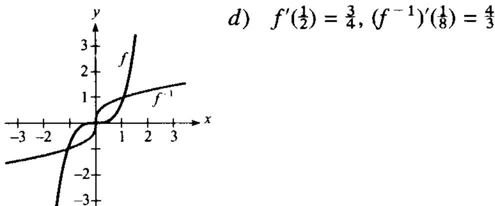
65. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 3, \quad x \geqslant 0$

67. $f^{-1}(x) = x - 3, \quad x \geqslant 0$ **69.** Existe inversa

71. No existe inversa **73.** $\dfrac{1}{5}$

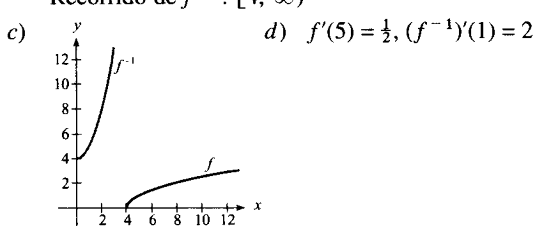
75. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **77.** $\frac{1}{13}$

79. *a*) Dominio de f: $(-\infty, \infty)$
Dominio de f^{-1}: $(-\infty, \infty)$
b) Recorrido de f: $(-\infty, \infty)$
Recorrido de f^{-1}: $(-\infty, \infty)$
c)



d) $f'(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$, $(f^{-1})'(\frac{1}{8}) = \frac{4}{3}$

81. *a*) Dominio de f: $[4, \infty)$
Dominio de f^{-1}: $[0, \infty)$
b) Recorrido de f: $[0, \infty)$
Recorrido de f^{-1}: $[4, \infty)$
c)



d) $f'(5) = \frac{1}{2}$, $(f^{-1})'(1) = 2$

83. $-\frac{1}{11}$

85. 32 **87.** 600 **89.** $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \dfrac{x+1}{2}$

91. $(f \circ g)^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$

97. Falso: tomar $f(x) = x^2$ **98.** Verdadero

99. Verdadero **100.** Falso: tomar $f(x) = \dfrac{1}{x}$

101. No, como demuestra $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 - x, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$

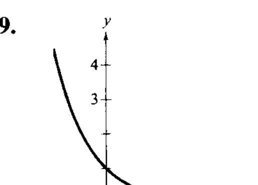
103. $\sqrt{17}$

Sección 5.4 *(página 392)*

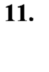
1. $\ln 1 = 0$ **3.** $e^{0,6931\ldots} = 2$ **5.** $x = 4$

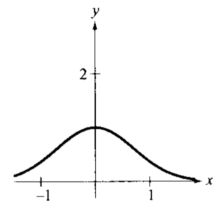
7. $x = e^2$

9.

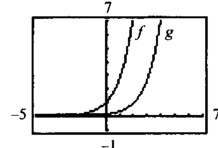


11.



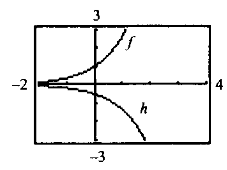


13. *a*)



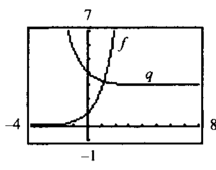
Traslación 2 unidades a la derecha

b)



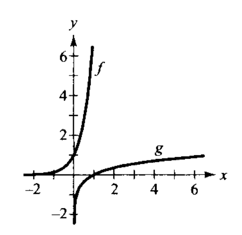
Reflexión en el eje x y contracción vertical


c)

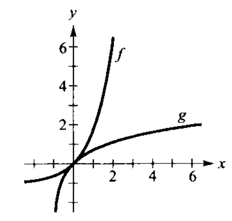


Reflexión en el eje y y traslación 3 unidades hacia arriba

15.

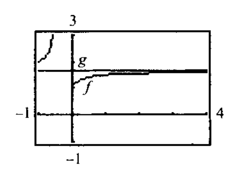


17.



19. c **20.** d **21.** a **22.** b

23.



$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = e^{0,5}$

25. $2{,}7182805 < e$ **27.** *a*) 3 *b*) −3

29. $2e^{2x}$ **31.** $2(x-1)e^{-2x+x^2}$

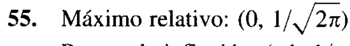
33. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ **35.** $3(e^{-t}+e^{t})^2(e^{t}-e^{-t})$ **37.** $2x$

39. $\dfrac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$ **41.** $\dfrac{-2(e^{x}-e^{-x})}{(e^{x}+e^{-x})^2}$ **43.** x^2e^x

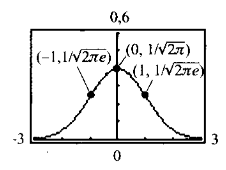
45. $e^{-x}\left(\dfrac{1}{x}-\ln x\right)$ **47.** $2e^x \cos x$ **49.** $\dfrac{10-e^y}{xe^y+3}$

51. $3(6x+5)e^{-3x}$

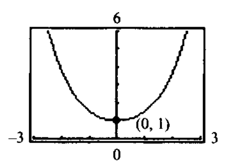
55. Máximo relativo: $(0, 1/\sqrt{2\pi})$



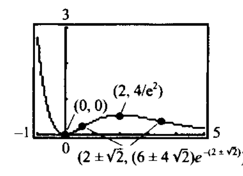
Puntos de inflexión: $(\pm 1, 1/\sqrt{2\pi e})$



57. Mínimo relativo: (0, 1)

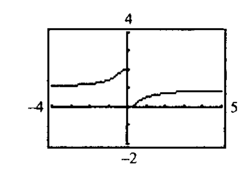


59. Mínimo relativo: (0, 0)
Máximo relativo: $(2, 4e^{-2})$
Puntos de inflexión: $(2 \pm \sqrt{2}, (6 \pm 4\sqrt{2})e^{-(2\pm\sqrt{2})})$



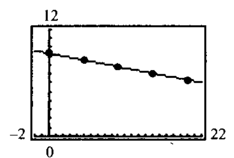
61. $A = \sqrt{2}e^{-1/2}$ **65.** 0,567

67. *a*)



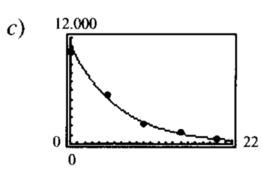
b) Cuando x crece sin tope, $1/x$ tiende a 0 y $e^{1/x}$ tiende a 1. Por tanto, f tiende a $\frac{2}{1+1}=1$. Así pues, $f(x)$ tiene como asíntota horizontal la recta $y = 1$. Cuando x tiende a 0 por la derecha, $1/x$ tiende a ∞ y $f(x)$ tiende a 0. Cuando x tiende a 0 por la izquierda, $1/x$ tiende a $-\infty$ y $f(x)$ tiende a 2. No existe el límite, ya que los límites laterales no son iguales. En consecuencia, $x = 0$ es una discontinuidad no evitable.

69. *a*) $\ln P = -0{,}1499h + 9{,}3018$



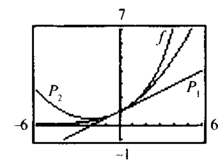
b) $P = 10.957{,}7e^{-0{,}1499h}$

c)



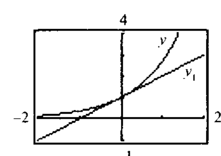
d) $h = 5$: −776
$h = 18$: −111


71.

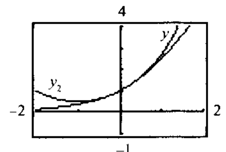


Los valores de f, P_1 y P_2, y los de sus primeras derivadas, coinciden en $x = 0$. Los valores de las segundas derivadas de f y P_2 también son iguales en $x = 0$

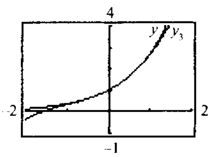
73. *a)*



b)



c)



75. $e^{5x} + C$ **77.** $\dfrac{e^2 - 1}{2e^2}$

79. $x - \ln(e^x + 1) + C_1$ o $-\ln(1 + e^{-x}) + C_2$

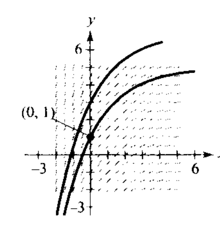
81. $\dfrac{e}{3}(e^2 - 1)$ **83.** $-\dfrac{2}{3}(1 - e^x)^{3/2} + C$

85. $\ln|e^x - e^{-x}| + C$ **87.** $-\frac{5}{2}e^{-2x} + e^{-x} + C$

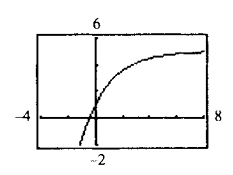
89. $\dfrac{1}{\pi}e^{\operatorname{sen}\pi x} + C$ **91.** $\ln|\cos e^{-x}| + C$

93. $\dfrac{1}{2a}e^{ax^2} + C$ **95.** $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

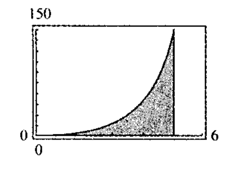
97. *a)*



b) $y = -4e^{-x/2} + 5$

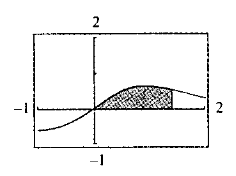


99. $e^5 - 1 \approx 147{,}413$



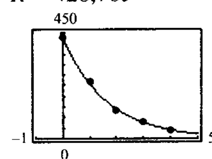
101. $1 - e^{-1} \approx 0{,}632$


105. 0,4772



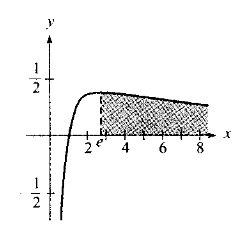
107. *a)* $R = 428{,}76e^{-0{,}6155t}$


b)



c) 637 litros

109. *a)*



Sección 5.5 *(página 403)*

---

1. -3 **3.** 0

5. *a)* $\log_2 8 = 3$ *b)* $\log_3(1/3) = -1$

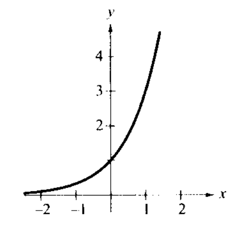
7. *a)* $10^{-2} = 0{,}01$ *b)* $(1/2)^{-3} = 8$

9. *a)* $x = 3$ *b)* $x = -1$

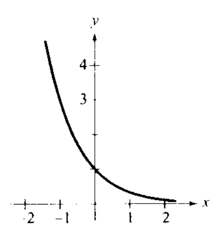
11. *a)* $x = \frac{1}{3}$ *b)* $x = \frac{1}{16}$

13. *a)* $x = -1{,}2$ *b)* $x = \frac{1}{3}$

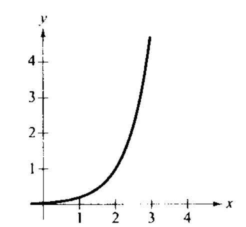
15.



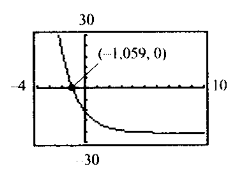
17.

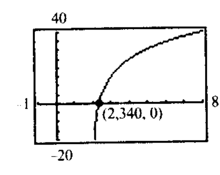


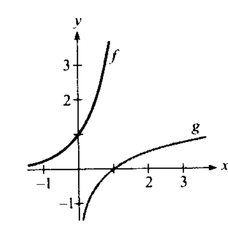

19.




21.



23. 

25. 

27. *a*) Falso
b) Verdadero: $y = \log_2 x$
c) Verdadero: $2^y = x$
d) Falso

29. $(\ln 4)4^x$

31. $(\ln 5)5^{x-2}$ **33.** $t2^t\,(t \ln 2 + 2)$

35. $-2^{-\theta}[(\ln 2) \cos \pi\theta + \pi \operatorname{sen} \pi\theta]$

37. $\dfrac{1}{x(\ln 3)}$ **39.** $\dfrac{x-2}{(\ln 2)x(x-1)}$ **41.** $\dfrac{x}{(\ln 5)(x^2-1)}$

43. $\dfrac{5}{(\ln x)t^2}(1 - \ln t)$ **45.** $2(1 - \ln x)x^{(2/x)-2}$

47. $(x-2)^{x+1}\left[\dfrac{x+1}{x-2} + \ln(x-2)\right]$

49. $g(x) = x^x$, $k(x) = 2^x$, $h(x) = x^2$, $f(x) = \log_2 x$

51. *a*) \$40,64 *b*) $C'(1) \approx 0{,}051P$, $C'(8) \approx 0{,}072P$
c) ln 1,05

53.

n	1	2	4	12	365	Continuo
A	\$1.410,60	\$1.414,78	\$1.416,91	\$1.418,34	\$1.419,04	\$1.419,07

55.

n	1	2	4	12	365	Continuo
A	\$4.321,94	\$4.399,79	\$4.440,21	\$4.467,74	\$4.481,23	\$4.481,69

57.

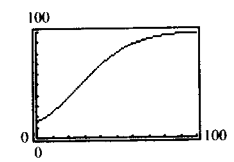
t	1	10	20	30	40	50
P	\$95.122,94	\$60.653,07	\$36.787,94	\$22.313,02	\$13.533,53	\$8.208,50

59.

t	1	10	20	30	40	50
P	\$95.132,82	\$60.716,10	\$36.864,45	\$22.382,66	\$13.589,88	\$8.251,24

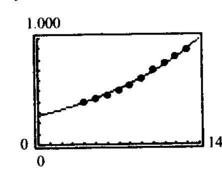
61. c

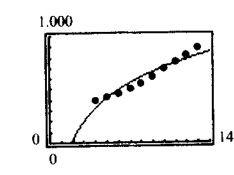
63. *a*) 6,7 millones de pies cúbicos por acre
b) $t = 20$: $\dfrac{dv}{dt} = 0{,}073$
$t = 60$: $\dfrac{dv}{dt} = 0{,}040$

65. *a*) 

b) 16,7 % *c*) $x \approx 38{,}8$
d) $x \approx 2{,}78$

67. *a*) $y = 271{,}92e^{0{,}0919x}$ *b*) $y = -254{,}08 + 418{,}41 \ln x$

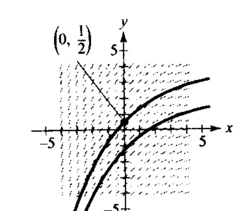


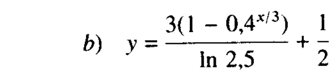


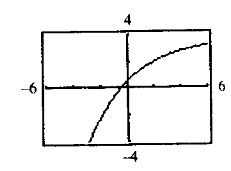
c) Exponencial
d) Exponencial: $\dfrac{dy}{dx} = 157{,}0$
Logarítmica: $\dfrac{dy}{dx} = 20{,}9$
Logarítmica

69. $\dfrac{3^x}{\ln 3} + C$ **71.** $\dfrac{7}{\ln 4}$ **73.** $-\dfrac{1}{2 \ln 5}(5^{-x^2}) + C$

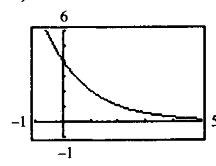
75. $\dfrac{\ln(3^{2x}+1)}{2 \ln 3} + C$

77. *a*) 

b)  $y = \dfrac{3(1 - 0{,}4^{x/3})}{\ln 2{,}5} + \dfrac{1}{2}$



79. *a)* 5,67
b)



c) $f(t) = g(t) = h(t)$. No. Las integrales definidas de dos funciones distintas sobre un intervalo pueden ser iguales.

81. \$15.039,61 **83.** $y = 1.200(0{,}6^t)$

85. Falso: e es un número irracional. **86.** Verdadero

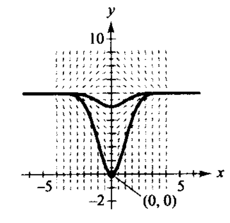
87. Verdadero **88.** Verdadero **89.** Verdadero.

90. Verdadero

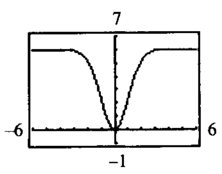
Sección 5.6 *(página 413)*

1. $y^2 - 5x^2 = C$ **3.** $y = Ce^{(2x^{3/2})/3}$ **5.** $y = C(1 + x^2)$

7. *a)*



b) $y = 6 - 6e^{-x^2/2}$



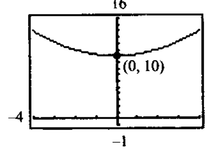
9. $\frac{dQ}{dt} = \frac{k}{t^2}$

$Q = -\frac{k}{t} + C$

11. $\frac{dN}{ds} = k(250 - s)$

$N = -\frac{k}{2}(250 - s)^2 + C$

13. $y = \frac{1}{4}t^2 + 10$



15. $y = 10e{-}t/2$

16
(0, 10)
−1
10
−1

17. $y = \frac{1}{2}e^{0{,}4605t}$ **19.** $y = 0{,}6687e^{0{,}4024t}$

21. Cantidad después de 1.000 años: 6,52 gramos
Cantidad después de 10.000 años: 0,14 gramos

23. Cantidad inicial: 6,70 gramos
Cantidad después de 1.000 años: 5,94 gramos

25. Cantidad inicial: 2,16 gramos **27.** 95,81 %
Cantidad después de 10.000 años: 1,63 gramos

29. Tiempo de duplicación: 11,55 años
Cantidad después de 10 años: \$1.822,12

31. Tasa anual: 8,94 %
Cantidad después de 10 años: \$1.833,67

33. Tasa anual: 9,50 % **35.** \$112.087,09
Tiempo de duplicación: 7,30 años

37. *a)* 10,24 años
b) 9,93 años
c) 9,90 años
d) 9,90 años

39. $y \approx 4{,}22e^{0{,}0430t}$
9,97 millones

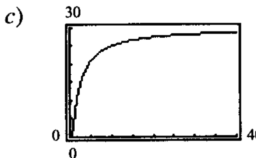
41. $y \approx 3e^{-0{,}0091t}$
2,50 millones

43. *a)* k es el porcentaje de ritmo de cambio anual continuo de y.
b) Cuando $k > 0$, la población crece, y cuando $k < 0$, decrece.

45. 527,08 mm de mercurio

47. *a)* $N \approx 30(1 - e^{-0{,}0502t})$ *b)* 36 días

49. *a)* $S \approx 30e^{-1{,}7918/t}$
b) 20.965 unidades
c)



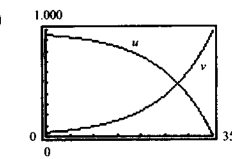
51. 2.014 ($t = 16$)

53. *a)* 20 decibelios *b)* 70 decibelios
c) 95 decibelios *d)* 120 decibelios

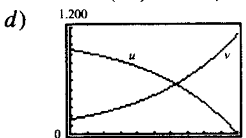
55. *a)* $10^{8,3} \approx 199.526.231{,}5$ *b)* 10^R *c)* $\frac{1}{I \ln 10}$

57. 22,35 °F

59. *a)*



b) Interés; $t \approx 28$ años
c) Las pendientes de las rectas tangentes a las dos curvas son iguales en magnitud y de signos opuestos. $u'(15) = -14{,}06$, $v'(15) = 14{,}06$.
d)



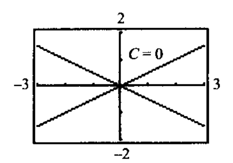
Sección 5.7 *(página 426)*

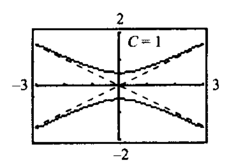
7. No es solución **9.** Solución **11** Solución

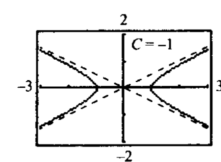
13. No es solución **15.** Solución

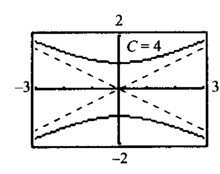
17. No es solución **19.** $k = 0{,}07$ **21.** $4y^2 = x^3$

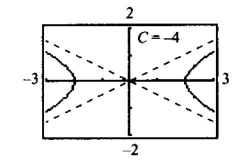
23. 











25. $y = 3e^{-2x}$ **27.** $y = 2 \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{3}\cos 3x$

29. $y = -2x + \frac{1}{2}x^3$ **31.** $y = x^3 + C$

33. $y = x - \ln x^2 + C$ **35.** $y = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

37. $y = \frac{2}{5}(x-3)^{5/2} + 2(x-3)^{3/2} + C$ **39.** $y^2 - x^2 = C$

41. $r = Ce^{0{,}05s}$ **43.** $y = C(x+2)^3$

45. $y^2 = C - 2\cos x$

47. $y = Ce^{(\ln x^2)/2}$ **49.** $y^2 = 2e^x + 14$

51. $y = e^{-(x^2+2x)/2}$ **53.** $y^2 = 4x^2 + 3$

55. $u = e^{(1-\cos v^2)/2}$ **57.** $P = P_0 e^{kt}$

59. $9x^2 + 16y^2 = 25$ **61.** $f(x) = Ce^{-x/2}$

63. Homogénea de grado 3 **65.** No homogénea

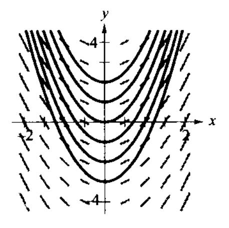
67. Homogénea de grado 0 **69.** $x = C(x - y)^2$

71. $y^2 + 2xy - x^2 = C$

73. $y = Ce^{-x^2/2y^2}$ **75.** $e^{y/x} = 1 + \ln x^2$

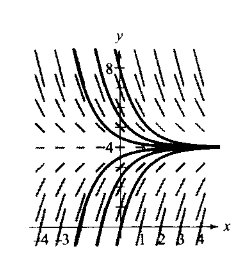
77. $x = e^{\operatorname{sen}(y/x)}$

79.



$y = \frac{1}{2}x^2 + C$

81.



$y = 4 + Ce^{-x}$

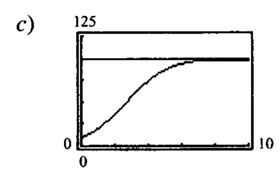
83. *a)* $\frac{dy}{dx} = k(y - 4)$ *b)* a

85. *a)* $\frac{dy}{dx} = ky(y - 4)$ *b)* c

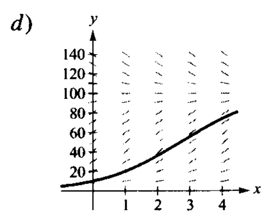
87. *a)* $\frac{dS}{dt} = kS(L - S)$ *b)* $t = 2{,}7$ meses

$$S = \frac{100}{1 + 9e^{-0{,}8109t}}$$

c)



d)

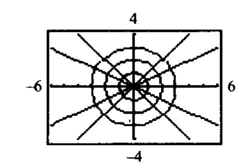


e) Las ventas decrecerán hacia la recta $S = L$.

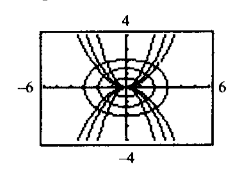
89. 98,9 por 100 de la cantidad inicial

91. *a)* $\frac{dv}{dt} = k(W - v)$ *b)* $s = 20t + 69{,}5(e^{-0{,}2877t} - 1)$
$v = 20(1 - e^{-0{,}2877t})$

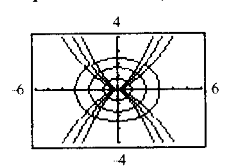
93. Círculos: $x^2 + y^2 = C$
Rectas: $y = Kx$



95. Parábolas: $x^2 = Cy$
Elipses: $x^2 + 2y^2 = K$



97. Curvas: $y^2 = Cx^3$
Elipses: $2x^2 + 3y^2 = K$



99. Falso: $y = x^3$ es solución de $xy' - 3y = 0$, pero $y = x^3 + 1$ no es solución.

100. Verdadero **101.** Falso: $f(tx, ty) \neq t^n f(x, y)$

102. Verdadero

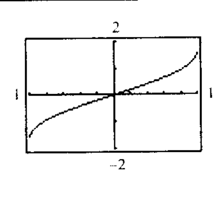
Sección 5.8 *(página 436)*

1.

x	-1	$-0{,}8$	$-0{,}6$	$-0{,}4$	$-0{,}2$	0
y	$-1{,}57$	$-0{,}93$	$-0{,}64$	$-0{,}41$	$-0{,}20$	0

x	$0{,}2$	$0{,}4$	$0{,}6$	$0{,}8$	1
y	$0{,}20$	$0{,}41$	$0{,}64$	$0{,}93$	$1{,}57$

b) *c)*



d) Intersección: (0, 0)
Simetría respecto del origen.

3. Falso: el recorrido de $y = \arccos x$ es $[0, \pi]$ **5.** $\frac{\pi}{6}$

7. $\frac{\pi}{3}$ **9.** $\frac{\pi}{6}$ **11.** $-\frac{\pi}{4}$ **13.** 2,50

15. $\arccos\left(\frac{1}{1{,}269}\right) \approx 0{,}66$

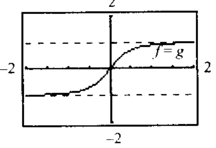
17. El recorrido de $y = \text{arctg}\, x$ es $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

19. *a)* $\frac{3}{5}$ *b)* $\frac{5}{3}$ **21.** *a)* $-\sqrt{3}$ *b)* $-\frac{13}{5}$

23. $\sqrt{1 - 4x^2}$ **25.** $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{|x|}$ **27.** $\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3}$

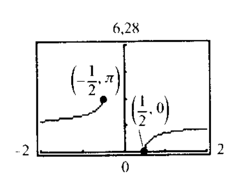
29. $\frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x}$

31.



g es la forma algebraica de f
Asíntotas horizontales: $y = -1$, $y = 1$

35. **37.**



39. $x = \frac{1}{3}[\text{sen}(\frac{1}{2}) + \pi] \approx 1{,}207$ **41.** $x = \frac{1}{3}$

43. $\frac{2}{\sqrt{2x - x^2}}$ **45.** $-\frac{3}{\sqrt{4 - x^2}}$ **47.** $\frac{a}{a^2 + x^2}$

49. $\frac{3x - \sqrt{1 - 9x^2}\,\text{arcsen}\, 3x}{x^2\sqrt{1 - 9x^2}}$ **51.** $-\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}$

53. $\frac{1}{1 - x^4}$ **55.** $\text{arcsen}\, x$

57.

59. Máximo relativo: (1,272, −0,606)
Mínimo relativo: (−1,272, 3,747)

61. *a)* $h(t) = -16t^2 + 256$
$t = 4$ segundos
b) $t = 1$: −0,0520 radianes/s
$t = 2$: −0,1116 radianes/s

65. $k \leqslant -1$ o $k \geqslant 1$ **67.** Verdadero

68. Falso: el recorrido es $[-\pi/2, \pi/2]$ **69.** Verdadero

70. Falso: $\text{arcsen}^2\, 0 + \arccos^2 0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \neq 1$

Sección 5.9 *(página 444)*

1. $\frac{\pi}{18}$ **3.** $\frac{\pi}{6}$ **5.** $\text{arcsec}\, |2x| + C$

7. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$ **9.** $\text{arcsen}\,(x + 1) + C$

11. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} t^2 + C$ **13.** $\frac{\pi^2}{32} \approx 0{,}308$

15. $\frac{\sqrt{3}-2}{2} \approx -0{,}134$ **17.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{e^{2x}}{2} + C$ **19.** $\frac{\pi}{4}$

21. $\frac{\pi}{2}$ **23.** $\ln|x^2 + 6x + 13| - 3\operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{2}\right) + C$

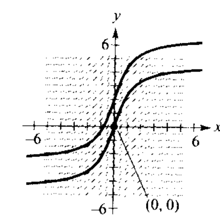
25. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{x+2}{2}\right) + C$ **27.** $-\sqrt{-x^2 - 4x} + C$

29. $4 - 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \approx 1{,}059$ **31.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2+1) + C$

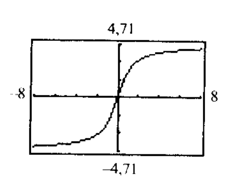
33. a y b **35.** a, b y c

37. $2\sqrt{e^t - 3} - 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{e^t-3}}{\sqrt{3}}\right) + C$

39. *a)*



b) $y = 3\operatorname{arctg} x$



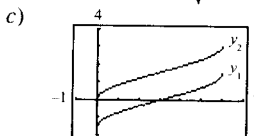
41. $\frac{\pi}{8}$ **43.** c

45. *b)* 3,1415918 *c)* 3,1415927

47. *a)* $y_1 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x-3}{3}\right) + C$

b) $y_2 = 2\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{x}{6}} + C$

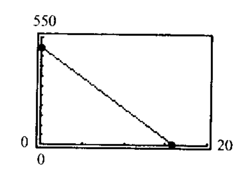
c)



$$2\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{x}{6}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x-3}{3}\right) + \frac{\pi}{2}$$

Dominio: $0 \leqslant x \leqslant 6$

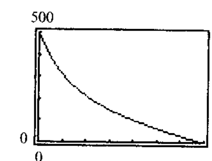
49. *a)* $v(t) = -32t + 500$



b) $s(t) = -16t^2 + 500t$, 3.906,25 pies

c) $v(t) = \sqrt{\frac{32}{k}}\operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}\left(500\sqrt{\frac{k}{32}}\right) - \sqrt{32k}t\right]$

d)



6,86 segundos

e) 1.088 pies

f) Cuando se tiene en cuenta la resistencia del aire, el resultado para la altura máxima alcanzada por el objeto es menor.

Sección 5.10 *(página 454)*

1. *a)* 10,018 *b)* −0,964 **3.** *a)* $\frac{4}{3}$ *b)* $\frac{13}{12}$

5. *a)* 1,317 *b)* 0,962

7. $\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 + \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2 = 1$

9. $\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) =$

$= \frac{e^{(x+y)} - e^{-(x+y)}}{2} = \operatorname{sh}(x+y)$

11. $\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left[3 + 4\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2\right] =$

$= \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2} = \operatorname{sh}(3x)$

13. $\operatorname{ch} x = \frac{\sqrt{13}}{2}$ **15.** $-2x\operatorname{ch}(1 - x^2)$ **17.** $\coth x$

$\operatorname{th} x = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\operatorname{csch} x = \frac{2}{3}$

$\operatorname{sech} x = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

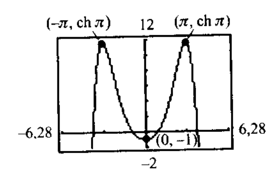
$\coth x = \frac{\sqrt{13}}{3}$

19. $\operatorname{cosech} x$ **21.** $\operatorname{sh}^2 x$ **23.** $\operatorname{sech} t$

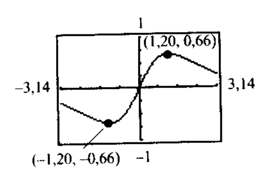
25. $\frac{y}{x}[\operatorname{ch} x + x(\operatorname{sh} x)\ln x] = \frac{x^{\operatorname{ch} x}}{x}[\operatorname{ch} x + x(\operatorname{sh} x)\ln x]$

27. $-2(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^2 = -2e^{-2x}$

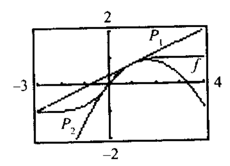
29. Máximo relativo: $(\pm\pi, \text{ch } \pi)$
Mínimo relativo: $(0, -1)$



31. Máximo relativo: (1,20, 0,66)
Mínimo relativo: (−1,20, −0,66)



35. $P_1(x) = 0{,}76 + 0{,}42(x - 1)$
$P_2(x) = 0{,}76 + 0{,}42\,(x - 1) - 0{,}32(x - 1)^2$



37. $-\frac{1}{2}\text{ ch }(1 - 2x) + C$ **39.** $\frac{1}{3}\text{ ch}^3(x - 1) + C$

41. $\ln|\text{sh } x| + C$ **43.** $-\text{coth } \dfrac{x^2}{2} + C$

45. $\text{csch } \dfrac{1}{x} + C$ **47.** $\dfrac{1}{5}\ln 3$ **49.** $\dfrac{\pi}{4}$

51. $\frac{1}{2}\text{ arctg } x^2 + C$ **53.** $\dfrac{3}{\sqrt{9x^2 - 1}}$

55. $|\sec x|$ **57.** $2\sec 2x$ **59.** $2\text{ sh}^{-1}(2x)$

61. $-\dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$

63. $-\text{csch}^{-1}(e^x) + C = -\ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 + e^{2x}}}{e^x}\right) + C$

65. $2\text{ sh}^{-1}\sqrt{x} + C = 2\ln(\sqrt{x} + \sqrt{1 + x}) + C$

67. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-4}{x}\right| + C$ **69.** $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}(x+1)+\sqrt{3}}{\sqrt{2}(x+1)-\sqrt{3}}\right| + C$

71. $\dfrac{1}{4}\text{ arcsen}\left(\dfrac{4x - 1}{9}\right) + C$

73. $-\dfrac{x^2}{2} - 4x - \dfrac{10}{3}\ln\left|\dfrac{x - 5}{x + 1}\right| + C$

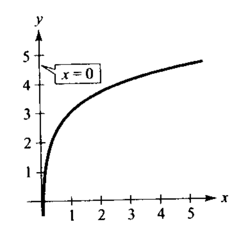
75. $8\text{ arctg }(e^2) - 2\pi \approx 5{,}207$

77. $\frac{5}{2}\ln(\sqrt{17} + 4) \approx 5{,}237$ **79.** $\frac{52}{31}$ kilogramos

81. Si k crece, el tiempo de descenso crece.

Ejercicios de repaso del Capítulo 5 *(página 456)*

1. Asíntota vertical: $x = 0$



3. $\frac{1}{5}[\ln(2x + 1) + \ln(2x - 1) - \ln(4x^2 + 1)]$

5. $\ln\left(\dfrac{3\sqrt[3]{4 - x^2}}{x}\right)$

7. Falso: el dominio de $f(x) = \ln x$ es el conjunto de todos los números reales *positivos*.

8. Falso: $\ln x + \ln y = \ln xy$ **9.** $e^4 - 1 \approx 53{,}598$

11. $\dfrac{1}{2x}$ **13.** $\dfrac{1 + 2\ln x}{2\sqrt{\ln x}}$ **15.** $\dfrac{x}{(a + bx)^2}$

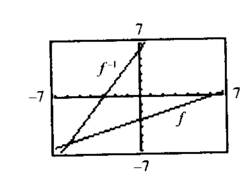
17. $\dfrac{1}{x(a + bx)}$ **19.** $\dfrac{1}{7}\ln|7x - 2| + C$

21. $-\ln|1 + \cos x| + C$ **23.** $3 + \ln 4$

25. $\ln(2 + \sqrt{3})$

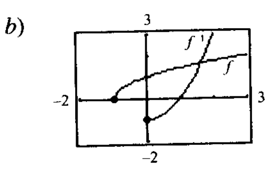
27. *a)* $f^{-1}(x) = 2x + 6$

b)



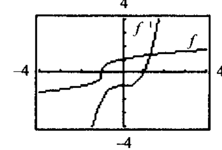
29. *a)* $f^{-1}(x) = x^2 - 1, \quad x \geq 0$

b)



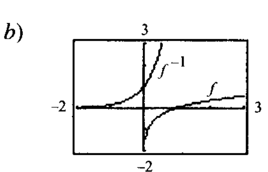
31. *a)* $f^{-1}(x) = x^3 - 1$

b)

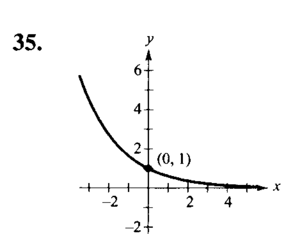


33. *a)* $f^{-1}(x) = e^{2x}$

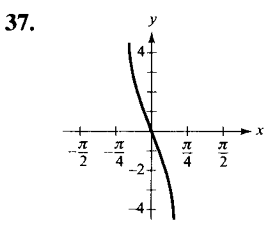
b)



35.



37.



39. *a)* $\frac{1}{2}$ *b)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **41.** $-2x$ **43.** $te^t(t + 2)$

45. $\dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}}$ **47.** $3^{x-1} \ln 3$ **49.** $\dfrac{x(2 - x)}{e^x}$

51. $(1 - x^2)^{-3/2}$ **53.** $\dfrac{x}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} + \operatorname{arcsec} x$

55. $(\operatorname{arcsen} x)^2$ **57.** $2 - \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ **59.** $\dfrac{-y}{x(2y + \ln x)}$

61. *a)* ax^{a-1} *b)* $(\ln a)a^x$ *c)* $x^x(1 + \ln x)$ *d)* 0

63. 6,9 % **65.** $-\frac{1}{6}e^{-3x^2} + C$ **67.** $\dfrac{e^{4x} - 3e^{2x} - 3}{3e^x} + C$

69. $\ln|e^x - 1| + C$ **71.** $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(e^{2x}) + C$

73. $\frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x^2 + C$ **75.** $\frac{1}{2} \ln(16 + x^2) + C$

77. $\dfrac{1}{4}\left(\operatorname{arctg} \dfrac{x}{2}\right)^2 + C$ **79.** $\dfrac{1}{2} \ln(\sqrt{x^4 - 1} + x^2) + C$

81. $-\dfrac{1}{2}(e^{-16} - 1) \approx 0{,}500$ **83.** $y = \dfrac{x^2}{2} + 3 \ln|x| + C$

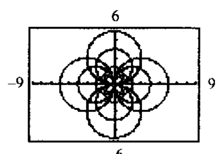
85. $y = Ce^{x^2}$ **87.** $\dfrac{x}{x^2 - y^2} = C$

89. *a)*

b) Máximo: $y = 0$
Mínimo: $y = \pm 1$

c) $y = \operatorname{sen}(x + C), -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x + C \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

91. Familia de círculos: $x^2 + (y - K)^2 = K^2$



93. *a)* 0,60 *b)* 0,85 **95.** $y = A \operatorname{sen}\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\, t\right)$

97. *a)* $y = 28e^{0,6 - 0,012s}$, $s > 50$

b)

Velocidad, *s*	50	55	60	65	70
Millas por galón, *y*	28	26,4	24,8	23,4	22,0

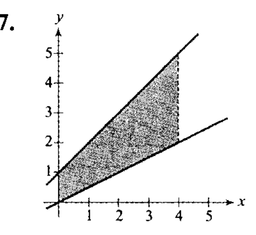
CAPÍTULO 6

Sección 6.1 *(página 469)*

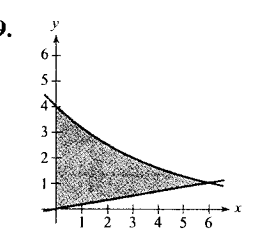
1. $-\displaystyle\int_0^6 (x^2 - 6x)\, dx$ **3.** $\displaystyle\int_0^3 (-2x^2 + 6x)\, dx$

5. $-6 \displaystyle\int_0^1 (x^3 - x)\, dx$

7.

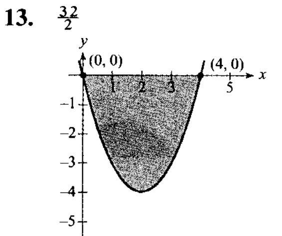


9.

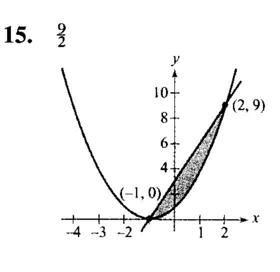


11. d

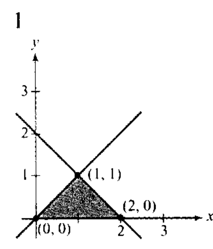
13. $\frac{32}{3}$



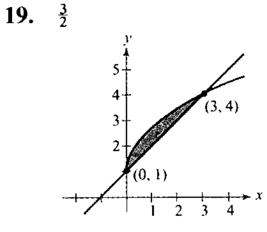
15. $\frac{9}{2}$



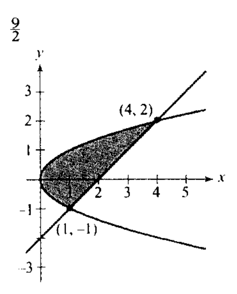
17. 1



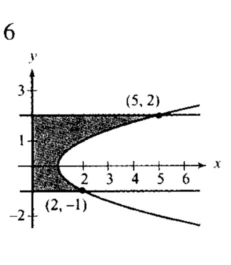
19. $\frac{3}{2}$



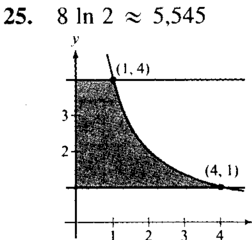
21. $\frac{9}{2}$



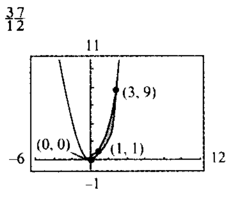
23. 6



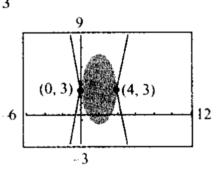
25. $8 \ln 2 \approx 5{,}545$



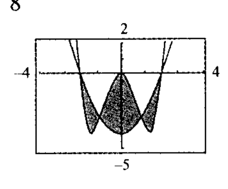
27. $\frac{37}{12}$



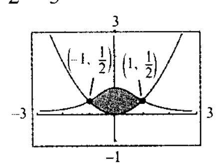
29. $\frac{64}{3}$



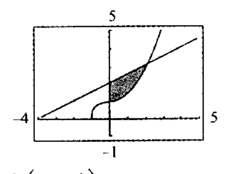
31. 8



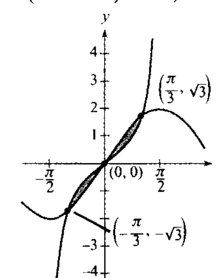
33. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \approx 1{,}237$



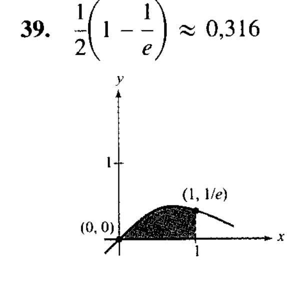
35. $\approx 1{,}759$



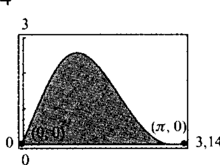
37. $2(1 - \ln 2) \approx 0{,}614$



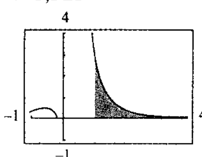
39. $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 0{,}316$



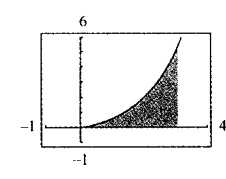
41. 4

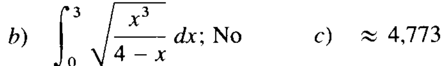


43. $\approx 1{,}323$



45. *a)*





b) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{\frac{x^3}{4-x}}\, dx$; No *c)* $\approx 4{,}773$

47. $\frac{1}{2}\, ac$

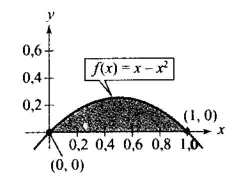
49. $\displaystyle\int_{-2}^{1} [x^3 - (3x - 2)]\, dx = \frac{27}{4}$

51. $x^4 - 2x^2 + 1 \leqslant 1 - x^2$ en $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} [(1 - x^2) - (x^4 - 2x^2 + 1)]\, dx = \frac{4}{15}$$

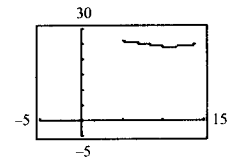
53. $b = 9\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) \approx 3{,}330$

55. $\frac{1}{6}$



57. \$1,625 miles de millones

59. *a)*



b) 3,16 miles de millones de libras

61. \$193.183

63. $\frac{16}{3}(4\sqrt{2} - 5) \approx 3{,}5$

65. *a)* 6,031 m^2
b) 12,062 m^3
c) 60.310 libras

67. Exceso de consumo = 1.600
Exceso de producción = 400

69. Verdadero

70. Verdadero

Sección 6.2 *(página 479)*

1. $\pi\displaystyle\int_0^1 (-x + 1)^2\, dx = \frac{\pi}{3}$

3. $\pi\displaystyle\int_1^4 (\sqrt{x})^2\, dx = \frac{15\pi}{2}$

5. $\pi\int_0^1 [(x^2)^2 - (x^3)^2]\, dx = \frac{2\pi}{35}$

7. $\pi\int_0^4 (\sqrt{y})^2\, dy = 8\pi$

9. $\pi\int_0^1 (y^{3/2})^2\, dy = \frac{\pi}{4}$

11. *a)* 8π *b)* $\frac{128\pi}{5}$ *c)* $\frac{256\pi}{15}$ *d)* $\frac{192\pi}{5}$

13. *a)* $\frac{32\pi}{3}$ *b)* $\frac{64\pi}{3}$ **15.** 18π

17. $\pi(8 \ln 4 - \frac{3}{4}) \approx 32{,}49$ **19.** $\frac{208\pi}{3}$ **21.** $\frac{384\pi}{5}$

23. $\pi \ln 4$ **25.** $\frac{3\pi}{4}$ **27.** $\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right) \approx 1{,}358$

29. 8π **31.** $\frac{\pi^2}{2} \approx 4{,}935$ **33.** 1,969

35. 49,022 **37.** a

39. *a)* $\frac{512\pi}{15}$
b) No, sólo se ha trasladado horizontalmente el sólido.

41. 18π

45. $\pi r^2 h\left(1 - \frac{h}{H} + \frac{h^2}{3H^2}\right)$ **47.** $\frac{\pi}{30}$

49. *a)* 60π
b) 50π

51. Un cuarto: 32,64 pies
Tres cuartos: 67,36 pies

53. *a)* ii: cilindro circular recto de radio r y altura h
b) iv; elipsoide asociado a la elipse de ecuación

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$

c) iii: esfera de radio r

d) i: cono circular recto de radio r y altura h

e) v: toro de radio mayor R y radio menor r

55. *a)* $\frac{128}{3}$ *b)* $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ *c)* $\frac{16\pi}{3}$ *d)* $\frac{32}{3}$

57. *a)* $\frac{1}{10}$ *b)* $\frac{\pi}{80}$ *c)* $\frac{\sqrt{3}}{40}$ *d)* $\frac{\pi}{20}$

59. $\frac{\pi d^3 \text{ sen } 70°}{8 \text{ sen } 20°}$

61. *a)* $\frac{2r^3}{3}$ *b)* $\frac{2r^3 \text{ tg } \theta}{3}$, $\lim_{\theta\to 90} V = \infty$

63. $5\sqrt{1 - 2^{-2/3}} \approx 3{,}0415$

Sección 6.3 *(página 489)*

1. $2\pi\int_0^2 x^2\, dx = \frac{16\pi}{3}$ **3.** $2\pi\int_0^4 x\sqrt{x}\, dx = \frac{128\pi}{5}$

5. $2\pi\int_0^2 x^3\, dx = 8\pi$ **7.** $2\pi\int_0^2 x(4x - 2x^2)\, dx = \frac{16\pi}{3}$

9. $2\pi\int_0^2 x(x^2 - 4x + 4)\, dx = \frac{8\pi}{3}$

11. $2\pi\int_0^1 x\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right) dx = \sqrt{2\pi}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \approx 0{,}986$

13. $2\pi\int_0^2 y(2 - y)\, dy = \frac{8\pi}{3}$

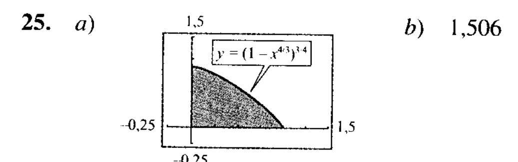
15. $2\pi\left[\int_0^{1/2} y\, dy + \int_{1/2}^1 y\left(\frac{1}{y} - 1\right) dy\right] = \frac{\pi}{2}$

17. 16π **19.** 64π

21. *a)* $\frac{128\pi}{7}$ *b)* $\frac{64\pi}{5}$ *c)* $\frac{96\pi}{5}$

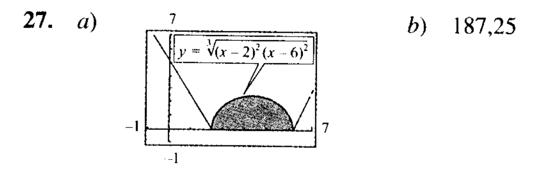
23. *a)* $\frac{\pi a^3}{15}$ *b)* $\frac{\pi a^3}{15}$ *c)* $\frac{4\pi a^3}{15}$

25. *a)*



b) 1,506

27. *a)*



b) 187,25

29. a, c, b **31.** d

33. Diámetro $= 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \approx 1{,}464$

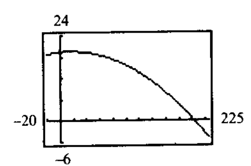
37. $2\pi^2 r^2 R$

39. Ambas integrales dan el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x - 1}$, $y = 0$ y $x = 5$, al girar en torno al eje x.

41. *a)* ii: cono circular recto de radio r y altura h
b) v: toro de radio mayor R y radio menor r
c) iii: esfera de radio r
d) i: cilindro circular recto de radio r y altura h
e) iv: elipsoide asociado a la elipse de ecuación

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$

43. *a)* 1.366.593 pies cúbicos
b) $d = -0{,}000561x^2 + 0{,}0189x + 19{,}39$



c) 1.343.345 pies cúbicos
d) 10.048.221 galones

Sección 6.4 *(página 500)*

1. 13 **3.** $\frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1) \approx 1{,}219$

5. $5\sqrt{5} - 2\sqrt{2} \approx 8{,}352$ **7.** $\frac{33}{16}$

9. *a)*

b) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$ *c)* $\approx 4{,}647$

11. *a)*

b) $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$ *c)* $\approx 2{,}147$

13. *a)*

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx$ *c)* $\approx 3{,}820$

15. *a)*

b) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1 + e^{-2y}}\, dy$ *c)* $\approx 2{,}221$

17. *a)*

b) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{2}{1 + x^2}\right)^2}\, dx$ *c)* $\approx 1{,}871$

19. b

21. *a)* 64,125 *b)* 64,525 *c)* 64,666 *d)* 64,672

23. *a)* *b)* y_1, y_2, y_3, y_4

c) $s_1 \approx 5{,}657$
$s_2 \approx 5{,}759$
$s_3 \approx 5{,}916$
$s_4 \approx 6{,}063$

25. $\frac{2}{3}$ **27.** $20[\text{sh } 1 - \text{sh}(-1)] \approx 47{,}0$ metros

29. $3 \text{ arcsen } \frac{2}{3} \approx 2{,}1892$

31. $\displaystyle 2\pi \int_0^3 \frac{1}{3} x^3 \sqrt{1 + x^4}\, dx = \frac{\pi}{9}(82\sqrt{82} - 1) \approx 258{,}85$

33. $\displaystyle 2\pi \int_1^2 \left(\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}\right)\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right) dx = \frac{47\pi}{16}$

35. $\displaystyle 2\pi \int_1^8 x\sqrt{1 + \frac{1}{9x^{4/3}}}\, dx =$
$\displaystyle = \frac{\pi}{27}(145\sqrt{145} - 10\sqrt{10}) \approx 199{,}48$

37. 14,424

41. $6\pi(3 - \sqrt{5}) \approx 14{,}40$

43. Área de la superficie: $= \pi/27$ pies cuadrados (unas 16,8 pulgadas cuadradas)

$$\text{Cantidad de vidrio} = \frac{\pi}{27}\left(\frac{0{,}015}{12}\right) \approx 0{,}00015 \text{ pies cúbicos} \approx 0{,}25 \text{ pulgadas cúbicas}$$

47. *a)* $\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$

b) $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$

$$(ds)^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right](dx)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

c) $s(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}\,dt$

$$s(2) = \frac{22}{27}\sqrt{22} - \frac{13}{27}\sqrt{13}$$

Sección 6.5 *(página 510)*

1. 1.000 libras-pies **3.** 448 newton-metros

5. c, d, a, b

7. 30,625 libras pulgadas $\approx$ 2,55 libras pies

9. 87,5 newton-metros

11. 180 libras-pulgadas = 15 libras-pies

13. 37,125 libras-pies

15. *a)* 761,905 millas-toneladas $\approx 8{,}05 \times 10^9$ libras-pies
b) 1.454,545 millas-toneladas $\approx 1{,}54 \times 10^{10}$ libras-pies

17. *a)* $2{,}93 \times 10^4$ millas-toneladas $\approx 3{,}10 \times 10^{11}$ libras-pies
b) $3{,}38 \times 10^4$ millas toneladas $\approx 3{,}57 \times 10^{11}$ libras-pies

19. *a)* 2.496 libras-pies *b)* 9.984 libras-pies

21. 48.000π kilogramos-metros

23. $2.995{,}2\pi$ libras-pies **25.** $20.217{,}6\pi$ libras-pies

27. 2.457π libras-pies **29.** 337,5 libras-pies

31. 300 libras-pies **33.** 168,75 libras-pies

35. 7.987,5 libras-pies

37. $2.000 \ln \dfrac{3}{2} \approx 810{,}93$ libras-pies **39.** $\dfrac{3k}{4}$

41. 3.249,4 libras-pies **43.** 10.330,3 libras-pies

Sección 6.6 *(página 522)*

1. $\bar{x} = -\frac{6}{7}$ **3.** $\bar{x} = 12$

5. *a)* $\bar{x} = 17$ *b)* $\bar{x} = -3$

7. $x = 6$ pies **9.** $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{10}{9}, -\frac{1}{9})$

11. $(\bar{x}, \bar{y}) = (-\frac{7}{8}, -\frac{7}{16})$

13. $M_x = 4\rho,\ M_y = \dfrac{64\rho}{5},\ (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{3}{4}\right)$

15. $M_x = \dfrac{\rho}{35},\ M_y = \dfrac{\rho}{20},\ (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{12}{35}\right)$

17. $M_x = \dfrac{99\rho}{5},\ M_y = \dfrac{27\rho}{4},\ (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{22}{5}\right)$

19. $M_x = \dfrac{192\rho}{7},\ M_y = 96\rho,\ (\bar{x}, \bar{y}) = \left(5, \dfrac{10}{7}\right)$

21. $M_x = 0,\ M_y = \dfrac{256\rho}{15},\ (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{8}{5}, 0\right)$

23. $M_x = \dfrac{27\rho}{4},\ M_y = -\dfrac{27\rho}{10},\ (\bar{x}, \bar{y}) = \left(-\dfrac{3}{5}, \dfrac{3}{2}\right)$

25. $A = \displaystyle\int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{1}{6}$

$$M_x = \int_0^1 \left(\frac{x + x^2}{2}\right)(x - x^2)\,dx = \frac{1}{15}$$

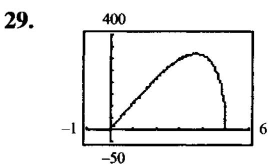
$$M_y = \int_0^1 x(x - x^2)\,dx = \frac{1}{12}$$

27. $A = \displaystyle\int_0^3 (2x + 4)\,dx = 21$

$$M_x = \int_0^3 \left(\frac{2x + 4}{2}\right)(2x + 4)\,dx = 78$$

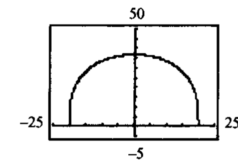
$$M_y = \int_0^3 x(2x + 4)\,dx = 36$$

29.



$(\bar{x}, \bar{y}) = (3{,}0,\ 126{,}0)$

31.



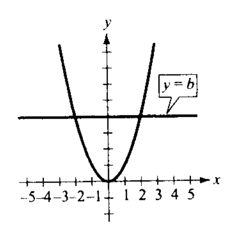
$(\bar{x}, \bar{y}) = (0,\ 16{,}2)$

33. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{b}{3}, \dfrac{c}{3}\right)$

35. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{(a + 2b)c}{3(a + b)}, \dfrac{a^2 + ab + b^2}{3(a + b)}\right)$

37. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \dfrac{4b}{3\pi}\right)$

39. *a)*



b) $\bar{x} = 0$ por simetría

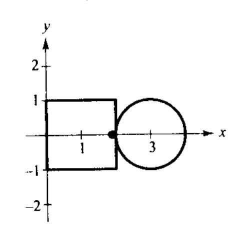
c) $M_y = \displaystyle\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} x(b - x^2)\, dx = 0$ porque $y = x$ e $y = x^3$ son funciones impares

d) $\bar{y} > \dfrac{b}{2}$ porque el área es mayor para $y > \dfrac{b}{2}$.

e) $\bar{y} = \dfrac{3}{5} b$

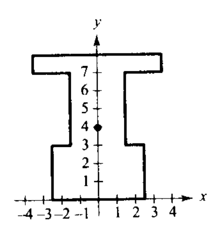
41. *a)* $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 12{,}98)$
b) $y = (-1{,}02 \times 10^{-5})x^4 - 0{,}0019x^2 + 29{,}28$
c) $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 12{,}85)$

43.



$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{4 + 3\pi}{4 + \pi}, 0\right)$

45.



$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \dfrac{135}{34}\right)$

47. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{2 + 3\pi}{2 + \pi}, 0\right)$ **49.** $160\pi^2 \approx 1.579{,}14$

51. $\dfrac{128\pi}{3} \approx 134{,}04$ **53.** $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \dfrac{2r}{\pi}\right)$

55. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{n + 1}{n + 2}, \dfrac{n + 1}{4n + 2}\right)$

Cuando $n \to \infty$, $(\bar{x}, \bar{y}) \to \left(1, \dfrac{1}{4}\right)$

Sección 6.7 *(página 531)*

1. 936 libras **3.** 748,8 libras

5. 1.123,2 libras **7.** 748,8 libras

9. 1.064,96 libras **11.** 12.000 kilogramos

13. 243.000 kilogramos **15.** 2.814 libras

17. 6.753,6 libras **19.** 94,5 libras

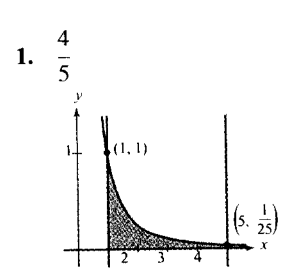
23. 960 libras

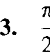
25. 3.010,8 libras **27.** 6.448,7 libras

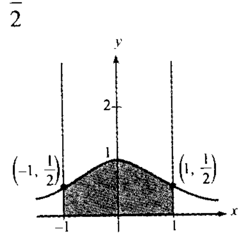
29. *a)* $\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2{,}12$ pies
b) La presión crece con la profundidad.

Ejercicios de repaso del Capítulo 6 *(página 533)*

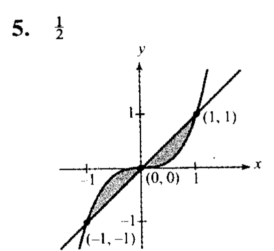
1. $\dfrac{4}{5}$



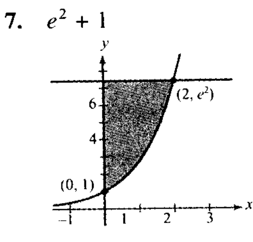
3.  $\dfrac{\pi}{2}$



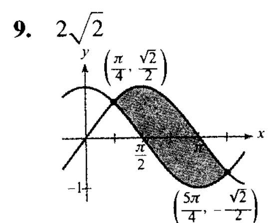
5. $\frac{1}{2}$



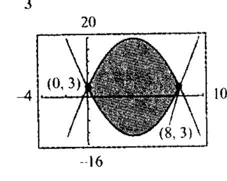
7.  $e^2 + 1$



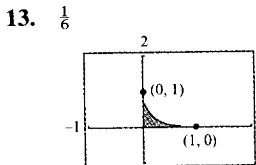
9. $2\sqrt{2}$



11. $\frac{512}{3}$



13. $\frac{1}{6}$



15. $\displaystyle\int_0^2 [0 - (y^2 - 2y)]\, dy = \int_{-1}^{0} 2\sqrt{x + 1}\, dx = \frac{4}{3}$

17. $\int_0^2 \left[1 - \left(1 - \frac{x}{2}\right)\right] dx + \int_2^3 [1 - (x - 2)]\, dx =$

$= \int_0^1 [(y + 2) - (2 - 2y)]\, dy = \frac{3}{2}$

19. El primer trabajo. El salario en él es mayor que en el segundo trabajo todos los años excepto el primero y el décimo año.

21. *a)* $\frac{64\pi}{3}$ *b)* $\frac{128\pi}{3}$ *c)* $\frac{64\pi}{3}$ *d)* $\frac{160\pi}{3}$

23. *a)* 64π *b)* 48π **25.** $\frac{\pi^2}{4}$

27. $\frac{4\pi}{3}(20 - 9 \ln 3) \approx 42{,}359$ **29.** $\frac{4}{15}$

31. 1,958 pies **33.** $\frac{8}{15}(1 + 6\sqrt{3}) \approx 6{,}076$

35. 4.018,2 pies **37.** 15π

39. 50 libras-pulgada $\approx$ 4,167 libras-pies

41. 104.000π libras-pulgadas $\approx$ 163,4 libras-pies

43. 250 libras-pulgadas **45.** $a = \frac{15}{4}$

47. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{a}{5}, \frac{a}{5}\right)$ **49.** $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{2a^2}{5}\right)$

51. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{2(9\pi + 49)}{3(\pi + 9)}, 0\right)$

53. 72.800 libras (sobre las paredes laterales)
62.400 libras (sobre la pared del frontal más profundo)
15.600 libras (sobre la pared del frontal menos profundo)

55. 4.992π libras.

CAPÍTULO 7

Sección 7.1 *(página 543)*

1. b **3.** c

5. $\int u^n\, du$

$u = 3x - 2,\ n = 4$

7. $\int \frac{du}{u}$

$u = 1 - 2\sqrt{x}$

9. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$

$u = t,\ a = 1$

11. $\int \operatorname{sen} u\, du$

$u = t^2$

13. $e^u\, du$

$u = \operatorname{sen} x$

15. $-\frac{1}{5}(-2x + 5)^{5/2} + C$

17. $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{6(3v - 1)^2} + C$ **19.** $-\frac{1}{3}\ln|-t^3 + 9t + 1| + C$

21. $\frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x - 1| + C$ **23.** $\ln(1 + e^x) + C$

25. $\frac{x}{15}(12x^4 + 20x^2 + 15) + C$ **27.** $\frac{1}{4\pi}\operatorname{sen} 2\pi x^2 + C$

29. $-\frac{1}{\pi}\operatorname{cosec} \pi x + C$ **31.** $\frac{1}{5}e^{5x} + C$

33. $2\ln(1 + e^x) + C$ **35.** $\ln|\sec x(\sec x + \operatorname{tg} x)| + C$

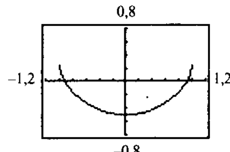
37. $\ln(t^2 + 4) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C$

39. $-\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(2t - 1) + C$ **41.** $\frac{1}{2}\ln\left|\cos\frac{2}{t}\right| + C$

43. $3\operatorname{arcsen}\frac{x - 3}{3} + C$ **45.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x + 1}{8} + C$

47. *a)*

b) $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} t^2 - \frac{1}{2}$

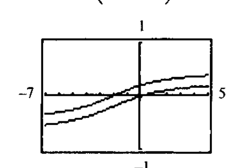


49. $y = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C$ **51.** $y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2} + C$

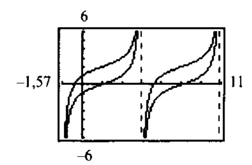
53. $\frac{1}{2}$ **55.** $\frac{1}{2}(1 - e^{-1}) \approx 0{,}316$

57. 4 **59.** $\frac{\pi}{18}$

61. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x + 2}{3}\right) + C$ **63.** $\operatorname{tg}\theta - \sec\theta + C$



Una gráfica es traslación vertical de la otra



Una gráfica es traslación vertical de la otra

65. $a = \sqrt{2},\ b = \dfrac{\pi}{4}$

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{cosec}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \right| + C$

67. a **69.** $\dfrac{4}{3}$ **71.** $a = \dfrac{1}{2}$

73. *a)* $\pi(1 - e^{-1}) \approx 1{,}986$

b) $b = \sqrt{\ln\left(\dfrac{3\pi}{3\pi - 4}\right)} \approx 0{,}743$

75. $\dfrac{2}{\operatorname{arcsen}\ (4/5)} \approx 2{,}157$ **77.** 1,0320

79. Verdadero

80. Falso: si $u = \operatorname{sen} x$, entonces $du = \cos x\, dx$

Sección 7.2 *(página 552)*

1. *a)* ii *b)* iv *c)* iii *d)* i

3. $u = x,\ dv = e^{2x}\, dx$ **5.** $u = (\ln x)^2,\ dv = dx$

7. $u = x,\ dv = \sec^2 x\, dx$ 9. $-\dfrac{1}{4e^{2x}}(2x + 1) + C$

11. $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$ **13.** $\dfrac{1}{3}e^{x^3} + C$

15. $\dfrac{1}{4}[2(t^2 - 1) \ln |t + 1| - t^2 + 2t] + C$

17. $\dfrac{(\ln x)^3}{3} + C$ **19.** $\dfrac{e^{2x}}{4(2x + 1)} + C$

21. $(x - 1)^2 e^x + C$ **23.** $\dfrac{2(x - 1)^{3/2}}{15}(3x + 2) + C$

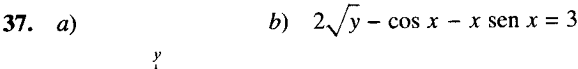
25. $x \operatorname{sen} x + \cos x + C$

27. $x \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2} \ln (1 + x^2) + C$

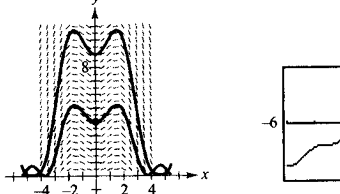
29. $\dfrac{1}{5}e^{2x} (2 \operatorname{sen} x - \cos x) + C$ **31.** $y = \dfrac{1}{2}e^{x^2} + C$

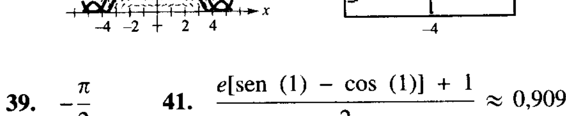
33. $y = \dfrac{2}{405} (27t^2 - 24t + 32)\sqrt{2 + 3t} + C$

35. $\operatorname{sen} y = x^2 + C$



37. *a)* *b)* $2\sqrt{y} - \cos x - x \operatorname{sen} x = 3$





39. $-\dfrac{\pi}{2}$ **41.** $\dfrac{e[\operatorname{sen}\ (1) - \cos\ (1)] + 1}{2} \approx 0{,}909$

43. $\dfrac{\pi}{2} - 1$ **45.** $\dfrac{e^{2x}}{4}(2x^2 - 2x + 1) + C$

47. $(3x^2 - 6) \operatorname{sen} x - (x^3 - 6x) \cos x + C$

49. $x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C$

51. $\dfrac{e^{-4t}}{128}(32t^3 + 24t^2 + 12t + 3) + C$

53. $\dfrac{1}{13}(2e^{-\pi} + 3) \approx 0{,}2374$ **55.** $\dfrac{2}{5}(2x - 3)^{3/2}(x + 1) + C$

57. $\dfrac{1}{3}\sqrt{4 + x^2}\, (x^2 - 8) + C$

59. $n = 0$: $x(\ln x - 1) + C$

$n = 1$: $\dfrac{x^2}{4}(2 \ln x - 1) + C$

$n = 2$: $\dfrac{x^3}{9}(3 \ln x - 1) + C$

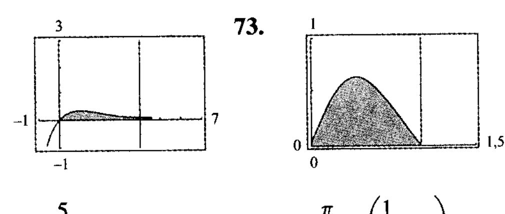
$n = 3$: $\dfrac{x^4}{16}(4 \ln x - 1) + C$

$n = 4$: $\dfrac{x^5}{25}(5 \ln x - 1) + C$

$\displaystyle\int x^n \ln x\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{(n + 1)^2}[(n + 1) \ln x - 1] + C$

67. $\dfrac{x^4}{16}(4 \ln x - 1) + C$ **69.** $\dfrac{e^{2x}}{13}(2 \cos 3x + 3 \operatorname{sen} 3x) + C$

71. **73.**



$1 - \dfrac{5}{e^4} \approx 0{,}908$ $\dfrac{\pi}{1 + \pi^2}\left(\dfrac{1}{e} + 1\right) \approx 0{,}395$

75. *a)* 1 *b)* $\pi(e-2) \approx 2{,}257$

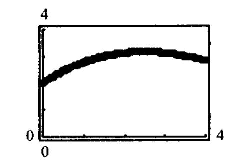
c) $\dfrac{(e^2+1)\pi}{2} \approx 13{,}177$

d) $\left(\dfrac{e^2+1}{4}, \dfrac{e-2}{2}\right) \approx (2{,}097, 0{,}359)$

77. $\dfrac{7}{10\pi}(1-e^{-4\pi}) \approx 0{,}223$ **79.** $931.265

83. $b_n = \dfrac{8h}{(n\pi)^2}\,\text{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

87. *a)* No *b)*



Sección 7.3 *(página 561)*

1. *a)* $\dfrac{1}{4}(3+\cos 4x)$

b) $2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1$

c) $1 - 2\,\text{sen}^2 x\cos^2 x$ *d)* $1 - \dfrac{1}{2}\text{sen}^2 2x$

e) Cuatro. No: con frecuencia hay más de una forma de reescribir una expresión trigonométrica.

3. $-\dfrac{1}{4}\cos^3 x + C$ **5.** $\dfrac{1}{12}\text{sen}^6 2x + C$

7. $-\dfrac{1}{3}\cos^3 x + \dfrac{2}{5}\cos^5 x - \dfrac{1}{7}\cos^7 x + C$

9. $\dfrac{1}{12}(6x + \text{sen}\,6x) + C$

11. $\dfrac{1}{8}(2x^2 - 2x\,\text{sen}\,2x - \cos 2x) + C$

17. $\dfrac{1}{3}\ln|\sec 3x + \text{tg}\,3x| + ,C$

19. $\dfrac{1}{15}\text{tg}\,5x\,(3+\text{tg}^2\,5x) + C$

21. $\dfrac{1}{2\pi}(\sec \pi x\,\text{tg}\,\pi x + \ln|\sec \pi x + \text{tg}\,\pi x|) + C$

23. $\text{tg}^4\left(\dfrac{x}{4}\right) - 2\,\text{tg}^2\left(\dfrac{x}{4}\right) - 4\ln\left|\cos\dfrac{x}{4}\right| + C$

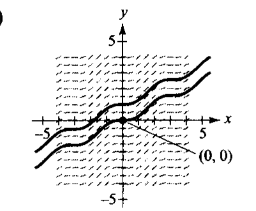
25. $\dfrac{1}{2}\text{tg}^2 x + C$ **27.** $\dfrac{\text{tg}^3 x}{3} + C$ **29.** $\dfrac{\sec^6 4x}{24} + C$

31. $\dfrac{1}{3}\sec^3 x + C$

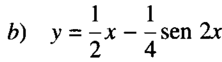
33. $r = \dfrac{1}{32\pi}(12\pi\theta - 8\,\text{sen}\,2\pi\theta + \text{sen}\,4\pi\theta) + C$

35. $y = \dfrac{1}{9}\sec^3 3x - \dfrac{1}{3}\sec 3x + C$

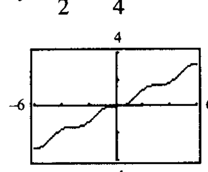
37. *a)*



b)



$y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\text{sen}\,2x$



39. $-\dfrac{1}{10}(\cos 5x + 5\cos x) + C$

41. $\dfrac{1}{8}(2\,\text{sen}\,2\theta - \text{sen}\,4\theta) + C$

43. $\dfrac{1}{4}(\ln|\text{cosec}^2\,2x| - \text{ctg}^2\,2x) + C$

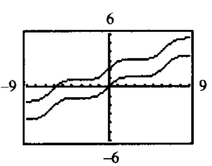
45. $-\text{ctg}\,\theta - \dfrac{1}{3}\text{ctg}^3\,\theta + C$

47. $\ln|\text{cosec}\,t - \text{ctg}\,t| + \cos t + C$

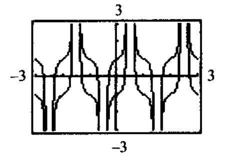
49. $\ln|\text{cosec}\,x - \text{ctg}\,x| + \cos x + C$ **51.** $t - 2\,\text{tg}\,t + C$

53. π **55.** $\dfrac{1}{2}(1-\ln 2)$ **57.** $\ln 2$ **59.** $\dfrac{4}{3}$

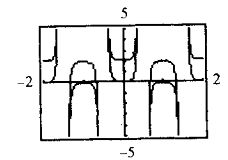
61. $\dfrac{1}{16}(6x + 8\,\text{sen}\,x + \text{sen}\,2x) + C$



63. $\dfrac{1}{4\pi}[\sec^3 \pi x\,\text{tg}\,\pi x + {}$
$+\dfrac{3}{2}(\sec \pi x\,\text{tg}\,\pi x + \ln|\sec \pi x + \text{tg}\,\pi x|)] + C$

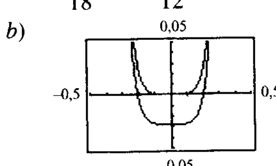


65. $\frac{1}{5\pi}\sec^5 \pi x + C$ **67.** $\frac{3\sqrt{2}}{10}$ **69.** $\frac{3\pi}{16}$



71. *a)* $\frac{\operatorname{tg}^6 3x}{18} + \frac{\operatorname{tg}^4 3x}{12} + C_1, \frac{\sec^6 3x}{18} - \frac{\sec^4 3x}{12} + C_2$

b)



73. $\frac{1}{2}$ **75.** *a)* $\frac{\pi^2}{2}$ *b)* $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$

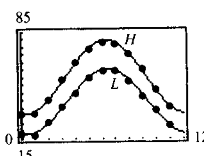
81. $-\frac{1}{15}\cos x\,(3 \operatorname{sen}^4 x + 4 \operatorname{sen}^2 x + 8) + C$

83. $\frac{5}{6\pi}\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{5}\left(\sec^2\frac{2\pi x}{5} + 2\right) + C$

87. *a)* $H(t) = 55{,}46 - 23{,}88 \cos\frac{\pi t}{6} - 3{,}34 \operatorname{sen}\frac{\pi t}{6}$

b) $L(t) = 39{,}34 - 20{,}78 \cos\frac{\pi t}{6} - 4{,}33 \operatorname{sen}\frac{\pi t}{6}$

c) Verano



Sección 7.4 *(página 571)*

1. b **2.** d **3.** a **4.** c

5. $\frac{x}{25\sqrt{25 - x^2}} + C$

7. $5 \ln\left|\frac{5 - \sqrt{25 - x^2}}{x}\right| + \sqrt{25 - x^2} + C$

9. $\ln|x + \sqrt{x^2 - 4}| + C$

11. $\frac{1}{15}(x^2 - 4)^{3/2}(3x^2 + 8) + C$

13. $\frac{1}{3}(1 + x^2)^{3/2} + C$ **15.** $\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1 + x^2}\right) + C$

17. $\frac{1}{2}x\sqrt{4 + 9x^2} + \frac{2}{3}\ln|3x + \sqrt{4 + 9x^2}| + C$

19. $\sqrt{x^2 + 9} + C$ **21.** 2π

23. $\ln|x + \sqrt{x^2 - 9}| + C$

25. $-\frac{(1 - x^2)^{3/2}}{3x^3} + C$ **27.** $-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2 + 9} + 3}{2x}\right| + C$

29. $-\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} + C$ **31.** $\frac{1}{3}(1 + e^{2x})^{3/2} + C$

33. $\frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} e^x + e^x\sqrt{1 - e^{2x}}) + C$

35. $\frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2 + 2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$

37. $x \operatorname{arcsec} 2x - \frac{1}{2}\ln|2x + \sqrt{4x^2 - 1}| + C$

39. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{x - 2}{2}\right) + C$

41. $\sqrt{x^2 + 4x + 8} - 2\ln|\sqrt{x^2 + 4x + 8} + (x + 2)| + C$

43. *a)* y *b)* $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \approx 0{,}685$

45. *a)* y *b)* $9(2 - \sqrt{2}) \approx 5{,}272$

47. $\frac{1}{2}(x - 15)\sqrt{x^2 + 10x + 9} +$
$+ 33 \ln|\sqrt{x^2 + 10x + 9} + (x + 5)| + C$

49. $\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 - 1} + \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|) + C$

51. πab **53.** $6\pi^2$

55. $\ln\left[\frac{5(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{26} + 1}\right] + \sqrt{26} - \sqrt{2} \approx 4{,}367$

59. *a)*

60
-25 250
-10

b) 200

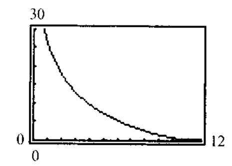
c) $100\sqrt{2} + 50\ln\left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right) \approx 229{,}559$

61. $\frac{\pi}{32}[102\sqrt{2} - \ln(3 + 2\sqrt{2})] \approx 13{,}989$

63. $\left(\dfrac{4(3\pi + 7)}{3\pi + 4}, \dfrac{104}{5(3\pi + 4)}\right) \approx (4{,}89, 1{,}55)$

65. *a)* $187{,}2\pi$ libras *b)* $62{,}4\pi$ libras

67. *b)* $y = -12 \ln\left(\dfrac{12 - \sqrt{144 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{144 - x^2}$



c) $x = 0$ *d)* 5,2 metros

69. Verdadero **70.** Falso $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\,dx = \int \operatorname{tg}^2 \theta\, d\theta$

71. Falso $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}} = \int_0^{\sqrt{3}} \cos \theta\, d\theta$

72. Verdadero

Sección 7.5 *(página 583)*

1. $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x - 10}$ **3.** $\dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx + C}{x^2 + 10}$

5. $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x - 10}$ **7.** $\dfrac{1}{2} \ln \left|\dfrac{x - 1}{x + 1}\right| + C$

9. $\ln \left|\dfrac{x - 1}{x + 2}\right| + C$ **11.** $\frac{3}{2} \ln |2x - 1| - 2 \ln |x + 1| + C$

13. $5 \ln |x - 2| - \ln |x + 2| - 3 \ln |x| + C$

15. $x^2 + \frac{3}{2} \ln |x - 4| - \frac{1}{2} \ln |x + 2| + C$

17. $\dfrac{1}{x} + \ln |x^4 + x^3| + C$ **19.** $\ln \left|\dfrac{x^2 + 1}{x}\right| + C$

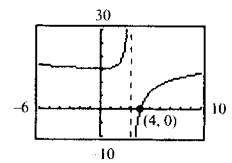
26. $\dfrac{1}{6}\left[\ln \left|\dfrac{x - 2}{x + 2}\right| + \sqrt{2} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] + C$

23. $\dfrac{1}{16} \ln \left|\dfrac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1}\right| + C$

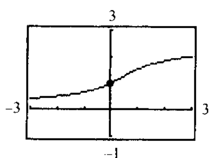
25. $\ln |x + 1| + \sqrt{2} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x + 1}{\sqrt{2}}\right) + C$

27. $\ln 2$ **29.** $\dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{8}{5}\right) - \dfrac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 2 \approx 0{,}557$

31. $y = 3 \ln|x - 3| - \dfrac{9}{x - 3} + 9$



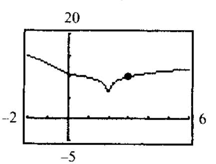
33. $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2(x^2 + 2)} + \dfrac{5}{4}$



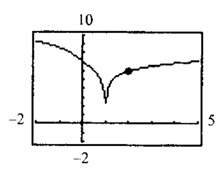
35. $y = \ln |x - 2| + \dfrac{1}{2} \ln |x^2 + x + 1| -$

$-\sqrt{3} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) - \dfrac{1}{2} \ln 13 +$

$+\sqrt{3} \operatorname{arctg} \dfrac{7}{\sqrt{3}} + 10$



37. $y = \ln |x - 1| - \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2 + 6$



39. $\ln \left|\dfrac{\cos x}{\cos x - 1}\right| + C$ **41.** $\ln \left|\dfrac{-1 + \operatorname{sen} x}{2 + \operatorname{sen} x}\right| + C$

43. $\dfrac{1}{5} \ln \left|\dfrac{e^x - 1}{e^x + 4}\right| + C$ **49.** c

51. *a)* $2\pi\left(\operatorname{arctg} 3 - \dfrac{3}{10}\right) \approx 5{,}963$

b) $(\bar{x}, \bar{y}) \approx (1{,}521, 0{,}412)$

53. $x = \dfrac{n[e^{(n+1)kt} - 1]}{n + e^{(n+1)kt}}$

55. $\dfrac{\pi}{8}$ **57.** $\dfrac{1/12}{x} + \dfrac{1/10}{x - 1} + \dfrac{111/140}{x + 4} + \dfrac{1/42}{x - 3}$

Sección 7.6 *(página 590)*

1. $-\frac{1}{2}x(2-x)+\ln|1+x|+C$

3. $\frac{1}{2}[e^x\sqrt{e^{2x}+1}+\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}+1})]+C$

5. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$

7. $\frac{1}{16}(6x-3\,\text{sen}\,2x\cos 2x-2\,\text{sen}^3\,2x\cos 2x)+C$

9. $-2(\text{ctg}\sqrt{x}+\text{cosec}\sqrt{x})+C$

11. $x-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$ **13.** $\frac{1}{16}x^4(4\ln x-1)+C$

15. *a)* y *b)* $e^x(x^2-2x+2)+C$

17. *a)* y *b)* $\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{1}{x}+C$ **19.** $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

21. $\frac{1}{2}\{(x^2+1)\,\text{arcsec}\,(x^2+1)-\ln[(x^2+1)+\sqrt{x^4+2x^2}]\}+C$

23. $\frac{1}{9}x^3(-1+3\ln x)+C$ **25.** $\frac{\sqrt{x^2-4}}{4x}+C$

27. $\frac{2}{9}\left(\ln|1-3x|+\frac{1}{1-3x}\right)+C$

29. $e^x\arccos(e^x)-\sqrt{1-e^{2x}}+C$

31. $\frac{1}{2}(x^2+\text{ctg}\,x^2+\text{cosec}\,x^2)+C$ **33.** $\text{arctg}\,(\text{sen}\,x)+C$

35. $\frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{arctg}\left(\frac{1+\text{sen}\,\theta}{\sqrt{2}}\right)+C$ **37.** $-\frac{\sqrt{2+9x^2}}{2x}+C$

39. $(t^4-12t^2+24)\,\text{sen}\,t+(4t^3-24t)\cos t+C$

41. $\frac{1}{4}(2\ln|x|-3\ln|3+2\ln|x||)+C$

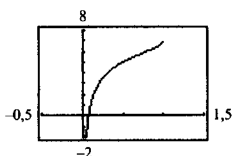
43. $\frac{3x-10}{2(x^2-6x+10)}+\frac{3}{2}\,\text{arctg}\,(x-3)+C$

45. $\frac{1}{2}\ln|x^2-3+\sqrt{x^4-6x^2+5}|+C$

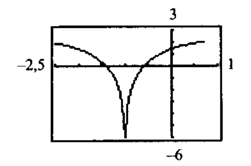
47. $-\frac{1}{3}\sqrt{4-x^2}\,(x^2+8)+C$

49. $\frac{2}{1+e^x}-\frac{1}{2(1+e^x)^2}+\ln(1+e^x)+C$

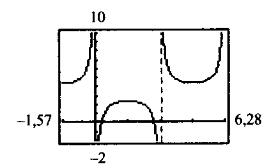
57. $y=-\frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}+7$



59. $y=\sqrt{2-2x-x^2}-\sqrt{3}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2-2x-x^2}}{x+1}\right|+$
$+\sqrt{3}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})$



61. $y=-\text{cosec}\,\theta+\sqrt{2}+2$



63. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\,\text{tg}\,(\theta/2)-3-\sqrt{5}}{2\,\text{tg}\,(\theta/2)-3+\sqrt{5}}\right|+C$

65. $\ln 2$ **67.** $\frac{1}{2}\ln(3-2\cos\theta)+C$ **69.** $2\,\text{sen}\sqrt{\theta}+C$

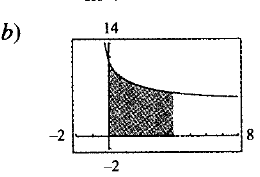
71. $\frac{40}{3}$ **73.** 1.919,145 libras-pies

75. *a)* $V=80\ln(\sqrt{10}+3)\approx 145{,}5$ pies-cúbicos
$W=11.840\ln(\sqrt{10}+3)\approx 21.530{,}4$ libras

b) (0, 1,19)

77. *a)* $k=\frac{30}{\ln 7}\approx 15{,}42$

b)



Sección 7.7 *(página 601)*

1.

x	−0,1	−0,01	−0,001	0,001	0,01	0,1
$f(x)$	2,4132	2,4991	2,500	2,500	2,4991	2,4132

2,5

3.

x	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$f(x)$	0,9900	90.483,7	$3{,}7\times 10^9$	$4{,}5\times 10^{10}$	0	0

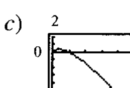
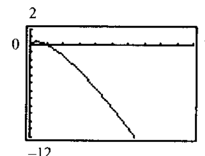
0

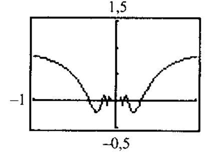
5. $\frac{1}{3}$ **7.** $\frac{1}{4}$ **9.** $\frac{5}{3}$ **11.** 3 **13.** 0 **15.** 2

17. $n = 1$: 0
$n = 2$: $\frac{1}{2}$
$n \geqslant 3$: ∞

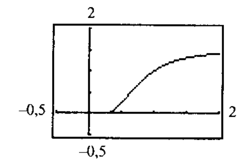
19. $\frac{2}{3}$ **21.** 1 **23.** $\frac{3}{2}$ **25.** ∞ **27.** 1 **29.** 0

31. *a*) $0 \cdot \infty$ *b*) 0 **33.** *a*) $0 \cdot \infty$ *b*) 1

c)



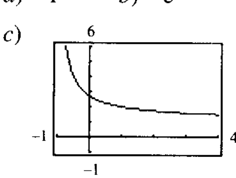
c)


35. *a*) No es indeterminada *b*) 0

c) 


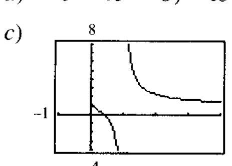
37. *a*) ∞^0 *b*) 1 **39.** *a*) 1^∞ *b*) e

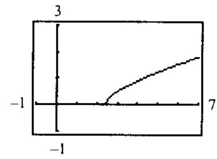
c) 2, −5, 20, −0,5

c)


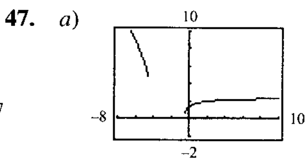
41. *a*) $\infty - \infty$ *b*) $-\frac{3}{2}$ **43.** *a*) $\infty - \infty$ *b*) ∞

c) 4, −7, 5, −4

c)


45. *a*)


b) $\frac{1}{2}$

47. *a*)


b) $\frac{5}{2}$

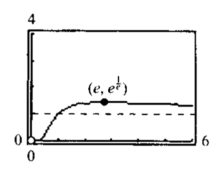
49. *a*) $f(x) = x^2 - 25$, $g(x) = x - 5$
b) $f(x) = (x - 5)^2$, $g(x) = x^2 - 25$
c) $f(x) = x^2 - 25$, $g(x) = (x - 5)^3$

51. 0 **53.** 0 **55.** 0

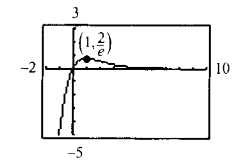
57.

x	10	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}
$\dfrac{(\ln x)^4}{x}$	2,811	4,498	0,720	0,036	0,001	0,000

59. Asíntota horizontal: $y = 1$
Máximo relativo: $(e, e^{1/e})$

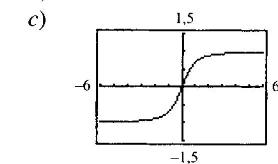


61. Asíntota horizontal: $y = 0$
Máximo relativo: $\left(1, \dfrac{2}{e}\right)$



63. El límite no es de la forma 0/0 ni ∞/∞

65. El límite no es de la forma 0/0 ni ∞/∞

67. *a*) 1
c)


1

69. $v = 32t + v_0$

71. $\dfrac{3}{4}$ **73.** $c = \dfrac{2}{3}$ **75.** $c = \dfrac{\pi}{4}$

77. Falso: la regla de L'Hôpital no es aplicable porque $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 + x + 1) \neq 0$

78. Falso: $y' = \dfrac{e^x(x - 2)}{x^3}$ **79.** Verdadero

80. Falso: tomar $f(x) = x$ y $g(x) = x + 1$

81. *a*) $\frac{1}{2}\,\text{sen}\,\theta - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$ *b*) $\frac{1}{2}\,\theta - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$
c) $\dfrac{\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,\theta\cos\theta}{\theta - \text{sen}\,\theta\cos\theta}$ *d*) $\frac{3}{4}$

Sección 7.8 *(página 612)*

1. Discontinuidad infinita en $x = 0$; 4

3. Discontinuidad infinita en $x = 1$; diverge

5. Límite de integración infinito; 1

7. Discontinuidad infinita en $x = 0$; diverge

9. Diverge **11.** 2 **13.** 1 **15.** $\frac{1}{2}$ **17.** π

19. $\dfrac{\pi}{4}$ **21.** Diverge **23.** Diverge

25. 6 **27.** $-\frac{1}{4}$ **29.** Diverge

31. $\ln(2 + \sqrt{3})$ **33.** 0 **35.** $p > 1$

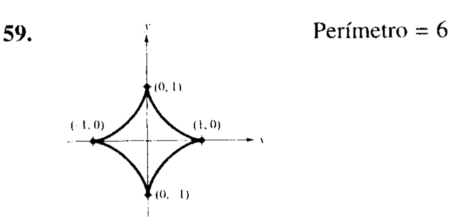
39. Diverge **41.** Converge **43.** Converge

45. Diverge **47.** Converge

49. $\dfrac{1}{s}$ **51.** $\dfrac{2}{s^3}$ **53.** $\dfrac{s}{s^2 + a^2}$ **55.** $\dfrac{s}{s^2 - a^2}$

57. *a*) 1 *b*) $\dfrac{\pi}{2}$ *c*) 2π

59. Perímetro = 6



61. *a*) $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2$
c) $\Gamma(n) = (n - 1)!$

63. *b*) $P = 43{,}53\%$ *c*) $E(x) = 7$

65. *a*) \$757.992,41 *b*) \$837.995,15
c) \$1.066.666,67

67. $\dfrac{k(\sqrt{a^2 + 1} - 1)}{a^2\sqrt{a^2 + 1}}$

69. *a*) $\frac{1}{6}$ *b*) $\frac{1}{24}$ *c*) $\frac{1}{60}$

71. Falso: considerar $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

72. Falso: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x + 1}}\, dx$ diverge y $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x + 1}} = 0$

73. Verdadero **74.** Verdadero

Ejercicios de repaso del Capítulo 7 *(página 615)*

1. $\dfrac{e^{2x}}{13}(2 \operatorname{sen} 3x - 3 \cos 3x) + C$

3. $\dfrac{1}{3\pi} \operatorname{sen}(\pi x - 1)[\cos^2(\pi x - 1) + 2] + C$

5. $\dfrac{2}{3}\left[\operatorname{tg}^3\left(\dfrac{x}{2}\right) + 3 \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right] + C$ **7.** $\dfrac{3\sqrt{4 - x^2}}{x} + C$

9. $\frac{1}{4}[6 \ln|x - 1| - \ln(x^2 + 1) + 6 \operatorname{arctg} x] + C$

11. $x + \frac{9}{8} \ln|x - 3| - \frac{25}{8} \ln|x + 5| + C$

13. $\operatorname{tg} \theta + \sec \theta + C$ **15.** $-\dfrac{1}{x}(1 + \ln 2x) + C$

17. $\dfrac{1}{2}\left(4 \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{2} + x\sqrt{4 - x^2}\right) + C$

19. $\dfrac{3}{2} \ln(x^2 + 1) - \dfrac{1}{2(x^2 + 1)} + C$ **21.** $16 \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{4} + C$

23. $\dfrac{1}{2} \ln|x^2 + 4x + 8| - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x + 2}{2}\right) + C$

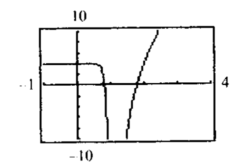
25. $\frac{1}{8}(\operatorname{sen} 2\theta - 2\theta \cos 2\theta) + C$ **27.** $\frac{1}{2}(2\theta - \cos 2\theta) + C$

29. $2\sqrt{1 - \cos x} + C$ **31.** $\operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x + C$

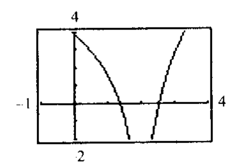
33. $\frac{1}{16}[(8x^2 - 1) \operatorname{arcsen} 2x + 2x\sqrt{1 - 4x^2}] + C$

35. $\frac{4}{3}[x^{3/4} - 3x^{1/4} + 3 \operatorname{arctg}(x^{1/4})] + C$

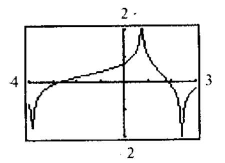
37. $y = 6 \ln|x - 1| - \dfrac{8x - 7}{2(x - 1)^2} + \dfrac{1}{2}x^2 + 3x + \dfrac{1}{2}$



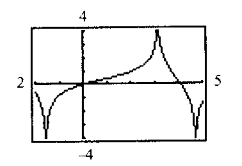
39. $y = \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2} + \ln(x^2 + 4) + 4 \ln|x - 2| -$
$-\dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{3}{2} - \ln 13 + 2$



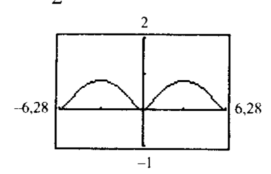
41. $y = -\dfrac{\sqrt{5}}{5} \ln\left|\dfrac{\cos\theta + \sqrt{5}(\operatorname{sen}\theta - 1)}{\cos\theta - \sqrt{5}(\operatorname{sen}\theta - 1)}\right| + 0{,}3$



43. $y = \ln\left|\dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{1 + \cos\theta}\right|$



45. $y = \frac{1}{2} \ln (3 - 2 \cos \theta)$



47. $y = \frac{3}{2} \ln \left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$

49. $y = x \ln |x^2 + x| - 2x + \ln |x + 1| + C$

51. *a)* y *b)* $-\frac{\sqrt{4 + x^2}}{4x} + C$

53. *a)*, *b)* y *c)* $\frac{1}{3} \sqrt{4 + x^2}\,(x^2 - 8) + C$

55. $\frac{1}{5}$ **57.** $\frac{1}{2}(\ln 4)^2 \approx 0{,}961$ **59.** π

61. $\frac{128}{15}$ **63.** $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{4}{3\pi}\right)$

65. *a)* $e - 1 \approx 1{,}72$ *b)* 1
c) $\frac{1}{2}(e - 1) \approx 0{,}86$ *d)* 1,46 (regla de Simpson)

67. 3,82 **69.** 0 **71.** ∞ **73.** 1

75. $1.000e^{0{,}09} \approx 1.094{,}17$ **77.** Converge; $\frac{32}{3}$

79. Diverge

81. *a)* $6.321.205,59 *b)* $10.000.000

83. *a)* 0,4581 *b)* 0,0135

87. Falso: $\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx = \frac{1}{2} \int (\ln x^2) \frac{2}{x}\,dx = \frac{1}{2} \int u\,du$

88. Verdadero

89. Falso: $\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 - x^3}\,dx = \int_{-1}^{1} |x| \sqrt{1 - x}\,dx$

90. Verdadero

CAPÍTULO 8

Sección 8.1 *(página 629)*

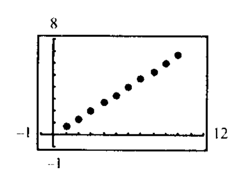
1. 2, 4, 8, 16, 32 **3.** $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}$

5. $-1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}$ **7.** $3, \frac{9}{2}, \frac{27}{6}, \frac{81}{24}, \frac{243}{120}$

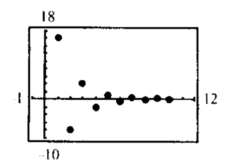
9. 3, 4, 6, 10, 18 **11.** 32, 16, 8, 4, 2 **13.** d

14. a **15.** c **16.** b

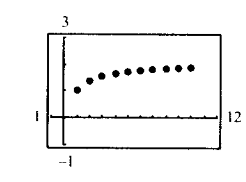
17.



19.



21.



23. 14, 17; sumar 3 al término precedente

25. $\frac{3}{16}, -\frac{3}{32}$; multiplicar por $-\frac{1}{2}$ el término precedente

27. $10 \cdot 9$ **29.** $n + 1$ **31.** $\frac{1}{(2n + 1)(2n)}$

33. $3n - 2$ **35.** $n^2 - 2$ **37.** $\frac{n + 1}{n + 2}$

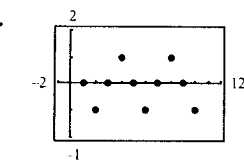
39. $\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}}$ **41.** $\frac{n + 1}{n}$ **43.** $\frac{n}{(n + 1)(n + 2)}$

45. $\frac{(-1)^{n-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)} = \frac{(-1)^{n-1} 2^n n!}{(2n)!}$

47.

Converge a 1

49.



Diverge

51. Diverge **53.** Converge a $\frac{3}{2}$ **55.** Converge a 0

57. Converge a 0 **59.** Diverge **61.** Converge a 0

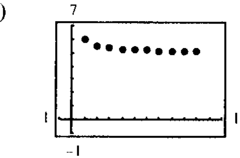
63. Converge a 0 **65.** Converge a e^k

67. Monótona, acotada **69.** No monótona, acotada

71. No monótona, acotada **73.** Monótona, acotada

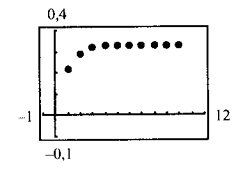
75. No monótona, acotada

77. *b)*



Límite = 5

79. *b)*



Límite $= \frac{1}{3}$

81. *a)* $a_n = 10 - \frac{1}{n}$

b) Toda sucesión monótona y acotada es convergente (Teorema 8.5).

c) $a_n = \frac{3n}{4n+1}$

d) Una sucesión no acotada no puede ser convergente.

83. *a)* No

b)

n	1	2	3	4	5
A_n	\$9.086,25	\$9.173,33	\$9.261,24	\$9.349,99	\$9.439,60

n	6	7	8	9	10
A_n	\$9.530,06	\$9.621,39	\$9.713,59	\$9.806,68	\$9.900,66

85. *a)* $\$2.500.000.000(0,8)^n$

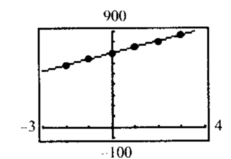
b)

Año	1	2
Presupuesto	\$2.000.000.000	\$1.600.000.000

Año	3	4
Presupuesto	\$1.280.000.000	\$1.024.000.000

c) Converge a 0

87. *a)* $a_n = 697,32 + 59,69n$



b) \$1.294

89. $S_6 = 240$, $S_7 = 440$, $S_8 = 810$, $S_9 = 1.490$, $S_{10} = 2.740$

91. *a)* $a_9 = a_{10} = \frac{1.562.500}{567}$

b) Decreciente

c) Las factoriales crecen más deprisa que las exponenciales.

93. 1, 1,4142, 1,4422, 1,4142, 1,3797, 1,3480; Converge a 1

95. *a)* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

b) 1, 2, 1,5, 1,6667, 1,6, 1,6250, 1,6154, 1,6190, 1,6176, 1,6182

d) $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180$

97. Verdadero **98.** Verdadero

99. Verdadero **100.** Verdadero

101. 1,4142, 1,8478, 1,9616, 1,9904, 1,9976

$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

Sección 8.2 *(página 641)*

1. 1, 1,25, 1,361, 1,424, 1,464

3. 3, −1,5, 5,25, −4,875, 10,3125

5. 3, 4,5, 5,25, 5,625, 5,8125

7. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$ **9.** $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$

11. Serie geométrica: $r = \frac{3}{2} > 1$

13. Serie geométrica: $r = 1,055 > 1$

15. $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} \neq 0$

17. Serie geométrica: $r = \frac{3}{4} < 1$

19. Serie geométrica: $r = 0,9 < 1$

21. Serie telescópica: $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

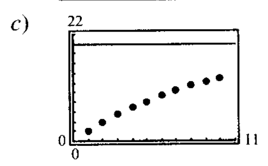
23. c; 3 **24.** b; 3 **25.** a; 3 **26.** d; 3

27. *a)* 20

b)

n	5	10	20	50	100
S_n	8,1902	13,0264	17,5685	19,8969	19,9995

c)



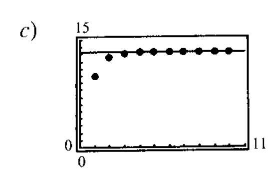
d) Los términos de la serie decrecen en magnitud con relativa lentitud y la sucesión de sumas parciales tiende hacia la suma de la serie de forma relativamente lenta.

29. *a)* $\frac{40}{3}$

b)

n	5	10	20	50	100
S_n	13,3203	13,3333	13,3333	13,3333	13,3333

c)



d) Los términos de la serie decrecen en magnitud con relativa lentitud y la sucesión de sumas parciales tiende hacia la suma de la serie de forma relativamente lenta.

31. 2 **33.** $\frac{2}{3}$ **35.** $\frac{10}{9}$ **37.** $\frac{9}{4}$ **39.** $\frac{3}{4}$

41. 3 **43.** $\frac{1}{2}$ **45.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{10}(0{,}1)^n = \frac{4}{9}$

47. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{40}(0{,}01)^n = \frac{5}{66}$

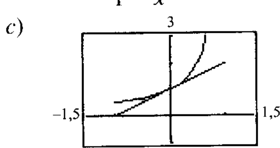
49. Diverge **51.** Converge **53.** Diverge

55. Converge **57.** Diverge **59.** Diverge

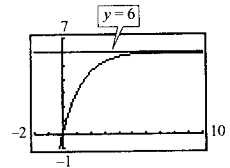
61. *a)* x

b) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$

c)



63.



Asíntota horizontal: $y = 6$
La altura de la asíntota horizontal es la suma de la serie.

65. Los números de términos requeridos en las dos series son, respectivamente $n = 100$ y $n = 5$. La segunda serie converge más rápidamente.

67. $80.000(1 - 0{,}9^n)$ **69.** 152,42 pies **71.** $\frac{1}{8}$

73. *a)* 126 pulgadas cuadradas
b) 128 pulgadas cuadradas

75. *a)* \$5.368.709,11 *b)* \$10.737.418,23
c) \$21.474.836,47

77. *a)* \$16.415,10 *b)* \$16.421,83

79. *a)* \$118.196,13 *b)* \$118.393,43

85. \$3.623.993,23

87. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 1, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)$ (La respuesta no es única)

89. Falso: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge **90.** Verdadero

91. Falso: la serie debe empezar con $n = 0$ para que el límite sea $a/(1 - r)$

92. Verdadero

Sección 8.3 *(página 649)*

1. Diverge **3.** Converge **5.** Converge

7. Diverge **9.** Diverge **11.** Converge

13. $p > 1$ **15.** Diverge **17.** Diverge

19. Converge **21.** Converge **23.** a, diverge

24. d, diverge **25.** b, converge **26.** c, converge

27. No. En algunos casos los términos decrecen hacia 0 tan lentamente que la serie no es convergente.

29. *a)*

M	2	4	6	8
N	4	31	227	1.674

b) No. Como la magnitud de los términos de la serie va tendiendo a cero, se requieren más y más términos para aumentar en 2 la suma.

33. $R_6 \approx 0{,}0015$
$S_6 \approx 1{,}0811$

35. $R_{10} \approx 0{,}0997$
$S_{10} \approx 0{,}9818$

37. $R_4 \approx 5{,}6 \times 10^{-8}$
$S_4 \approx 0{,}4049$

39. $N \geqslant 7$ **41.** $N \geqslant 2$

43. No. Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, $\displaystyle\sum_{n=10.000}^{\infty} \frac{1}{n}$ también diverge. En la convergencia o divergencia de una serie no influyen unos cuantos primeros términos.

45. *b)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1,1}} = 0{,}4665 + 0{,}2987 + 0{,}2176 + + 0{,}1703 + 0{,}1393 + \cdots$

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} = 0{,}7213 + 0{,}3034 + 0{,}1803 + + 0{,}1243 + 0{,}0930 + \cdots$

c) $n > e^{40}$

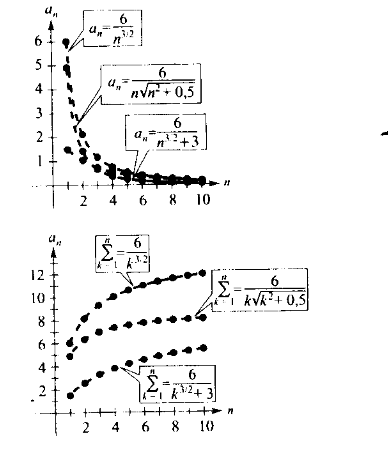
47. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **49.** Diverge **51.** Converge

53. Converge **55.** Diverge

57. Diverge **59.** Converge

Sección 8.4 *(página 656)*

1. *a)*



b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^{3/2}}$; Converge

c) Los valores absolutos de los términos son menores que los de los términos de una p-serie, luego converge.

d) Cuanto menor es el valor absoluto de los términos, menor es el de las sumas parciales.

3. Converge **5.** Diverge **7.** Converge

9. Diverge **11.** Converge **13.** Converge

15. Diverge **17.** Diverge **19.** Converge

21. Diverge **23.** Converge **25.** Diverge

27. Diverge **29.** Diverge; criterio de p-series

31. Converge; comparación directa con $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

33. Diverge; criterio del término general

35. Converge; criterio integral

39. Diverge **41.** Converge

45. *b)*

n	5	10	20	50	100
S_n	1,1839	1,2087	1,2212	1,2287	1,2312

c) 0,1226, $\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{(2 \cdot 1 - 1)^2} - \frac{1}{(2 \cdot 2 - 1)^2}$

d) 0,0277

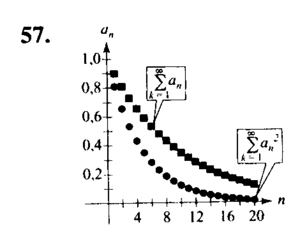
47. Falso: tomar $a_n = \frac{1}{n^3}$ y $b_n = \frac{1}{n^2}$

48. Verdadero **49.** Verdadero

50. Falso: tomar $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$, y $c_n = \frac{10}{n}$

53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

57.



Como $0 < a_n < 1$, $0 < a_n^2 < a_n < 1$

Sección 8.5 *(página 666)*

1. b **2.** d **3.** c **4.** a

5. *a)*

n	1	2	3	4	5
S_n	1,0000	0,6667	0,8667	0,7238	0,8349

n	6	7	8	9	10
S_n	0,7440	0,8209	0,7543	0,8131	0,7605

b) 1,1 0 11 0,6

c) Los puntos se alternan a los lados de la recta horizontal $y = \pi/4$, que representa la suma de la serie. La distancia de los sucesivos puntos a esa recta va disminuyendo.

d) La distancia del apartado *c)* es siempre menor que el valor absoluto del siguiente término de la serie.

7. *a)*

n	1	2	3	4	5
S_n	1,0000	0,7500	0,8611	0,7986	0,8386

n	6	7	8	9	10
S_n	0,8108	0,8312	0,8156	0,8280	0,8180

b)

c) Los puntos se alternan a los lados de la recta horizontal $y = \pi^2/12$, que representa la suma de la serie. La distancia de los sucesivos puntos a esa recta va disminuyendo.

d) La distancia del apartado *c*) es siempre menor que el valor absoluto del siguiente término de la serie.

9. Converge **11.** Converge **13.** Diverge

15. Converge **17.** Diverge **19.** Diverge

21. Converge **23.** Converge **25.** Converge

27. Converge

29. *a*) 7 términos (nótese que la suma comienza en $N = 0$)
b) 0,368

31. *a*) 3 términos (nótese que la suma comienza en $N = 0$)
b) 0,842

33. *a*) 1.000 términos *b*) 0,693

35. 7 **37.** Converge absolutamente

39. Condicionalmente convergente **41.** Diverge

43. Condicionalmente convergente

45. Absolutamente convergente

47. Converge absolutamente

49. Converge condicionalmente

51. Converge absolutamente

55. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$ para $0 < p \leqslant 1$

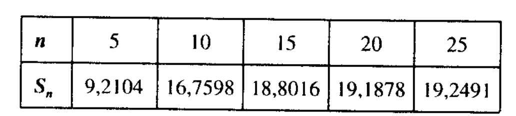
57. *a*) $-1 < x < 1$ *b*) $x = -1$

59. Falso: tomar $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ **60.** Verdadero

Sección 8.6 *(página 674)*

5. d **6.** c **7.** a **8.** b

9. *b*)



n	5	10	15	20	25
S_n	9,2104	16,7598	18,8016	19,1878	19,2491

c)

d) 19,26

e) Cuanto más deprisa tienden a 0 los términos de la serie, más deprisa tiende la sucesión de sumas parciales a la suma de la serie.

11. Diverge **13.** Converge **15.** Converge

17. Diverge **19.** Converge **21.** Diverge

23. Converge **25.** Converge **27.** Diverge

29. Converge **33.** Converge

35. Converge **37.** Diverge **39.** Converge

41. Converge; criterio de las series alternadas

43. Converge; criterio de p-series

45. Diverge; criterio del término general

47. Diverge; criterio del cociente

49. Converge; comparación en el límite con $b_n = \frac{1}{2^n}$

51. Converge; comparación directa con $b_n = \frac{1}{2^n}$

53. Converge; criterio del cociente

55. Converge; criterio del cociente

57. Converge; criterio del cociente

59. a y c **61.** a y b

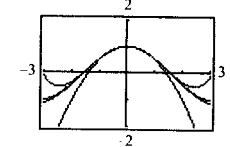
63. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^{n+1}}$ **65.** *a*) 9 *b*) −0,7769

67. No: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 10.000}$ es divergente

Sección 8.7 *(página 685)*

1. d **2.** c **3.** a **4.** b

5. *a*)



b) $f^{(2)}(0) = -1 \qquad P_2^{(2)}(0) = -1$
$f^{(4)}(0) = 1 \qquad P_4^{(4)}(0) = 1$
$f^{(6)}(0) = -1 \qquad P_6^{(6)}(0) = -1$

c) $f^{(n)}(0) = P_n^{(n)}(0)$

7. $1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$ **9.** $1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4$

11. $x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$ **13.** $x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4$

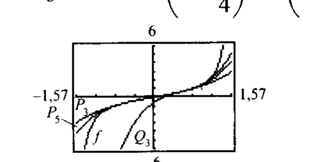
15. $1 - x + x^2 - x^3 + x^4$

17. $1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4$

19. $(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$

21. *a)* $P_3(x) = x + \frac{1}{3}x^3$ *b)* $P_5(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$

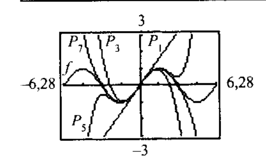
c) $Q_3(x) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$



23. *a)*

x	0	0,25	0,50	0,75	1,00
sen x	0	0,2474	0,4794	0,6816	0,8415
$P_1(x)$	0	0,25	0,50	0,75	1,00
$P_3(x)$	0	0,2474	0,4792	0,6797	0,8333
$P_5(x)$	0	0,2474	0,4794	0,6817	0,8417
$P_7(x)$	0	0,2474	0,4794	0,6816	0,8415

b)



c) Al crecer la distancia, la aproximación polinómica pierde precisión.

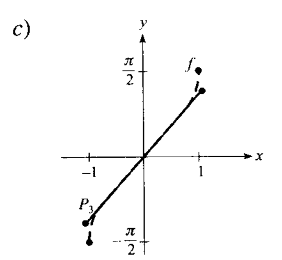
25. *a)* $P_3(x) = x + \frac{1}{6}x^3$

b)

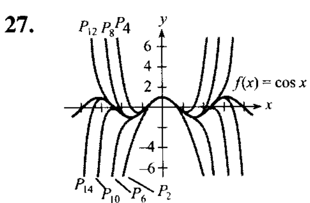
x	−0,75	−0,50	−0,25	0	0,25
$f(x)$	−0,848	−0,524	−0,253	0	0,253
$P_3(x)$	−0,820	−0,521	−0,253	0	0,253

x	0,50	0,75
$f(x)$	0,524	0,848
$P_3(x)$	0,521	0,820

c)



27.



29. 0,6042 **31.** 0,1823 **33.** $R_4 \leqslant 2{,}03 \times 10^{-5}$

35. $R_3 \leqslant 7{,}82 \times 10^{-3}$ **37.** 3

39. 9; 0,4055 **41.** $-0{,}3936 < x < 0$

43. *a)* $f(x) \approx P_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$

$g(x) \approx Q_5(x) = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^5$

$Q_5(x) = xP_4(x)$

b) $g(x) \approx P_6(x) = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!}$

c) $g(x) \approx P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}$

Sección 8.8 *(página 696)*

1. $R = 1$ **3.** $R = \frac{1}{2}$ **5.** $R = \infty$ **7.** $(-2, 2)$

9. $(-1, 1]$ **11.** $(-\infty, \infty)$ **13.** $x = 0$

15. $(-4, 4)$ **17.** $(0, 10]$ **19.** $(0, 2]$

21. $(0, 2c)$ **23.** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **25.** $(-\infty, \infty)$

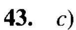
27. $(-1, 1)$ **29.** $x = 3$

31. *a)* $(-2, 2)$ *b)* $(-2, 2)$ *c)* $(-2, 2)$ *d)* $[-2, 2)$

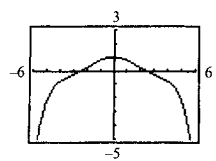
33. *a)* $(0, 2]$ *b)* $(0, 2)$ *c)* $(0, 2)$ *d)* $[0, 2)$

35. c **36.** a **37.** b **38.** d

39. *a)* Para $f(x)$: $(-\infty, \infty)$; Para $g(x)$: $(-\infty, \infty)$
d) $f(x) = \text{sen}\, x$
$g(x) = \cos x$

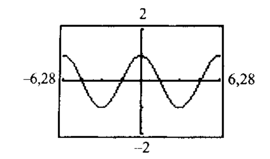


43. *c)*

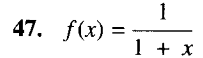


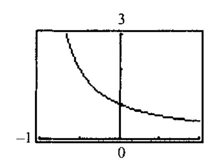
d) 0,92

45. $f(x) = \cos x$

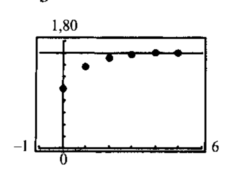


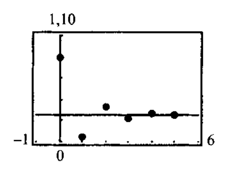
47. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$





49. *a)* $\dfrac{8}{5}$ *b)* $\dfrac{8}{11}$





c) La serie alternada converge más rápidamente. Las sumas parciales de la serie de términos positivos tiende a la suma por defecto (desde valores inferiores). Las sumas parciales de la serie alternada van alternándose a los dos lados de la recta horizontal que representa su suma.

b)

M	10	100	1.000	10.000
N	4	9	15	21

51. Falso: tomar $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n2^n}$ **52.** Verdadero

53. Verdadero. **54.** Verdadero.

Sección 8.9 *(página 704)*

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$ **3.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(-3)^{n+1}}$ **7.** $\displaystyle -3\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

(2, 8) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

9. $\displaystyle -\frac{1}{11}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{11}(x+3)\right]^n$ **11.** $\displaystyle \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{-2}\right)^n$

$\left(-\frac{17}{2}, \frac{5}{2}\right)$ (−2, 2)

13. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(-2)^n} - 1\right]x^n$ **15.** $\displaystyle 2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$

(−1, 1) (−1, 1)

17. $\displaystyle 2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ **19.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n x^{n-1}$

(−1, 1) (−1, 1)

21. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ **23.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

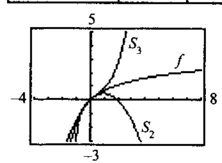
(−1, 1] (−1, 1)

25. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^{2n}$

$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

27.

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
S_2	0,000	0,180	0,320	0,420	0,480	0,500
ln (*x* + 1)	0,000	0,182	0,336	0,470	0,588	0,693
S_3	0,000	0,183	0,341	0,492	0,651	0,833



29. c **30.** d **31.** a **32.** b

33. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ es una función impar (simétrica respecto del origen).

35. 0,245 **37.** 0,125

39. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$

(−1, 1)

41. $E(n) = 2$. Como la probabilidad de sacar cara en una tirada es 1/2, es de esperar que, en promedio, se obtenga una cara en dos tiradas.

45. *b)* 3,14 **47.** $\ln\frac{3}{2} \approx 0{,}4055$

49. $\ln\frac{7}{5} \approx 0{,}3365$ **51.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} \approx 0{,}4636$

53. La serie del Ejercicio 50 converge a su suma a un ritmo menor, ya que sus términos tienden a 0 mucho más despacio.

55. −0,6931

Sección 8.10 *(página 715)*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$ **3.** $\frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$ **7.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

9. $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \cdots$ **11.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n$

13. $\frac{1}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)x^{2n}}{2^{3n} n!}\right]$

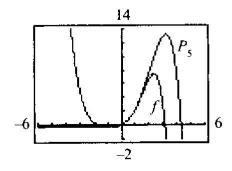
15. $1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)x^{2n}}{2^n n!}$

17. $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 2!} + \frac{x^6}{2^3 3!} + \cdots$ **19.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

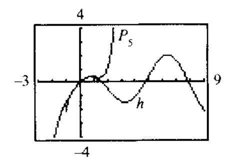
21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{(2n)!}$ **23.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$

25. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ **27.** $\frac{1}{2}\left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}\right]$

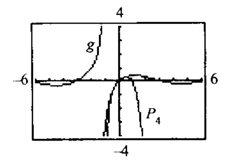
31. $P_5(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots$



33. $P_5(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots$



35. $P_4(x) = x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^4 + \cdots$



37. a; $y \approx x \operatorname{sen} x$ **38.** b; $y \approx x \cos x$

39. c; $y \approx xe^x$ **40.** d; $y \approx x^2\left(\frac{1}{x-1}\right)$

41. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)} x^{2n+3}}{(2n+3)(n+1)!}$ **43.** 0,6931 **45.** 7,3891

47. 0 **49.** 0,9461 **51.** 0,7040

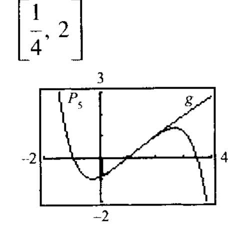
53. 0,2010 **55.** 0,3413

57. $P_5(x) = x - 2x^3 + \frac{2}{3}x^5$

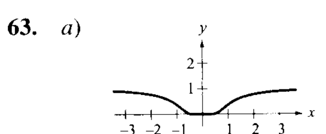
$\left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$

59. $P_5(x) = (x-1) - \frac{1}{24}(x-1)^3 + \frac{1}{24}(x-1)^4 - \frac{71}{1.920}(x-1)^5$

$\left[\frac{1}{4}, 2\right]$



63. *a)*

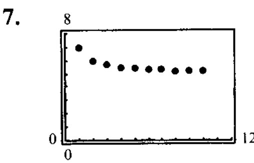


c) $\sum_{n=0}^{\infty} 0x^n = 0 \neq f(x)$

Ejercicios de repaso del Capítulo 8 *(página 718)*

1. $a_n = \frac{1}{n!}$ **3.** a **4.** c **5.** d **6.** b

7.



Converge a 5

9. Converge a 0 **11.** Diverge

13. Converge a 0 **15.** Converge a 0

17. *a*)

n	1	2	3	4	5
A_n	$5.062,50	$5.125,78	$5.189,85	$5.254,73	$5.320,41

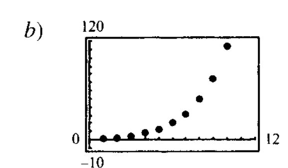
n	6	7	8
A_n	$5.386,92	$5.454,25	$5.522,4

b) $8.218,10

19. *a*)

k	5	10	15	20	25
S_k	13,2	113,3	873,8	6.648,5	50.500,3

b)

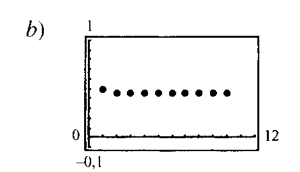


c) Diverge

21. *a*)

n	5	10	15	20	25
S_n	0,4597	0,4597	0,4597	0,4597	0,4597

b)



c) Converge

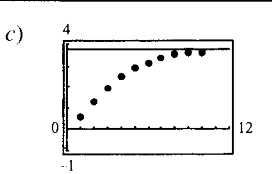
23. 3. **25.** $\frac{1}{2}$ **27.** $\frac{1}{11}$

29. $45\frac{1}{3}$ metros **31.** $5.087,14

33. *b*)

n	5	10	15	20	25
S_n	2,8752	3,6366	3,7377	3,7488	3,7499

c)



d) 3,75

35. Diverge **37.** Converge **39.** Converge

41. Diverge **43.** Diverge **45.** Diverge

47. *a*)

N	5	10	20	30	40
$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^p}$	1,4636	1,5498	1,5962	1,6122	1,6202
$\int_N^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dp$	0,2000	0,1000	0,0500	0,0333	0,0250

b)

N	5	10	20	30	40
$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^p}$	1,0367	1,0369	1,0369	1,0369	1,0369
$\int_N^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

La serie del apartado *b*) converge más deprisa, lo cual es evidente a la vista de las integrales que dan los restos de las sumas parciales.

49. $(-10, 10)$ **51.** $[1, 3]$ **53.** Converge sólo en $x = 2$

55. $\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n!}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^n$

57. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x \ln 3)^n}{n!}$ **59.** $-\sum_{n=0}^{\infty}(x + 1)^n$

61. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^n$ **63.** $\ln\frac{5}{4} \approx 0,2231$

65. $e^{1/2} \approx 1,6487$ **67.** $\cos\frac{2}{3} \approx 0,7859$

69. La serie del Ejercicio 37 converge a su suma más lentamente porque sus términos tienden a 0 más despacio.

71. $1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$ **73.** $f(x) = \frac{3}{3 - 2x}; \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

75. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n + 1)(2n + 1)!}$ **77.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n + 1)^2}$

79. 0 **83.** 0,996 **85.** 0,560

86. *a*) 4 *b*) 6 *c*) 5 *d*) 10

APÉNDICE A

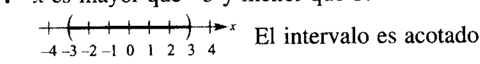
Sección A.1 *(página 730)*

1. Racional **3.** Irracional **5.** Racional

7. Racional **9.** Racional **11.** $\frac{4}{11}$ **13.** $\frac{11}{37}$

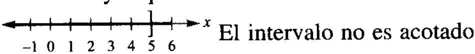
15. *a*) Verdadero *b*) Falso *c*) Verdadero *d*) Falso *e*) Falso *f*) Falso

17. x es mayor que -3 y menor que 3.



El intervalo es acotado

19. x no es mayor que 5.



El intervalo no es acotado

21. $y \geqslant 4$, $[4, \infty)$ **23.** $0{,}03 < r \leqslant 0{,}07$, $(0{,}03, 0{,}07]$

25. $x \geqslant \dfrac{1}{2}$ **27.** $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{7}{2}$

29. $x > 6$ **31.** $-1 < x < 1$

33. $x \geqslant 13$, $x \leqslant -7$ **35.** $a - b < x < a + b$

37. $-3 < x < 2$ **39.** $0 < x < 3$

41. $-3 \leqslant x \leqslant 1$ **43.** $-3 \leqslant x \leqslant 2$

45. 4, −4, 4 **47.** *a*) −51, 51, 51 *b*) 51, −51, 51

49. 1 **51.** *a*) 14 *b*) 10 **53.** $|x| \leqslant 2$

55. $|x - 2| > 2$

57. *a*) $|x - 12| \leqslant 10$ *b*) $|x - 12| \geqslant 10$

59. $x \geqslant 36$ unidades **61** $x \leqslant 41$ o $x \geqslant 59$

61. *a*) $\dfrac{355}{112} > \pi$ *b*) $\dfrac{22}{7} > \pi$ **65.** b

67. Falso: el recíproco de 2 es 1/2, que no es entero.

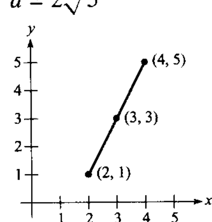
68. Verdadero **69.** Verdadero

70. Falso: $|0| = 0$ **71.** Verdadero **72.** Verdadero

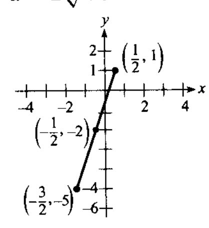
81. $|-3 - 1| > |-3| - |1|$
$|3 - 1| = |3| - |1|$

Sección A.2 *(página 738)*

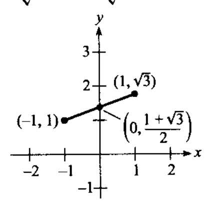
1. $d = 2\sqrt{5}$



3. $d = 2\sqrt{10}$



5. $8\sqrt{8 - 2\sqrt{3}}$

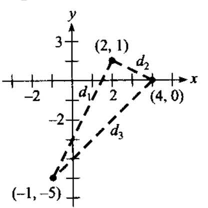


7. Triángulo rectángulo

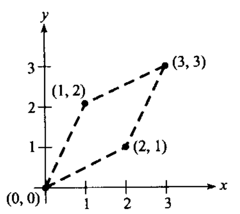
$d_1 = \sqrt{45}$, $d_2 = \sqrt{5}$

$d_3 = \sqrt{50}$

$(d_1)^2 + (d_2)^2 = (d_3)^2$

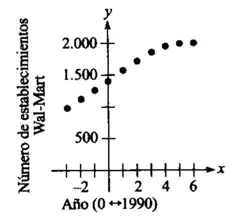


9. Rombo: la longitud de cada lado es $\sqrt{5}$



11. Cuadrante II **13.** Cuadrantes I y III

15. $x = 0 \leftrightarrow 1990$



17. $d_1 = 2\sqrt{5}$, $d_2 = \sqrt{5}$, $d_3 = 3\sqrt{5}$
Colineales, porque $d_1 + d_2 = d_3$

19. $d_1 = \sqrt{2}$, $d_2 = \sqrt{13}$, $d_3 = 5$
No colineales, porque $d_1 + d_2 > d_3$

21. $x = \pm 3$ **23.** $y = \pm\sqrt{55}$

25. $\left(\frac{3x_1 + x_2}{4}, \frac{3y_1 + y_2}{4}\right)\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$\left(\frac{x_1 + 3x_2}{4}, \frac{y_1 + 3y_2}{4}\right)$

27. c **28.** b **29.** a **30.** d

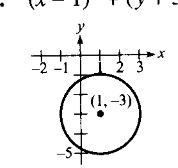
31. $x^2 + y^2 - 9 = 0$

33. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$

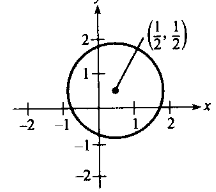
35. $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$

37. $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ **39.** $x^2 + y^2 = 26.000^2$

41. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$ **43.** $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 0$

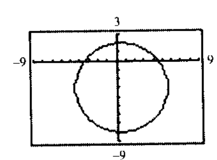


45. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 2$

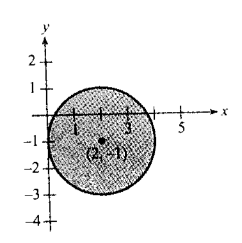


47. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{4}$

49.



51.



55. Verdadero **56.** Falso: la distancia es $|2b|$

57. Verdadero **58.** Verdadero

Sección A.3 *(página 748)*

1. *a)* 396°, −324° *b)* 240°, −480°

3. *a)* $\frac{19\pi}{9}, -\frac{17\pi}{9}$ *b)* $\frac{10\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$

5. *a)* $\frac{\pi}{6}$, 0,524 *b)* $\frac{5\pi}{6}$, 2,618
c) $\frac{7\pi}{4}$, 5,498 *d)* $\frac{2\pi}{3}$, 2,094

7. *a)* 270° *b)* 210° *c)* −105° *d)* −135,6°

9.

r	8 pies	15 pulg.	85 cm	24 pulg.	$\frac{12.963}{\pi}$ mi
s	12 pies	24 pulg.	63,75π cm	96 pulg.	8.642 mi
θ	1,5	1,6	$\frac{3\pi}{4}$	4	$\frac{2\pi}{3}$

11. *a)* $\text{sen } \theta = \frac{4}{5}$ $\text{cosec } \theta = \frac{5}{4}$

$\cos \theta = \frac{3}{5}$ $\sec \theta = \frac{5}{3}$

$\text{tg } \theta = \frac{4}{3}$ $\text{ctg } \theta = \frac{3}{4}$

b) $\text{sen } \theta = -\frac{5}{13}$ $\text{cosec } \theta = -\frac{13}{5}$

$\cos \theta = -\frac{12}{13}$ $\sec \theta = -\frac{13}{12}$

$\text{tg } \theta = \frac{5}{12}$ $\text{ctg } \theta = \frac{12}{5}$

13. *a)* Cuadrante III *b)* Cuadrante IV

15. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **17.** $\frac{4}{3}$

19. *a*) $\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *b*) $\operatorname{sen} 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ $\operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$

c) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *d*) $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = 1$

21. *a*) $\operatorname{sen} 225^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *b*) $\operatorname{sen} (-225^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos (-225^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{tg} 225^\circ = 1$ $\operatorname{tg} (-225^\circ) = -1$

c) $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ *d*) $\operatorname{sen} \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\cos \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}$ $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

23. *a*) 0,1736 *b*) 5,759

25. *a*) 0,3640 *b*) 0,3640

27. *a*) $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ *b*) $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

29. *a*) $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ *b*) $\theta = \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$

31. *a*) $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ *b*) $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}$

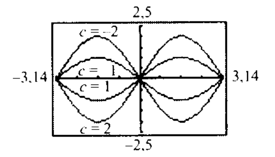
35. *a*) $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **37.** $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ **39.** 5.099 pies

41. *a*) Período: π *b*) Período: 2 **43.** Período: $\frac{1}{2}$

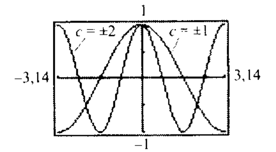
Amplitud: 2 Amplitud: $\frac{1}{2}$ Amplitud: 3

45. Período: $\frac{\pi}{2}$ **47.** Período: $\frac{2\pi}{5}$

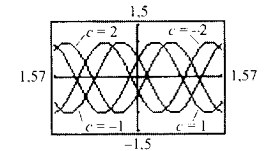
49. *a*) Cambio en la amplitud



b) Cambio en el período

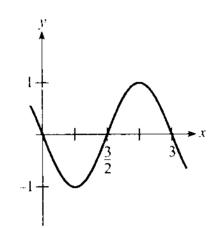


c) Traslación horizontal



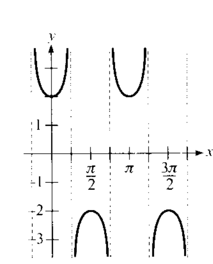
51.

53.

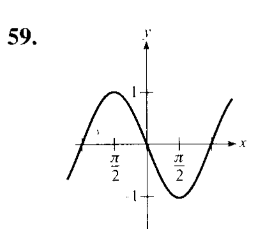


55.

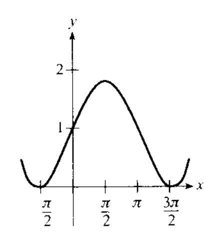
57.



59.

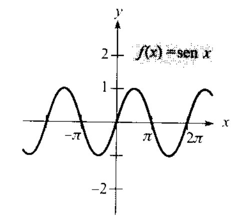


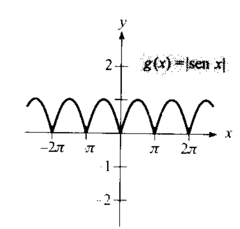
61.

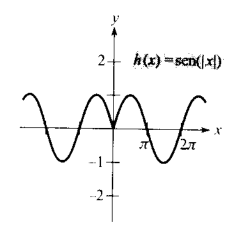


63. $a = 3,\ b = \dfrac{1}{2},\ c = \dfrac{\pi}{2}$

65.

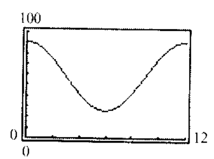






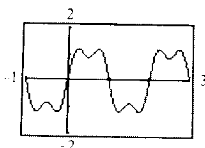
La gráfica de $|f(x)|$ reflejará en el eje de las x las porciones de la gráfica de $f(x)$ que se hallaban por debajo del eje x. La gráfica de $f(|x|)$ reflejará la parte de la gráfica de $f(x)$ que se hallaba a la derecha del eje y en el eje y, produciendo una imagen simétrica a su izquierda.

67.



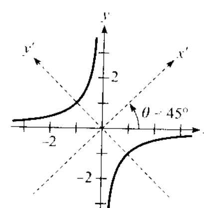
Enero, noviembre, diciembre

69. $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\left(\text{sen } \pi x + \dfrac{1}{3} \text{ sen } 3\ \pi x + \dfrac{1}{5} \text{ sen } 5\ \pi x + \cdots\right)$

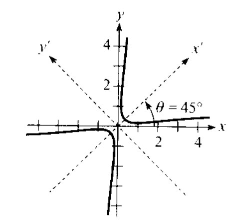


APÉNDICE E *(página 779)*

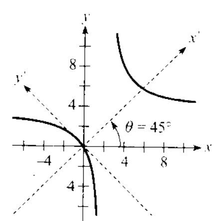
1. $\dfrac{(y')^2}{2} - \dfrac{(x')^2}{2} = 1$

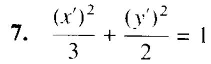


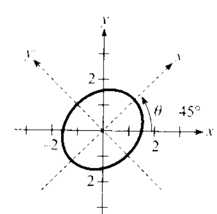
3. $\dfrac{(x')^2}{1/4} - \dfrac{(y')^2}{1/6} = 1$



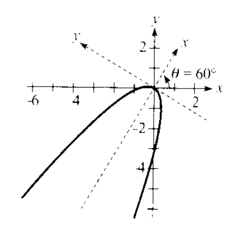
5. $\dfrac{(x' - 3\sqrt{2})^2}{16} - \dfrac{(y' - \sqrt{2})^2}{16} = 1$



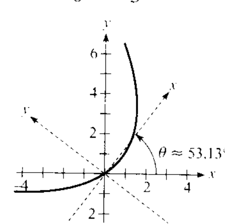
7.  $\dfrac{(x')^2}{3} + \dfrac{(y')^2}{2} = 1$

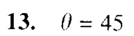


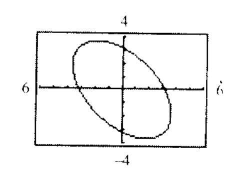
9. $(x') = -(y')^2$



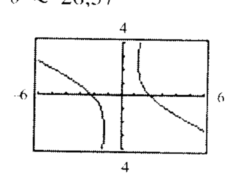
11. $y' = \dfrac{(x')^2}{6} - \dfrac{x'}{3}$



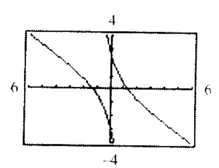
13.  $\theta = 45$



15. $\theta \approx 26{,}57$



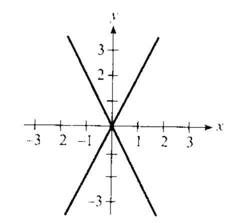
17. $\theta \approx 31{,}72$



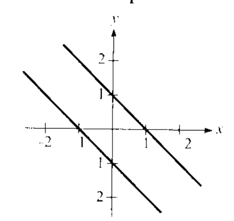
19. Parábola **21.** Elipse

23. Hipérbola **25.** Parábola

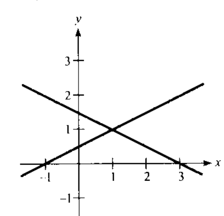
27. Dos rectas



29. Dos rectas paralelas



31. Dos rectas



APÉNDICE F *(página 787)*

1. $11 - i$ **3.** 4 **5.** $3 - 3\sqrt{2}i$

7. $-14 + 20i$ **9.** $\frac{1}{6} + \frac{7}{6}i$ **11.** $-2\sqrt{3}$

13. -10 **15.** $5 + i$ **17.** $12 + 30i$ **19.** 24

21. $-9 + 40i$ **23.** -10 **25.** 34 **27.** 9

29. 400 **31.** 8 **33.** $-6i$

35. $\frac{16}{41} + \frac{30}{41}i$ **37.** $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ **39.** $-7 - 6i$

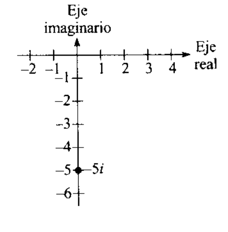
41. $-\frac{9}{1.681} + \frac{40}{1.681}i$ **43.** $-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$

45. $\frac{62}{949} + \frac{297}{949}i$ **47.** $1 \pm i$ **49.** $-2 \pm \frac{1}{2}i$

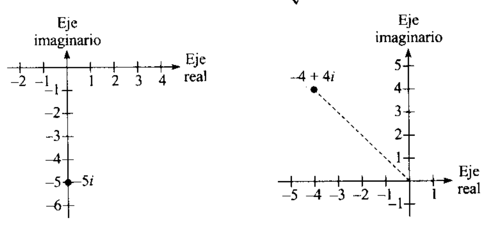
51. $-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$ **53.** $\frac{1}{8} \pm \frac{\sqrt{11}}{8}i$ **55.** $-1 + 6i$

57. $-5i$ **59.** $-375\sqrt{3}i$ **61.** i

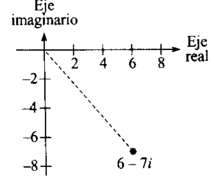
63. 5

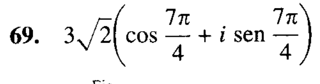


65. $4\sqrt{2}$

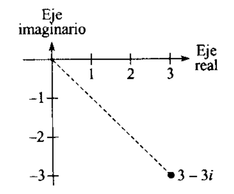


67. $\sqrt{85}$

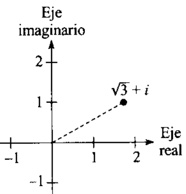




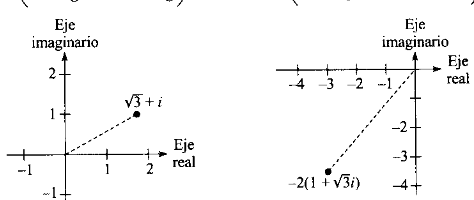
69. $3\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right)$



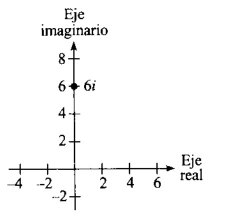
71. $2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right)$



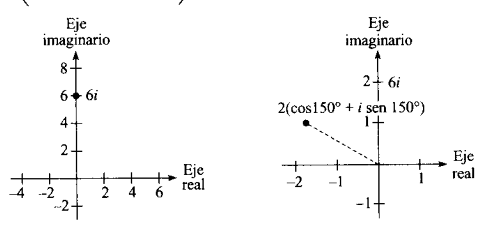
73. $4\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}\right)$



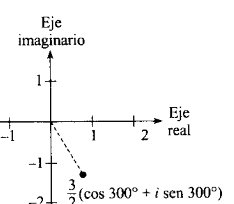
75. $6\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)$



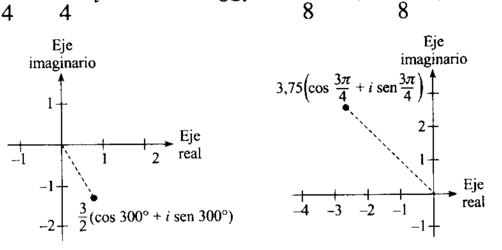
77. $-\sqrt{3} + i$



79. $\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i$



81. $\frac{-15\sqrt{2}}{8} + \frac{15\sqrt{2}}{8}i$

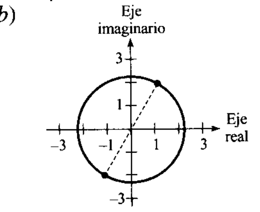


83. $12\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)$ **85.** $\frac{10}{9}(\cos 200° + i \operatorname{sen} 200°)$

87. $-4 - 4i$ **89.** $-32i$ **91.** $-128\sqrt{3} - 128i$ **93.** i

95. *a)* $\sqrt{5}\,(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$
$\sqrt{5}\,(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°)$

b)



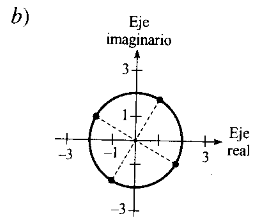
c) $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i, -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$

97. *a)* $2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)$
$2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right)$

$2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$

$2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right)$

b)



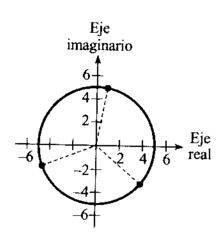
c) $1 + \sqrt{3}i,\ -\sqrt{3} + i,\ -1 - \sqrt{3}i,\ \sqrt{3} - i$

99. *a)* $5\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{9}\right)$

$5\left(\cos\frac{10\pi}{9} + i \operatorname{sen}\frac{10\pi}{9}\right)$

$5\left(\cos\frac{16\pi}{9} + i \operatorname{sen}\frac{16\pi}{9}\right)$

b)



101. $\cos\frac{\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}$

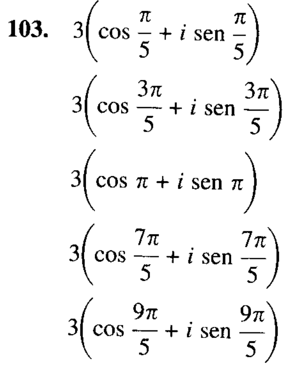
$\cos\frac{5\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{8}$

$\cos\frac{9\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{9\pi}{8}$

$\cos\frac{13\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{13\pi}{8}$

Eje imaginario / Eje real (2, −2, 2, −2)

103. $3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right)$

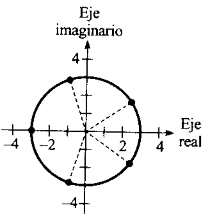


$3\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{5}\right)$

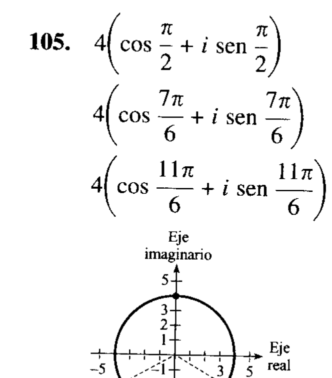
$3(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$

$3\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{5}\right)$

$3\left(\cos\frac{9\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{9\pi}{5}\right)$



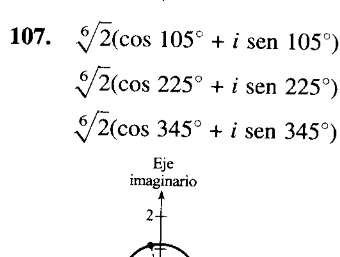
105. $4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$



$4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right)$

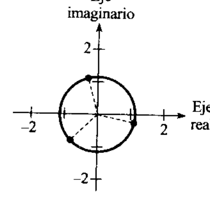
$4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right)$

107. $\sqrt[6]{2}(\cos 105^\circ + i \operatorname{sen} 105^\circ)$



$\sqrt[6]{2}(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ)$

$\sqrt[6]{2}(\cos 345^\circ + i \operatorname{sen} 345^\circ)$



DERIVADAS E INTEGRALES

Reglas básicas de derivación

1. $\frac{d}{dx}[cu] = cu'$
2. $\frac{d}{dx}[u \pm v] = u' \pm v'$
3. $\frac{d}{dx}[uv] = uv' + vu'$
4. $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{vu' - uv'}{v^2}$
5. $\frac{d}{dx}[c] = 0$
6. $\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$
7. $\frac{d}{dx}[x] = 1$
8. $\frac{d}{dx}[|u|] = \frac{u}{|u|}(u'), \ u \neq 0$
9. $\frac{d}{dx}[ln\ u] = \frac{u'}{u}$
10. $\frac{d}{dx}[e^u] = e^u u'$
11. $\frac{d}{dx}[\text{sen } u] = (\cos u)u'$
12. $\frac{d}{dx}[\cos u] = -(\text{sen } u)u'$
13. $\frac{d}{dx}[\text{tg } u] = (\sec^2 u)u'$
14. $\frac{d}{dx}[\text{ctg } u] = -(\text{cosec } u)^2 u'$
15. $\frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \text{ tg } u)u'$
16. $\frac{d}{dx}[\text{cosec } u] = -(\text{cosec } u \text{ ctg } u)u'$
17. $\frac{d}{dx}[\text{arcsen } u] = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
18. $\frac{d}{dx}[\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
19. $\frac{d}{dx}[\text{arctg } u] = \frac{u'}{1 + u^2}$
20. $\frac{d}{dx}[\text{arcctg } u] = \frac{-u'}{1 + u^2}$
21. $\frac{d}{dx}[\text{arcsec } u] = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$
22. $\frac{d}{dx}[\text{arccosec } u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$

Fórmulas básicas de integración

1. $\int kf(u)\, du = k \int f(u)\, du$
2. $\int [f(u) \pm g(u)]\, du = \int f(u)\, du \pm \int g(u)\, du$
3. $\int du = u + C$
4. $\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n + 1} + C, \ n \neq -1$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$
6. $\int e^u\, du = e^u + C$
7. $\int \text{sen } u\, du = -\cos u + C$
8. $\int \cos u\, du = \text{sen } u + C$
9. $\int \text{tg } u\, du = -\ln |\cos u| + C$
10. $\int \text{ctg } u\, du = \ln |\text{sen } u| + C$
11. $\int \sec u\, du = \ln |\sec u + \text{tg } u| + C$
12. $\int \text{cosec } u\, du = -\ln |\text{cosec } u + \text{ctg } u| + C$
13. $\int \sec^2 u\, du = \text{tg } u + C$
14. $\int \text{cosec}^2 u\, du = -\text{ctg } u + C$
15. $\int \sec u \text{ tg } u\, du = \sec u + C$
16. $\int \text{cosec } u \text{ ctg } u\, du = -\text{cosec } u + C$
17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{arcsen } \frac{u}{a} + C$
18. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \text{ arctg } \frac{u}{a} + C$
19. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \text{ arcsec } \frac{|u|}{a} + C$

FÓRMULAS DE GEOMETRÍA

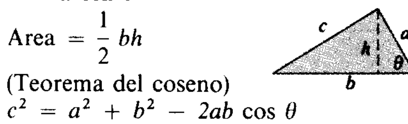
Triángulo

$h = a \text{ sen } \theta$

Area $= \dfrac{1}{2}\, bh$

(Teorema del coseno)

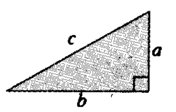
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$



Triángulo rectángulo

(Teorema de Pitágoras)

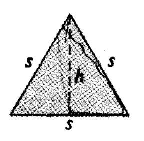
$c^2 = a^2 + b^2$



Triángulo equilátero

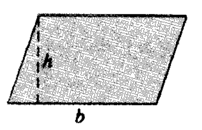
$h = \dfrac{\sqrt{3}s}{2}$

Area $= \dfrac{\sqrt{3}s^2}{4}$



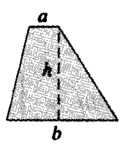
Paralelogramo

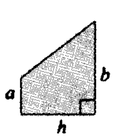
Area $= bh$



Trapecio

Area $= \dfrac{h}{2}(a + b)$

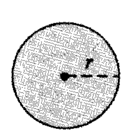




Círculo

Area $= \pi r^2$

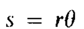
Circunferencia $= 2\pi r$



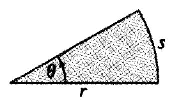
Sector circular

(θ en radianes)

Area $= \dfrac{\theta r^2}{2}$



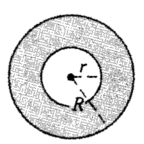
$s = r\theta$

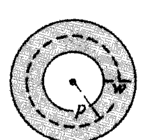


Anillo circular

(p = radio medio,
w = anchura)

Area $= \pi(R^2 - r^2)$
$= 2\pi pw$

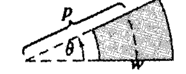




Sector de un anillo circular

(p = radio medio,
w = anchura,
θ en radianes)

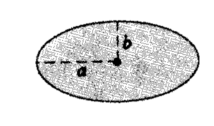
Area $= \theta pw$



Elipse

Area $= \pi ab$

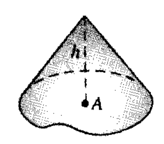
Circunferencia $\approx 2\pi \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$



Cono

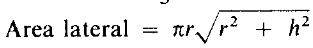
(A = área de la base)

Volumen $= \dfrac{Ah}{3}$

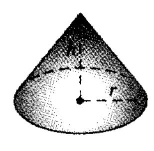


Cono circular recto

Volumen $= \dfrac{\pi r^2 h}{3}$



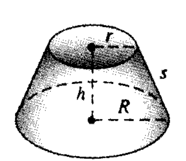
Area lateral $= \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$



Tronco de cono

Volumen $= \dfrac{\pi(r^2 + rR + R^2)h}{3}$

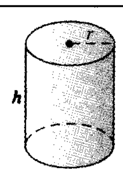
Area lateral $= \pi s(R + r)$



Cilindro circular recto

Volumen $= \pi r^2 h$

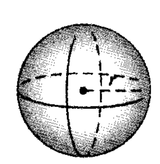
Area lateral $= 2\pi rh$



Esfera

Volumen $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$

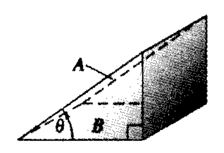
Area $= 4\pi r^2$



Cuña

(A = área de la cara superior,
B = área de la base)

$A = B \sec \theta$



ÁLGEBRA

Factores y ceros de polinomios

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio. Si $p(a) = 0$, se dice que a es un *cero* del polinomio y una solución de la ecuación $p(x) = 0$. Además, $(x - a)$ es un *factor* del polinomio.

Teorema fundamental del álgebra

Un polinomio de grado n tiene n ceros (no necesariamente distintos). Aunque todos esos ceros pueden ser complejos, un polinomio real de grado impar ha de tener al menos un cero real.

Fórmula cuadrática

Si $p(x) = ax^2 + bx + c$, y $0 \leqslant b^2 - 4ac$, entonces los ceros reales de p son $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$.

Factorizaciones especiales

$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$

$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$

$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$

$x^4 - a^4 = (x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$

Teorema del binomio

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

$(x - y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

$$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$$

$$(x - y)^n = x^n - nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 - \cdots \pm nxy^{n-1} \mp y^n$$

Teorema de los ceros racionales

Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros, todos sus *ceros racionales* son de la forma $x = r/s$, donde r es un divisor de a_0 y s es un divisor de a_n.

Factorización por agrupamiento

$acx^3 + adx^2 + bcx + bd = ax^2(cx + d) + b(cx + d) = (ax^2 + b)(cx + d)$

Operaciones aritméticas

$ab + ac = a(b + c)$

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{ad}{bc}$

$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc}$

$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{ac}{b}$

$a\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{ab}{c}$

$\frac{a - b}{c - d} = \frac{b - a}{d - c}$

$\frac{ab + ac}{a} = b + c$

Exponentes y radicales

$a^0 = 1, \quad a \neq 0$

$(ab)^x = a^x b^x$

$a^x a^y = a^{x+y}$

$\sqrt{a} = a^{1/2}$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$

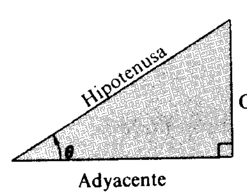
$(a^x)^y = a^{xy}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

TRIGONOMETRÍA

Definición de las seis funciones trigonométricas

Definición por triángulos rectángulos, con $0 < \theta < \pi/2$.

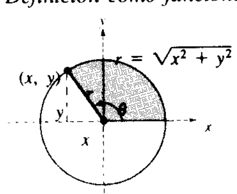


$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op.}}{\text{hip.}} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{hip.}}{\text{op.}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ady.}}{\text{hip.}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip.}}{\text{ady.}}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{op.}}{\text{ady.}} \qquad \operatorname{ctg}\theta = \frac{\text{ady.}}{\text{op.}}$$

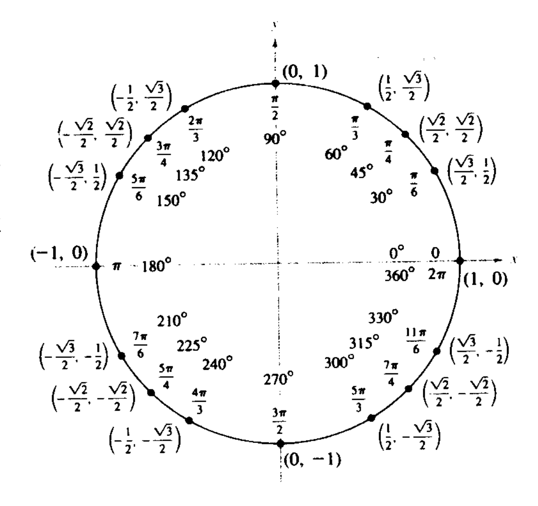
Definición como funciones circulares, para ángulos θ *arbitrarios.*



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \qquad \operatorname{ctg}\theta = \frac{x}{y}$$



Identidades recíprocas

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \cos x = \frac{1}{\sec x} \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Identidades de tangente y cotangente

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Identidades de Pitágoras

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

Identidades de cofunciones

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cosec} x \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$$

Fórmulas de reducción

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

$$\operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x \qquad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

$$\sec(-x) = -\sec x \qquad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$$

Fórmulas de suma y diferencia

$$\operatorname{sen}(u \pm v) = \operatorname{sen} u \cos v \pm \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\operatorname{tg}(u \pm v) = \frac{\operatorname{tg} u \pm \operatorname{tg} v}{1 \mp \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}$$

Fórmulas del ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$$

$$\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 u$$

$$\operatorname{tg} 2u = \frac{2 \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg}^2 u}$$

Fórmulas de reducción de potencias

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

Fórmulas suma-producto

$$\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{u + v}{2}\right) \cos\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v = 2 \cos\left(\frac{u + v}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos\left(\frac{u + v}{2}\right) \cos\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\cos u - \cos v = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{u + v}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

Fórmulas producto-suma

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$$

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$$

$$\operatorname{sen} u \cos v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\cos u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$$

Índice